

УДК 621.391

АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ПОРОГОВОЙ ВЕЛИЧИНЫ ОТНОШЕНИЯ СИГНАЛ/ШУМ В ЗАДАЧАХ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТОВ В РАДИОГОЛОГРАФИИ ЭТАЛОННЫМ ФАЗОВЫМ МЕТОДОМ

А. С. Гвоздарёв, Т. К. Артёмова, К. С. Артёмов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Статья поступила в редакцию 23 октября 2015 г.

Аннотация. Рассмотрен метод нахождения отношения сигнал/шум, соответствующего началу пороговой области при оценке параметров объектов, основанный на использовании расхождения между нижними границами Рао-Крамера и Чепмена-Роббинса. На примере задачи оценки интегральной разности фаз в радиоголографическом эталонном фазовом методе продемонстрирована работоспособность предложенного подхода.

Ключевые слова: радиоголография, оценка параметров, пороговый эффект, граница Рао-Крамера, граница Чепмена-Роббинса.

Abstract: A method for signal-to-noise ratio assigning the threshold effect in signal parameter estimation is proposed. The approach relies on the divergence between the Cramer-Rao and Chapman-Robbins lower bounds for variances of the obtained estimates. The proposed methods' validation is illustrated with an example of cumulative phase estimation in phase template matching method for microwave imaging applications.

Key words: microwave imaging, parameter estimation, threshold effect, Cramer-Rao bound, Chapman-Robbins bound.

Введение

Одним из ключевых показателей качества функционирования радиоголографических систем (ближнего действия) обнаружения и распознавания объектов [1-2], использующих эталонный фазовый метод [3], является их разрешающая способность. При функционировании систем

голографического радиовидения (СГРВ) в условиях наличия априорной неопределённости относительно параметров исследуемых объектов, сред распространения сигнала, препятствий и других факторов величина разрешающей способности существенно зависит от качества их оценки: дисперсии D или рассеяния \hat{D} [4–6]. Так как реальное качество получаемой оценки может быть заранее не известно (невозможно получить в аналитическом виде строгое выражение для дисперсии/рассеяния), для определения разрешающей способности пользуются теоретическими выражениями для предельных нижних границ [7]. Среди нижних границ наиболее часто на практике встречается граница Рао-Крамера CRB (ГРК) [8], что объясняется относительной простотой её вычисления во многих практических случаях, возможностью наглядной интерпретации и получения в ряде случаев замкнутых аналитических выражений [6].

Однако известно, что данная граница, являясь наинизшей из всех возможных и, в случае анализа оценок с эффективностью меньше единицы, – недостижимой [4], не учитывает так называемый пороговый эффект [9-10], который проявляется в резком ухудшении качества оценки при незначительном уменьшении некоторой варьируемой величины t : соотношения сигнал/шум, длительности интервала наблюдения или объёма выборки. В результате на графике зависимости дисперсии/рассеяния оценки от t условно выделяется «асимптотическая» область [8], где D сходится (или асимптотически сходится) к ГРК, и пороговая, в которой их расхождение становится весомым. При этом в пороговой области существенно ухудшается реальное качество получаемой оценки (а значит и разрешающей способности) по сравнению с предсказываемым на основе ГРК.

Как следствие, особую актуальность получает решение задачи определения начала пороговой области.

2. Описание модели СГРВ, использующей эталонный фазовый метод

Рассмотрим систему голографического радиовидения, использующую в качестве способа оценки параметров удалённых объектов эталонный фазовый метод, описанный в [11].

Пусть СГРВ регистрирует N_{stat} наблюдений (реализаций) комплексной радиоголограммы или поля $\dot{u}(\alpha, R)$, рассеянного объектом с параметром R , в некоторой отсчётной точке на апертуре, характеризующейся направлением α из диапазона $[\alpha_1, \alpha_2]$. Пусть для ряда значений оцениваемого параметра $\{R_{et_i}\}_{i=1}^{N_{et}}$ (сетки эталонов) заранее сформирован набор опорных (эталонных) радиоголограмм $\{\dot{u}_{et_i}\}_{i=1}^{N_{et}} = \{\dot{u}_{et}(R_{et_i})\}_{i=1}^{N_{et}}$. Тогда в качестве оценки исследуемого параметра \hat{R}_{ob} выбирается значение эталонного параметра R_{et} , минимизирующее величину интегральной разности фаз (ИРФ) $\varphi_i(R_{ob})$:

$$\varphi_i(R_{ob}) = \left| \arg \left\{ \left(\dot{u}(R_{ob}, \alpha_j), \dot{u}_{et_i} \right) \right\} \right| = \left| \arg \left\{ \sum_{j=1}^{N_{\alpha}} \dot{u}_{et_i}(\alpha_j) \cdot \dot{u}^*(R_{ob}, \alpha_j) \right\} \right|. \quad (1)$$

