

## ТЕОРЕМА О СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ В РАДИОЛОКАЦИИ И СВЯЗИ

Ю. Н. Горбунов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова  
РАН, 141120, Московская область, Фрязино, пл. академика Введенского, 1

<sup>2</sup> Российский технологический университет (МИРЭА), 119454, Москва, проспект  
Вернадского, 78

Статья поступила в редакцию 20 апреля 2018 г.

**Аннотация.** Сформулирована теорема о стохастической дискретизации изображений в радиолокации и связи. Предложен стохастический подход, предполагающий использование случайных шкал дискретизации по времени и квантования по уровню. Предлагаемый подход является концептуальным для создания базы алгоритмов обработки сигналов, использующих понятия обычных и пространственных частот и рандомизации. Рекомендована необходимость хаотизации параметров прямоугольных окон, т.к. наряду с выбором весовых функций (функций окна) важна реализация стохастического (рандомизированного) усреднения дискретизированных данных. Расширены границы применения теоремы отсчетов на случай квантования изображений с использованием стохастических шкал дискретизации сигналов по времени и квантования по уровню. Предложенные способы обеспечивают возможность работы аналоговых электронных схем в эффективных ключевых режимах «с отсечкой», что актуально для построения высокопотенциальных систем радиолокации и связи. Аналого-цифровые преобразователи становятся малоразрядными – в пределе однобитовыми ( $[\pm 1]$ ). При цифровой обработке представляется возможность учёта аппаратных и вычислительных ресурсов процессора цифровой обработки сигналов.

Темновые, телевизионные и компьютерные изображения в системах радиолокации и связи в их цифровом представлении являются набором значений интенсивностей светового потока, распределённых на конечной площади, имеющей обычно прямоугольную форму. Интенсивность излучаемой световой энергии с единицы поверхности в точке с координатами  $(x, y)$

изображения представим неким числом  $v(x,y)$ , характеризующим яркость пиксела с координатами  $(x,y)$ . При цифровой обработке значения  $v(x,y)$  необходимо представить конечным числом дискретных отсчётов по времени  $t$  и конечным числом двоичных цифр (битов) по амплитуде. Использование прямоугольных пространственных и временных окон приводит к боковым лепесткам в зонах режекции и к пульсациям в зонах прозрачности устройств ЦО. Организация повторяемости путём разбиения на этапы при прямоугольных окнах не снимает явление Гиббса, максимальные лепестки остаются на уровне  $\sim 13$  дБ. При аналоговой реализации требуется изображение фильтровать до дискретизации, часто используется префильтрация - взвешивающие с помощью функции Гаусса [1]. При цифровой реализации требуются многоразрядные множители для реализации прецизионных взвешиваний с помощью окон Хемминга, Ханна, Кайзера, Кравченко и др.

**Ключевые слова:** стохастическая дискретизация по времени, стохастическая дискретизация по пространству, стохастическая дискретизация по уровню.

**Abstract.** A theorem on stochastic discretization of images in radiolocation and communication is formulated. A stochastic approach is proposed, which assumes the use of random time discretization scales and level quantization. The proposed approach is conceptual for creating a base of signal processing algorithms using the concepts of ordinary and spatial frequencies and randomization. The necessity of randomizing the parameters of rectangular windows is recommended, since along with the choice of weighting functions (window functions), the implementation of stochastic (randomized) averaging of discretized data is important.

The boundaries of the application of the sampling theorem to the case of quantization of images using stochastic signal discretization scales for time and quantization by level have been extended. The proposed methods provide the ability to operate analog electronic circuits in effective key modes “with cut-off”, which is important for building high-potential radar and communication systems. Analog-to-digital converters are becoming low-bit - in the limit of one-bit ( $[\pm 1]$ ). In digital processing,

it is possible to account for the hardware and computational resources of the digital signal processor.

Dark, television and computer images in radar systems and communications in their digital representation are a set of values of the intensities of the luminous flux, distributed on a final area, which usually has a rectangular shape. The intensity of the emitted light energy from a surface unit at a point with coordinates  $(x, y)$  of the image will be represented by a certain number in  $(x, y)$  characterizing the brightness of a pixel with coordinates  $(x, y)$ . When digitally processing, the values in  $(x, y)$  must be represented by a finite number of discrete samples in time  $t$  and a finite number of binary digits (bits) in amplitude. The use of rectangular spatial and temporal windows leads to side lobes in the rejection zones and to pulsations in the transparency zones of the DH devices. The organization of repeatability by splitting into stages with rectangular windows does not remove the Gibbs phenomenon, the maximum petals remain at the level of  $\sim 13$  dB. With an analog implementation, an image is required to be filtered prior to discretization; prefiltration is often used — weighting using the Gauss function [1]. Digital implementation requires multi-digit multipliers for the implementation of precision weighing using windows Hamming, Hann, Kaiser, Kravchenko and others.

**Keywords:** stochastic discretization by time, stochastic discretization by space, stochastic discretization by level.

## Введение

Темновые, телевизионные и компьютерные изображения в системах радиолокации и связи в их цифровом представлении являются набором значений интенсивностей светового потока, распределённых на конечной площади, имеющей обычно прямоугольную форму. Интенсивность излучаемой световой энергии с единицы поверхности в точке с координатами  $(x, y)$  изображения представим неким числом  $v(x, y)$ , характеризующим яркость пиксела с координатами  $(x, y)$ . При цифровой обработке значения  $v(x, y)$  необходимо представить конечным числом дискретных отсчётов по времени  $t$  и

конечным числом двоичных цифр (битов) по амплитуде. Использование прямоугольных пространственных и временных окон приводит к боковым лепесткам в зонах режекции и к пульсациям в зонах прозрачности устройств ЦО. Организация повторяемости путём разбиения на этапы при прямоугольных окнах не снимает явление Гиббса, максимальные лепестки остаются на уровне  $\sim 13$  дБ. При аналоговой реализации требуется изображение фильтровать до дискретизации, часто используется префильтрация - взвешивающие с помощью функции Гаусса [1]. При цифровой реализации требуются многоразрядные множители для реализации прецизионных взвешиваний с помощью окон Хемминга, Ханна, Кайзера, Кравченко и др.

В статье будет проанализирована возможность хаотизации параметров прямоугольных окон, т.к. наряду с выбором весовых функций (функций окна) в [2,3] указывалась возможность усреднения дискретизированных данных. Кроме этого важно обеспечение возможности работы аналоговых электронных схем в эффективных ключевых режимах «с отсечкой», что актуально для построения высокопотенциальных систем радиолокации и связи [4,7].

### Стохастическая дискретизация времени

При стохастической дискретизации времени [4,7] функции отсчетов  $\varphi_i(t)$  могут быть случайными, так как это не противоречит условию независимости (ортогональности), по крайней мере, для эргодических процессов. Это означает, что коэффициенты  $c_i$  разложения в ряд Котельникова могут быть случайными и добавятся шумы в реконструируемый сигнал. Переходя к стохастическому квантованию, в развитие классической теоремы Котельникова, потребуем чтобы

$$M_1\{\dot{c}_i\} = M_1\{v(t_i)\}, \quad (1)$$

где  $M_1\{\cdot\}$  - оператор математического ожидания от  $\{\cdot\}$ .

Вводя оператор  $M_1\{\cdot\}$  в доказательство, имеем:

$$M_1\{v(t)\} = M_1\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \varphi_i(t)\right\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} M_1\{v(t_i) \varphi_i(t)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} M_1\left\{v(t_i) \frac{\sin \omega_b(t-t_i)}{\omega_b(t-t_i)}\right\} \quad (2)$$

Теорема отсчетов в этом случае звучит так: «Функция среднего значения непрерывного сигнала  $v(t)$ , обладающего спектром, ограниченным  $\omega_b$ , полностью определяется значениями этого сигнала, взятыми в дискретные моменты времени  $t_i$  на случайной шкале импульсов, отстоящих друг от друга на величину, удовлетворяющую условию

$$M_1\{t_i - t_{i-1}\} = \frac{\pi}{\omega_b} = \frac{1}{2F_b} = \Delta t \cdot \quad (3)$$

Величина  $\Delta t$  называется средним шагом дискретизации.

### Стохастическая дискретизация пространства

При обобщении идеи стохастической дискретизации на случай квантования пространства аналогом  $\Delta t$  является шаг пространственной дискретизации  $d$  на осях  $x, y$ .

Применительно к РЛС в плоско-волновом приближении волна, падающая на апертуру  $S$  ФАР (см. Рис.1), под углом (пеленгом)  $\theta$  от оси  $Z$  в раскрыве антенны формирует поле, описываемое пространственными частотами:

$$\Omega_\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{tg} \alpha \cos \theta, \quad (4)$$

$$\Omega_\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{tg} \beta \cos \theta, \quad (5)$$

Аналог случайной шкалы пространственного квантования здесь не настолько очевиден, как в случае временного квантования, когда текущий интервал дискретизации  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  был случайным (вобулированным).