В работах [11-12] получены выражения для вероятностно-статистических характеристик $\varphi_i(R_{ob})$ в случае регистрации радиоголограммы при наличии комплексного аддитивного белого Гауссовского шума с нулевым математическим ожиданием и равными дисперсиями по синфазной и квадратурной компонентам. Так, например, плотность распределения вероятности интегральной разности фаз задаётся следующим выражением:

$$w_{\varphi}(u, \rho, \psi) = \frac{2}{\pi} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \left[1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos(u - \varepsilon_i \psi) e^{-\frac{\rho^2}{2} \cos^2(u - \varepsilon_i \psi)} \operatorname{erf} \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos(u - \varepsilon_i \psi) \right) \right] \quad (2)$$

где $\varepsilon = \{1, -1\}$, ψ – истинное значение интегральной разности фаз в отсутствие шумов, $\operatorname{erf}(\cdot)$ – функция ошибок, а ρ – коэффициент, равный произведению отношения сигнал/шум q и коэффициента амплитудного расхождения η ,

определяющего несоответствие амплитудных радиоголограмм исследуемого объекта и эталона, выбранного для сравнения.

Из литературы [5] известно, что нижняя граница Рао-Крамера для дисперсии любой несмещённой оценки $\hat{\psi}$ скалярного параметра ψ задаётся неравенством:

$$CRB_{\hat{\psi}}(\psi, \vec{t}) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln(w(\vec{u} | \psi))}{\partial \psi^2} \right] = -E \left[\frac{\partial^2 \ln \left(\prod_{i=1}^{N_{stat}} w_{\varphi}(u_i, \rho, \psi) \right)}{\partial \psi^2} \right], \quad (3)$$

где $\vec{u} = \{u_1 \dots u_{N_{stat}}\}$ – вектор выборки (которая предполагается независимой), N_{stat} – объём статистической выборки, $E[\cdot]$ – означает операцию усреднения по выборке в точке истинного значения параметра, а \vec{t} – вектор, элементами которого являются потенциально варьируемые величины: соотношение сигнал/шум, длительность интервала наблюдения или объём выборки.

Для случая функции плотности вероятности (2) выражение для границы Рао-Крамера примет вид:

$$CRB_{\hat{\psi}}(\psi, \vec{t}) = \left(N_{stat} \int_0^{\pi/2} E \left[\left(\frac{\partial w_{\varphi}(u, \rho, \psi)}{\partial \psi} \right)^2 \right] w_{\varphi}(u, \rho, \psi) du \right)^{-1}, \quad (4)$$

где $E \left[\left(\frac{\partial w_{\varphi}(u, \rho, \psi)}{\partial \psi} \right)^2 \right]$ определяется выражением:

$$E \left[\left(\frac{\partial w_{\varphi}(u, \rho, \psi)}{\partial \psi} \right)^2 \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(\sqrt{\pi} \left(\sum_{i=1}^2 v_i(u, \rho, \psi) \right) + 2 \right)} \left[\pi^{-1/2} \rho^2 \sin(2u) \cos(2\psi) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^2 (\rho^2 \cos^2(u - \varepsilon_i \psi) + 1) \operatorname{tg}(u - \psi) v_i(u, \rho, \psi) \right], \quad (5)$$

$$v_i(u, \rho, \psi) = \frac{\rho \cos(u + \varepsilon_i \psi)}{\sqrt{2}} e^{\frac{\rho^2 \cos^2(u + \varepsilon_i \psi)}{2}} \operatorname{erf} \left(\frac{\rho \cos(u + \varepsilon_i \psi)}{\sqrt{2}} \right). \quad (6)$$

При использовании эталонного фазового метода оценка интегральной разности фаз находится как выборочное среднее наблюдаемых реализаций [11]:

$$\hat{\psi}_{MM} = \bar{\varphi}. \quad (7)$$

Дисперсия такой оценки может быть получена на основе общего выражения для моментных функций интегральной разности фаз произвольного порядка [11, выражение (4)]:

$$D(\rho, \psi) = \left(\frac{\pi^2}{12} - \psi^2 \right) + \sqrt{\frac{1}{8\pi}} \rho e^{-\frac{\rho^2}{4}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{((-1)^l (1 - 2\psi) + 2\psi)}{l^2} \times \\ \times \cos(2l\psi) \left(I_{l+\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho^2}{4} \right) + I_{l-\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho^2}{4} \right) \right). \quad (8)$$

Для дальнейшего анализа была промоделирована работа СГРВ с рабочей длиной волны $\lambda = 0,008$ м, дуговой апертурой с углом раскрыва от 1° до 20° с шагом $0,2^\circ$ и радиусом кривизны 21,2 м, количеством пространственных дискретов радиоголограммы (антенных элементов) от 5 до 100 с шагом 1. Расстояние между объектом и центром СГРВ 21,2 м. Теоретическая аппаратная разрешающая способность системы (в отсутствии шумов) в такой конфигурации составляет 15λ . В качестве варьируемого параметра будем рассматривать величину отношения сигнал/шум (т.е. вектор \vec{t} будет состоять из одного элемента $\vec{t} = \{q\}$), которая изменялась в диапазоне от 5 до 20 дБ с шагом 0,2 дБ. Объём выборки для усреднения в каждой точке апертуры N_{stat} составлял 1000 отсчётов. Поля тестовых объектов записывались в присутствии шума, моделируемого комплексным аддитивным белым Гауссовым шумом с нулевыми математическими ожиданиями и уровнями дисперсии синфазной и квадратурной компонент, определяемыми, исходя из требуемой величины отношения сигнал/шум, а для эталонных — без шума.

На рисунках 1 и 2 представлены графики зависимости от отношения сигнал/шум величины корня из рассеяния оценки интегральной разности фаз методом моментов и нижней границы Рао-Крамера при $\psi = 2^\circ$ и 20° .

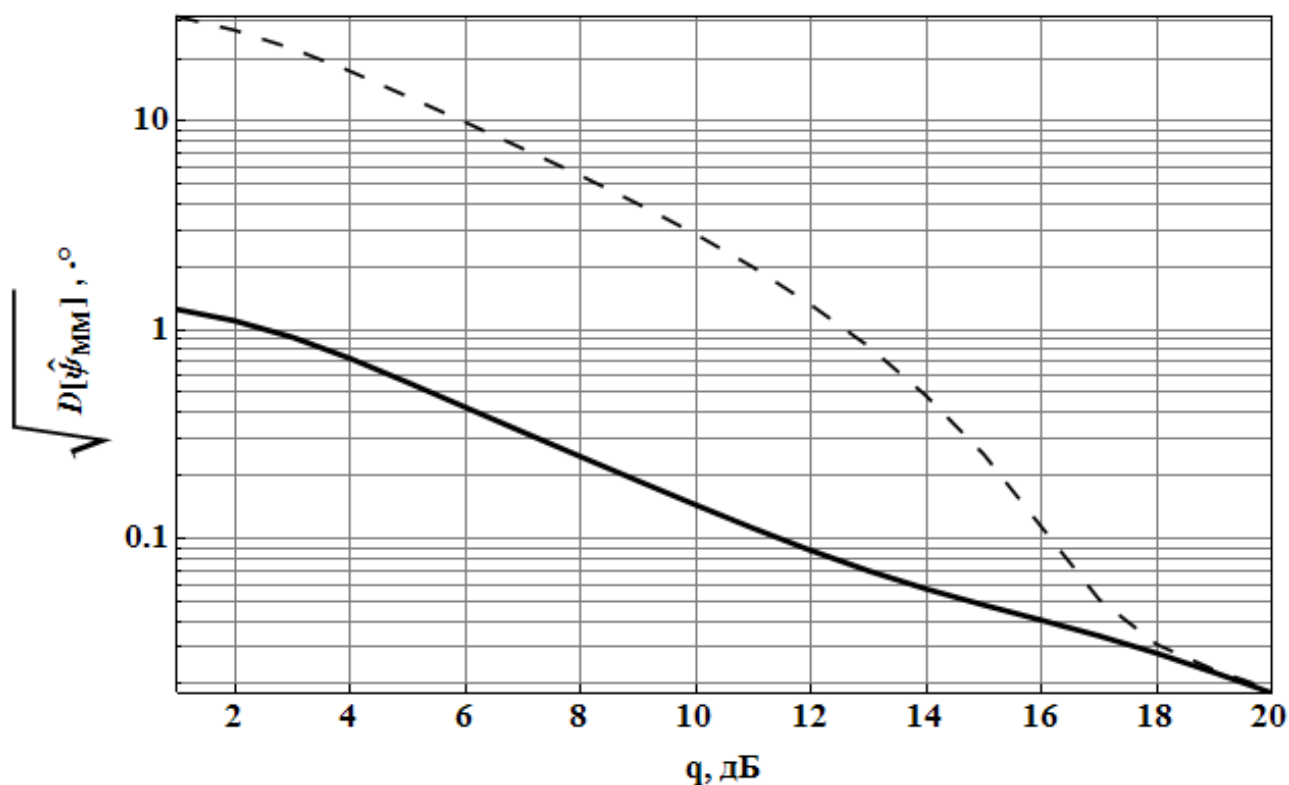


Рис. 1 Зависимость корня из рассеяния оценки для $\psi=2^\circ$: для метода моментов (пунктирная кривая), граница Рао-Крамера (сплошная кривая).