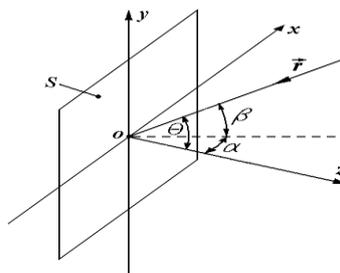


Рис. 1. Взаимосвязь угловых параметров прихода электромагнитной волны с направления  $\vec{r}$  в координатах апертуры ФАР  $S$

Тем не менее, можно представить и некоторую абстрактную ФАР с модуляцией пространственного положения фазовых центров отдельных приемных антенн по случайному закону, либо реальную растровую схему обработки видеоизображений в апертуре  $S$ , осуществляющей сканирование по определённому хаотическому алгоритму. Поскольку функция отсчетов  $\varphi_i(t)$  является случайной, ее параметры описываются моментными функциями  $M_1\{\varphi_i(t)\}$  и  $D\{\varphi_i(t)\}$ . Восстановление сигнала  $\dot{x}(t)$  предполагает оценку  $D\{v(t)\}$  (степени близости  $v(t)$  к  $M_1\{v(t)\}$ ).

Скорость сходимости  $M_1\{v(t)\}$  к  $v(t)$  в каждой точке времени и пространства будет определяться свойствами алгоритма дискретизации. Без привлечения ресурсов повышения скорости сходимости применением коррелированных случайных величин, зашумляющих функции отсчетов, можно говорить о стандартных зависимостях типа  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ . При локации цели радаром для измерения пространственных частот (пеленга) может быть создан ансамбль  $n$  пачек радарных зондирований с на аппаратуре ФАР размером  $M \times L$ .

Формулы для пары преобразований Фурье поля [4] запишем в виде:

$$B(j\Omega_\alpha, j\Omega_\beta) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} v(x, y) e^{-j(\Omega_\alpha x + \Omega_\beta y)} dx dy, \quad (6)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} B(j\Omega_\alpha, j\Omega_\beta) e^{j(\Omega_\alpha x + \Omega_\beta y)} d\Omega_\alpha d\Omega_\beta. \quad (7)$$

Налагая ограничения, заключающиеся в том, что пространственно-временной сигнал является финитным, ограничен сверху по каждой из координат частотой  $\Omega_b$ , получим:

$$M_1\{v(x, y)\} = M_1 \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{i,j} \varphi_i(x) \varphi_j(y) \right\} = \\ = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} M_1 \left\{ v(x_i, y_j) \frac{\sin \Omega_{b,\alpha} (x - x_i)}{\Omega_{b,\alpha} (x - x_i)} \frac{\sin \Omega_{b,\beta} (y - y_j)}{\Omega_{b,\beta} (y - y_j)} \right\}. \quad (8)$$

Теорема отсчетов применительно к рассматриваемому случаю звучит так: «Функция среднего значения всякого непрерывного двумерного сигнала (плоского поля), обладающего ограниченным спектром, полностью определяется отсчетами поля, взятыми в дискретных точках пространства  $x_i, y_j$  на случайных шкалах, и эти точки отстоят друг от друга на величину, удовлетворяющую условию  $M_1\{x_i - x_{i-1}\} = M_1\{y_j - y_{j-1}\} = \frac{\pi}{\Omega_b} = d$ ».

Величина  $A = \frac{\pi}{\Omega_b} = \frac{\pi}{2\pi F_b} = \frac{1}{2F_b} = d$  называется шагом пространственной дискретизации квантования на осях  $x_i = id, y_j = jd$ .

Учитывая то, что  $M_1\{v(x, y)\}$  отличается от самого поля  $v(x, y)$  на величину дополнительного шума, далее определим возможности уменьшения дисперсии за счет усреднения  $n$  пачек зондирований.

Для монохромных [1] изображений функция отсчетов типа  $\frac{\sin x}{x}$  в рассматриваемых прямоугольных окнах превращается в периодическую функцию типа  $\frac{\sin Nx}{\sin x}$ , где  $N$  – число точек алгоритма временного или пространственного БПФ.