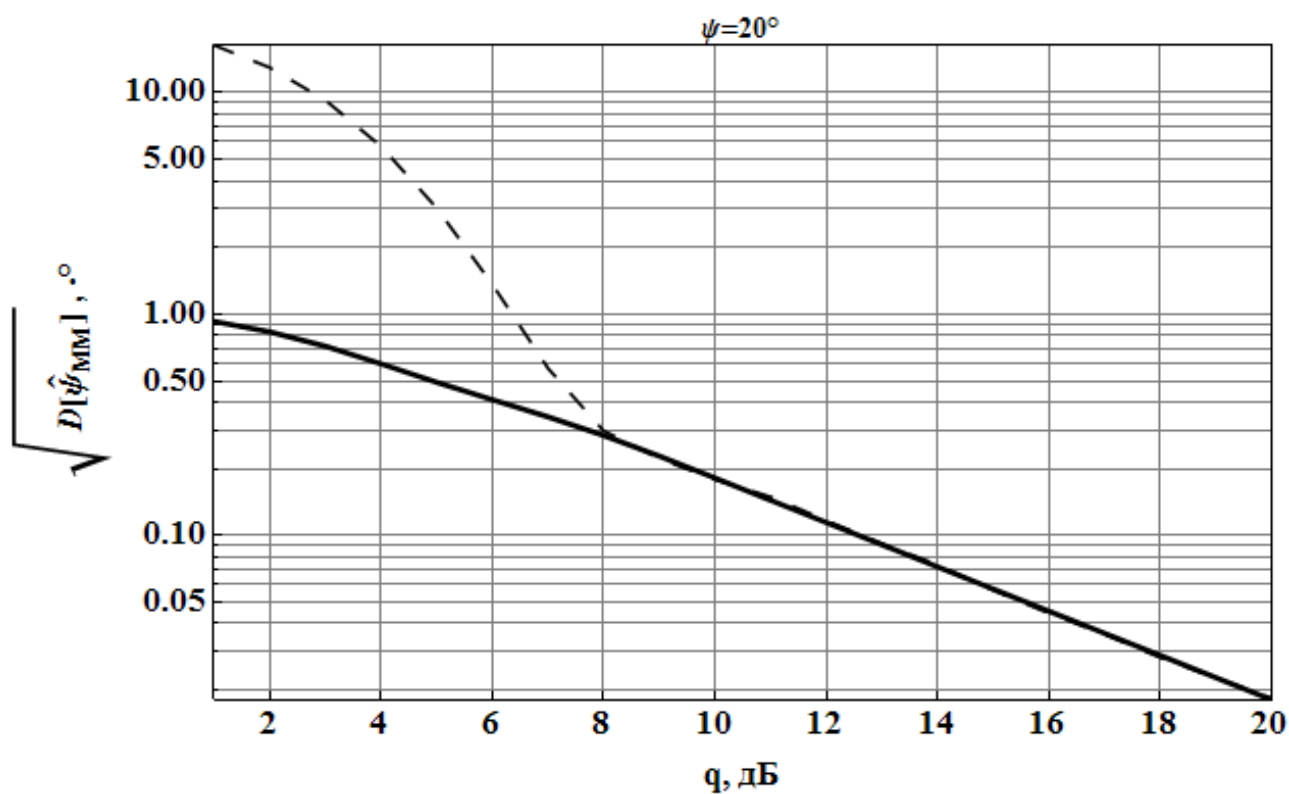


Рис. 2 Зависимость корня из рассеяния оценки для $\psi=20^\circ$: для метода моментов (пунктирная кривая), граница Рао-Крамера (сплошная кривая).

Полученные зависимости демонстрируют наличие порогового эффекта при оценке интегральной разности фаз методом моментов, при этом в области больших отношений сигнал/шум рассеяние оценки совпадает с ГРК, а в области малых отношении сигнал/шум существенно с ней расходится из-за появления аномальных ошибок. С увеличением истинного значения величины интегральной разности фаз начало пороговой области смещается в сторону малых отношений сигнал/шум.

Сопоставление полученных результатов с полученными ранее результатами исследований характеристик моментных оценок интегральной разности фаз, представленных в [12], указывает, что область пороговых значений отношения сигнал/шум совпадает с участком, на котором проявляется существенная смещённость оценки.

2. Формулировка предлагаемого решения задачи

Существует большое количество более точных, чем ГРК, выражений для нижней границы дисперсии/рассеяния оценки, среди которых стоит особо отметить границу Баранкина [8], которая теоретически является наивысшей из всех нижних границ, а значит, является наиболее точной. На практике граница Баранкина не может быть определена в виде замкнутого аналитического выражения, а численные реализации её поиска чрезвычайно сложны и редко используются на практике, так как требуют решения многомерной условной оптимизационной задачи относительно произвольно выбранного множества так называемых тестовых точек. Известно, что увеличение их количества повышает точность оценки дисперсии/рассеяния. Стоит отметить, что уже даже одноточечная граница Баранкина (наименее точная из семейства возможных границ Баранкина), совпадающая по форме с границей Чепмена-Роббинса (ГЧР), в отличие от ГРК, учитывает наличие порогового эффекта.

Граница Чепмена-Роббинса задаётся следующим выражением [13]:

$$\text{ChRB}(\psi, \vec{t}) = \sup_h \frac{h^2}{N_{stat} \mathbb{E} \left[\left(\frac{w(x+h, \psi)}{w(x, \psi)} \right)^2 - 1 \right]}. \quad (9)$$

На рисунках 3-4 на примере рассмотренной ранее модели (для величин истинной интегральной разности фаз в 2° и 20°) продемонстрировано поведение ГЧР в зависимости от отношения сигнал/шум, для наглядности также приведены ГРК и корень из рассеяния моментной оценки.

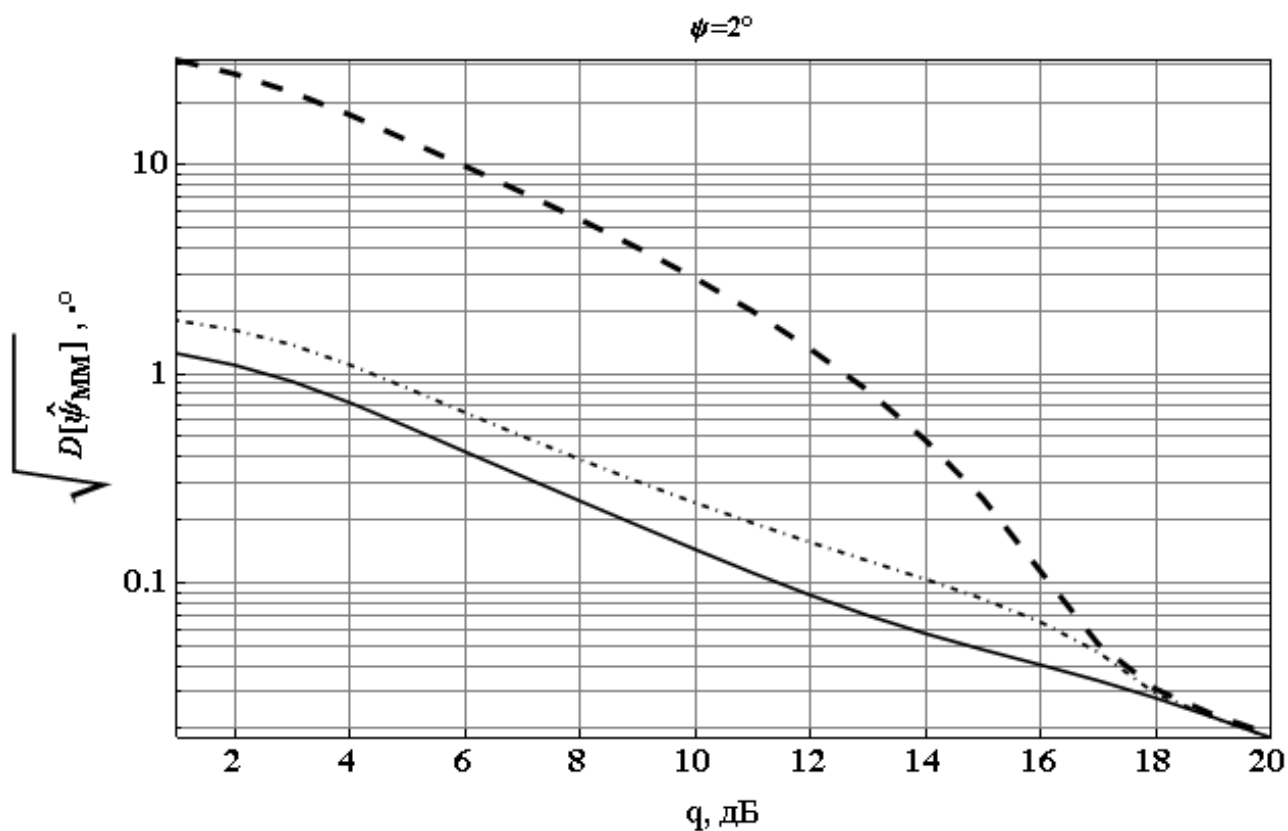


Рис. 3 Зависимость корня из рассеяния оценки для $\psi=2^\circ$ для метода моментов (пунктирная кривая), граница Рао-Крамера (сплошная кривая) и граница Чепмена-Роббинса (штрихпунктирная кривая)