Результаты моделирования, изложенные в [5] показывают, что в этом случае функция отсчетов  $\varphi_i(t)$  является случайной функцией, поскольку она зависит от случайного параметра  $\Delta t_i$ .

На Рис.2 дано объемное представление  $M_1\{\varphi_i(t)\}$  в координатах  $\frac{\pi t}{\Delta t}$  и  $v$ , из которого видно, что при увеличении  $v$  уменьшаются боковые лепестки, но растут энергетические потери, а при приближении  $v$  к 1 расширяется главный лепесток. Скорость уменьшения боковых лепестков выше скорости роста энергетических потерь.

Из Рис.2 видно, что при использовании модулированных прямоугольных окон получен (в качественном плане) эффект наложения аналоговых окон типа Хемминга, Ханна, Кайзера, Кравченко. Этот эффект достигнут хаотизацией

шага временной дискретизации и соответственно положений фронтов прямоугольных окон, которые в этом случае становятся «псевдо аналоговыми».

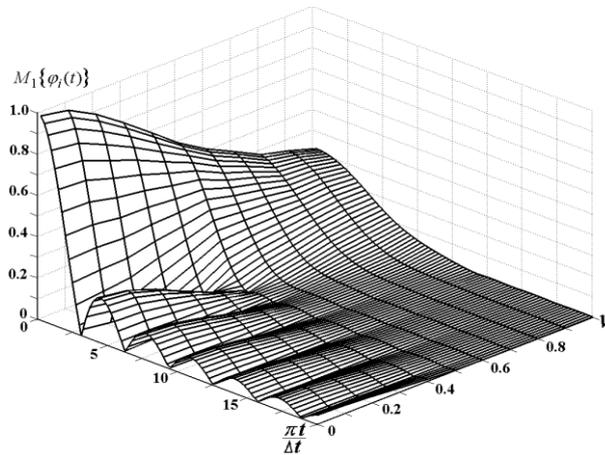


Рис. 2. Трехмерное изображение усредненной функции отсчетов  $\varphi_i(t)$

Из Рис.2 видно, что при использовании модулированных прямоугольных окон получен (в качественном плане) эффект наложения аналоговых окон типа Хемминга, Ханна, Кайзера, Кравченко. Этот эффект достигнут хаотизацией шага временной дискретизации и соответственно положений фронтов прямоугольных окон, которые в этом случае становятся «псевдо аналоговыми».

### Стохастическое квантование по уровню

Стохастическое квантование по уровню рассмотрено в [4,6,7]. В [6] показаны эпюры аналого-цифрового преобразования (АЦП) типичных форм электромагнитной волны. Следует обратить внимание, что блок-схема АЦП разбита на две секции, схему селективной задержки выборки (sample-and-hold), и собственно АЦП (ADC). Первая ступень – селективная задержка (S/H, в отечественной литературе принят термин «схема выборки - хранения»), где единственная сохранённая информация – мгновенное значение сигнала, в момент периода времени осуществления и преобразования выборки. Во второй ступени АЦП преобразует напряжение в самое близкое число (двоичный код). Это приводит к появлению в каждой выборке в цифровом сигнале к ошибке на интервале  $\pm \frac{\Delta}{2}$ , где  $\Delta$  - цена (в «мВ» или «мкВ») младшего разряда АЦП. В

результате, квантование может обычно моделироваться как добавленный к сигналу шум – в виде аддитивной добавки. Выход схемы селективной задержки позволяет изменяться только в периодических интервалах времени, в которых это сделано идентичным мгновенным значением входного сигнала. Изменения, которые происходят во входном сигнале между этими периодами квантования, полностью игнорируются. То есть осуществление выборки преобразует независимую переменную (в этом примере – время) из непрерывной в дискретную.

При стохастическом (рандомизированном) квантовании [4,7] между первой и второй ступенями включается промежуточная ступень – аналоговый сумматор хаотической (эталонной, переменной, случайной), но учитываемой добавки.

Мы тщательно избегаем сравнивать хаотизацию дискретизации по времени с хаотизацией квантования по уровню, поскольку это свалило бы осуществление выборки и квантования вместе «в одну кучу». Важно проанализировать их отдельно, потому, что они ухудшают сигнал различными способами, так как управляемы различными параметрами, существующими в электронике. Имеются случаи, где одно используется без другого. Например, производство выборки без квантования используется в «приборах с зарядовой связью» (в фильтрах управляемых конденсатором).