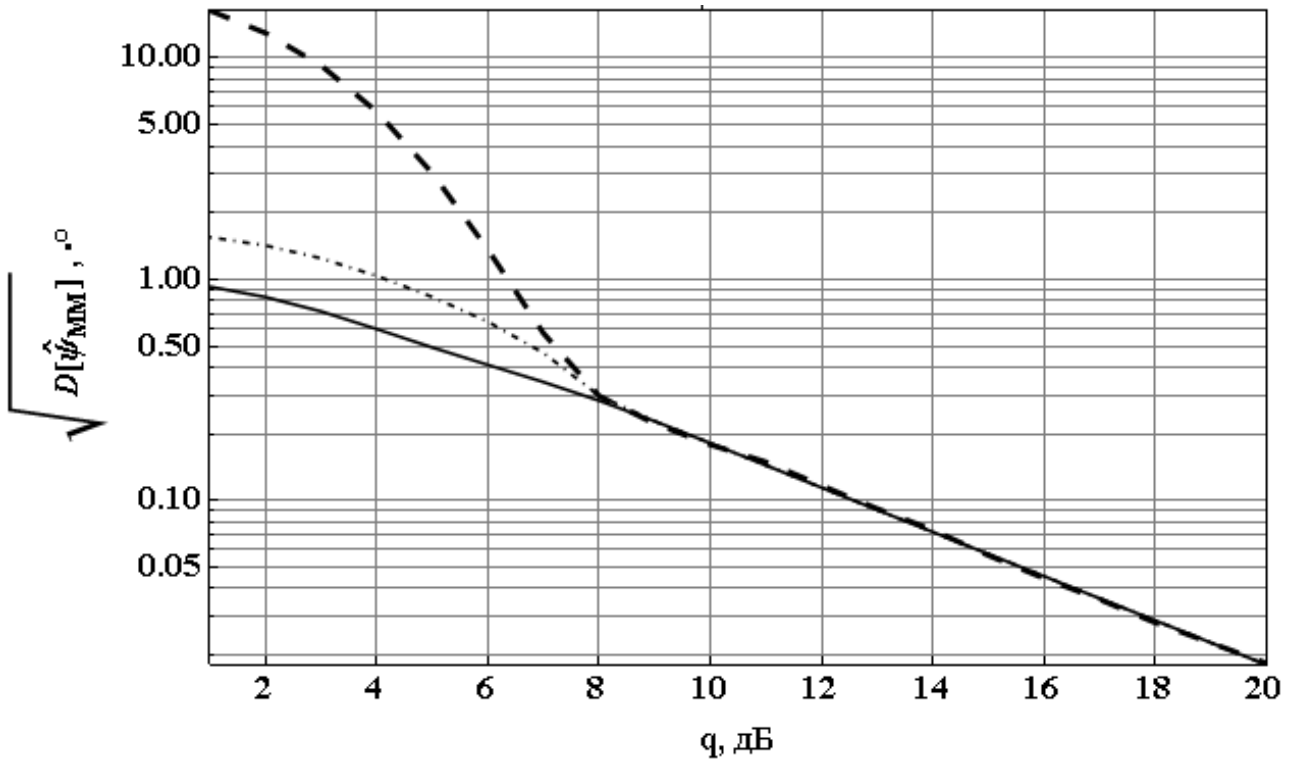


Рис. 4 Зависимость корня из рассеяния оценки для $\psi=20^\circ$ для метода моментов (пунктирная кривая), граница Рао-Крамера (сплошная кривая) и граница Чепмена-Роббинса (штрихпунктирная кривая)

Можно отметить, что начало пороговой области для моментной оценки практически совпадает с расхождением двух рассмотренных границ.

Факт наличия асимптотического совпадения ГРК и ГЧР и учёт границей Чепмена-Роббинса порогового эффекта позволяет предложить в качестве индикатора начала пороговой области точку (область) X расхождения двух границ на некоторую малую наперёд заданную величину ε :

$$q_{\Pi} : \left| \text{ChRB}(\psi, q_{\Pi}) - \text{CRB}(\psi, q_{\Pi}) \right| \leq \varepsilon. \quad (10)$$

Исходя из используемой модели, будем искать точку начала пороговой области q_{Π} по величине q (для заданного уровня расхождения ε) в соответствии с предложенным критерием (10) с помощью выражений для границ (4)-(6) и (9).

Анализ полученных результатов позволяет сделать заключение, что величина q_{Π} является функцией оцениваемой интегральной разности фаз ψ ;

при этом с уменьшением ψ уменьшается асимптотическая область. Это можно объяснить тем, что с уменьшением ИРФ увеличивается степень схожести объекта и эталона, что в, свою очередь, при таком же соотношении сигнал/шум затрудняет их различение [14]. То есть, для повышения качества различения объектов в присутствии шума при увеличении степени схожести объектов необходимо увеличить соотношение сигнал/шум.

Для количественного описания данного эффекта была построена зависимость величины начала пороговой области (по соотношению сигнал/шум) от величины оцениваемой интегральной разности фаз, представленная на рисунке 5.

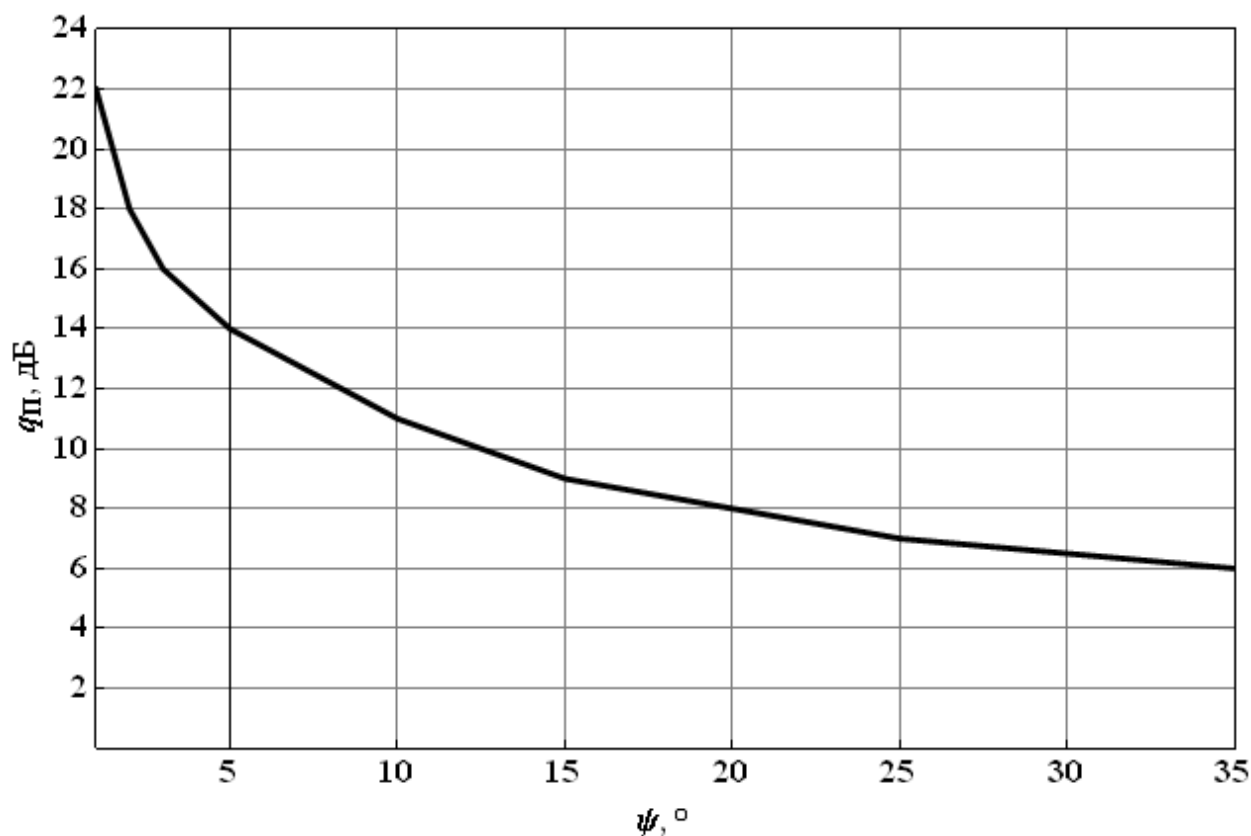


Рис. 5 Зависимость величины $q_{п}$ от значения оцениваемой интегральной разности фаз

Стоит отметить, что, несмотря на монотонный характер зависимости, скорость спадания $q_{п}$ не равномерная, она уменьшается с ростом истинной

разности фаз. Величина q_{Π} выходит на практически постоянный уровень около 6 дБ при $\psi > 35^\circ$. Это означает, что при оценивании интегральной разности фаз область априорной неопределённости величины соотношения сигнал/шум практически для любых объектов не может быть сжата менее чем до 5-6 дБ.

Для подтверждения работоспособности предложенного метода для более широкого круга оценок в дополнение к моментной оценке ИРФ в эталонном фазовом методе было проведено моделирование процедуры оценивания ИРФ методом максимального правдоподобия основе выражений, полученных в [12].

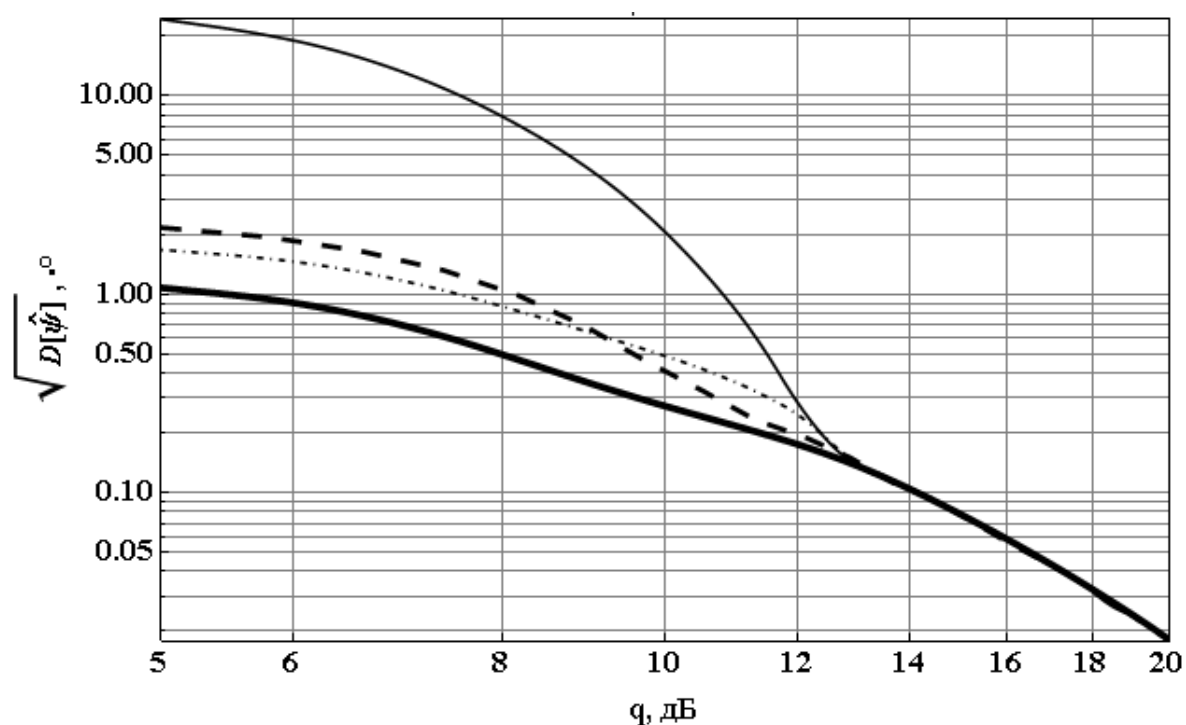


Рис. 6 Зависимость корня из рассеяния оценки для $\psi=5^\circ$ при объёме выборки 2000 отсчётов для метода максимального правдоподобия (пунктирная кривая), метода моментов (сплошная кривая), граница Рао-Крамера (сплошная жирная кривая) и граница Чепмена-Роббинса (штрихпунктирная кривая)

На рисунке 6 приведён график зависимости величины корня из рассеяния оценки для случая $\psi=5^\circ$. В отличие от предыдущего моделирования объём выборки был увеличен вдвое до 2000 отсчётов. Видно, что точку, в которой рассеяние оценок методом моментов и максимального правдоподобия начинает

расходиться с ГРК, можно считать совпадающей с точкой, в которой ГРК начинает расходиться с ГЧР, что подтверждает работоспособность предложенного метода.