Модель, когда шум квантования, сгенерированный механизмом квантования в АЦП, просто добавляется ко входному сигналу. Зачастую добавленный шум равномерно распределён на интервале  $\Delta$  (в пределах  $\pm \frac{\Delta}{2}$ ) имеет нулевое среднее, и стандартную девиацию  $1/\sqrt{12}\Delta$  ( $\sim 0.29\Delta$ ).

Однако, эта модель квантования не всегда пригодна и ошибка квантования не всегда может быть обработана как случайная. Это случается всегда, когда аналоговый сигнал долго, в течение нескольких последовательных выборок, остается в относительно одинаковом значении. Выход пребывает в состоянии, увязшем на одном и том же дискретном значении для многих последовательных выборок, даже если аналоговый сигнал

изменяется в пределах  $\pm \frac{\Delta}{2}$ . Максимальная ошибка по модулю равна  $\frac{\Delta}{2}$  и часто не усредняется при накоплении. Создать условия, при которых ошибки от выборки к выборке имеют разные знаки и при накоплении компенсируют друг друга (т.е. «сглаживаются») позволяют стохастические (рандомизированные) процедуры квантования [4,7,8]. Добавленный искусственный шум вызывает захват цифрового сигнала между смежными уровнями квантования, обеспечивая большее количество информации относительно исходного сигнала. В [6] для рандомизации использован термин «Dithering» («добавление псевдослучайного сигнала, случайного шума»).

### **Заключение**

Развита концептуальная алгоритмическая база для разработки способов построения устройств обработки сигналов по обычным и пространственным частотам. Расширены границы применения теоремы отсчетов на этот случай, а также на случай квантования изображений с использованием стохастических шкал дискретизации сигналов по времени и квантования по уровню. Рекомендована необходимость хаотизации параметров прямоугольных окон, т.к. наряду с выбором весовых функций (функций окна) важна реализация стохастического (рандомизированного) усреднения дискретизированных данных. Предложенные способы обеспечивают возможность работы аналоговых электронных схем в эффективных ключевых режимах «с отсечкой», что актуально для построения высокопотенциальных систем радиолокации и связи. Аналого-цифровые преобразователи становятся малоразрядными – в пределе однобитовыми ( $[\pm 1]$ ). При цифровой обработке представляется возможность учёта аппаратных и вычислительных ресурсов процессора ЦОС.

### **Литература**

1. Дворкович В.П., Дворкович А.В. Цифровые видеоинформационные системы (теория и практика).- М.: Техносфера, 2012. – 1008 с.
2. С. М. Кей, С. Л. Марпл мл. Современные методы спектрального анализа: обзор. // ТИИЭР. - 1981. - т. 69. - №11. - с. 5 – 51.

3. Спектральное оценивание. Тематический выпуск. (Пер. под общей редакцией Э.Л. Наппельбаума.) // ТИИЭР. - 1982, т. 70, № 9, - с. 5 – 152.
4. Горбунов Ю.Н., Лобанов Б.С., Куликов Г.В. Введение в стохастическую радиолокацию. Учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия-Телеком, 2015. 376 с.
5. Горбунов Ю.Н. Стохастическое временное и пространственное квантование в плоских апертурах фазированных антенных решеток. // Труды X Международной научно-технической конференции «Радиолокация, радионавигация и связь». – Воронеж: Изд. НПФ «Саквояж», 2005, т. III. - с. 1790 - 1798.
6. Стивен В. Смит. Научно-техническое руководство по Цифровой Обработке Сигналов. – Калифорния, Калифорнийское техническое издательство Сан Диего, 1999, перевод АВТОЭКС, Санкт-Петербург. 2001, Режим доступа <http://www.autex.spb.ru>.
7. Горбунов Ю.Н. Рандомизированная обработка сигналов в радиолокации и связи". Монография. ISBN 978-3-659-37797-6. - Издательство «LAP LAMBERT Academic Publishing», 66121, Saarbrücken, Germany, 2015, 150 с.: ил.
8. Горбунов Ю.Н. О возможности уменьшения числа уровней квантования в цифровых фильтрах СДЦ путем применения рандомизированных алгоритмов.// Радиотехника. - 1983, № 6. - с. 45 – 47.

**Для цитирования:**

Ю. Н. Горбунов. Теорема о стохастической дискретизации изображений в радиолокации и связи. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2018. № 10. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/oct18/8/text.pdf>  
DOI 10.30898/1684-1719.2018.10.8