3. Заключение

Проведённый анализ поведения границ Рао-Крамера и Чепмена-Роббинса для оценок интегральной разности фаз, формируемых системами голографического радиовидения при использовании эталонного фазового метода, демонстрирует возможность при помощи предложенного метода обнаружить расхождение между предсказываемым и реальным качеством оценки в условиях конкретного эксперимента (характеризующегося набором параметров: соотношение сигнал-шум, длительность интервала регистрации сигнала и др.) до проведения процедуры оценивания.

Проведённое моделирование процедуры оценивания интегральной разности фаз, соответствующей исследуемому параметру наблюдаемого объекта, с использованием метода моментов и метода максимального правдоподобия показало, что полученная граница Чепмена-Роббинса в неинформативной области точнее, чем граница Рао-Крамера, предсказывает величину дисперсии/рассеяния оценки максимального правдоподобия, а в пороговой области – точнее описывает дисперсию/рассеяние оценки по методу моментов.

Результаты исследования показывают, что практически для любых объектов при оценивании интегральной разности фаз объектного и эталонного полей (или радиоголограмм) предсказываемое качество формируемой системой голографического радиовидения оценки заведомо будет существенно отличаться от реального, если величина соотношения сигнал/шум не может быть обеспечена большей 5-6 дБ.

Литература

1. Копейкин В.В. Патент РФ № 2269811 С2. Устройство для получения СВЧ-голограмм и визуализации восстановленного изображения / В.В. Копейкин, П.А. Морозов, А.Н. Куляков и др., 2006.
2. Гончаров О. П. Пат. 2498339 Российская Федерация, МПК G01S13/00. Способ активной радиолокации / Гончаров О. П., Понькин В.А.; заявитель и патентообладатель Гончаров О. П. (RU). – № 2012107869/07; заявл. 01.03.2012; опубл. 10.11.2013, Бюл. № 31. – 14 с.
3. Артёмова Т.К., Гвоздарёв А.С. Минимально-фазовый метод эталонной оценки размеров объектов в задачах радиоголографии // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. – 2011. – Т. 54, N 4. – С. 22 – 30.
4. Губарев В. В. Алгоритмы статистических измерений. – М.: Энергоатомиздат, 1985.
5. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. – М.: Сов. радио, 1978.
6. Kay S. M. Fundamentals of statistical signal processing. – NY: Prentice Hall, 1993. – Vol.1.
7. Гвоздарёв А.С., Артёмова Т.К., Артёмов К.С. Использование границы Чернова и статистического предела разрешения для определения точности оценки параметров радиоголографических объектов минимально-фазовым методом и построения классификационной сетки эталонов метода решётки // Журнал радиоэлектроники. – Декабрь 2012. – №12.
8. Harry L. Van Trees, Kristine L. Bell. Bayesian bounds for parameter estimation and nonlinear filtering and tracking. Wiley/IEEE Press, 2007.
9. Chaumette E., Renaux A., Larzabal P. New trends in deterministic lower bounds and SNR threshold estimation: from derivable bounds to conjectural bounds // Proc. of IEEE Sensor array multichannel workshop SAM-2010 (special session on lower bound in array processing). Kibutz Ma'ale Hahamisha, Israel, 2010.
10. Chaumette E., Renaux A., Larzabal P. Lower bounds on mean square error derived from mixture of linear and non-linear transformations of the

unbiasedness definition // Proc. of IEEE international conference on acoustics, speech, and signal processing. ICASSP-09, Taipei, Taiwan.

11. Артёмов Т.К., Гвоздарёв А.С., Захаров А.С. Исследование вероятностных характеристик интегральной разности фаз, используемой в эталонных фазовых методах // Вестник ЯрГУ. Серия Естественные и технические науки. 2012. №4, с. 30–36.
12. Гвоздарёв А.С., Артёмов Т.К., Артёмов К.С. Сравнение максимально правдоподобной и моментной оценок интегральной разности фаз // Журнал радиоэлектроники. – Декабрь 2013. – №12.
13. Chapman D. G., Robbins H. Minimum variance estimation without regularity assumptions. *Annals of Mathematical Statistics*. – 1951. – № 22. – P. 581–586.
14. Гвоздарёв А.С., Артёмов Т.К., Артёмов К.С. Анализ границ качества минимально-фазового метода эталонной оценки параметров объектов по радиоголограмме // Труды XVIII международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь». – Воронеж, 2012. – Т. 1. – С. 168–177.