

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.10.12>

УДК: 621.396:621.391.8

ФОРМИРОВАНИЕ РАСШИРЕННЫХ ПРОВАЛОВ В ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ АДАПТИВНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ФИЛЬТРА С ПЛОСКОЙ АНТЕННОЙ РЕШЁТКОЙ

М. Ю. Лишак

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д.14

Статья поступила в редакцию 30 августа 2021 г., после доработки – 22 ноября 2021 г.

Аннотация. В современных радиотехнических системах для подавления активных помех используется адаптивное управление нулями диаграммы направленности антенной решётки. Однако при быстром перемещении источника помех эффективность подавления значительно снижается, т.к. помехи «выходят» из нулей. Эффективным средством устранения этого недостатка является расширение нулей диаграммы направленности. Один из способов такого расширения основан на том, что первая производная диаграммы направленности в направлении источников помех устанавливается равной нулю. Применительно к линейной антенной решётке этот метод позволяет создавать в диаграмме направленности расширенные нули. Однако в случае двумерной плоской антенной решётки нули будут расширяться только в одной угловой плоскости. Для того чтобы одинаково расширить нули во всех угловых направлениях и таким образом сделать их симметричными, необходимо наложить дополнительные ограничения на вторые частные производные диаграммы направленности. Для задания этих ограничений необходимо дополнительно включить в базис подпространства помех преобразованные направляющие векторы помех, вычисляемые в соответствии с выражениями для

вторых частных производных диаграммы направленности. В статье получены выражения для преобразованных направляющих векторов и на их основе предложен алгоритм синтеза пространственного фильтра, имеющего симметричные расширенные провалы в диаграмме направленности. В адаптивном алгоритме пространственной фильтрации, основанном на таком подходе, неизвестные направляющие векторы помех заменяются собственными векторами выборочной корреляционной матрицы принимаемых колебаний, соответствующими наибольшим собственным значениям. Эффективность предложенного метода подтверждена результатами моделирования. Дана оценка вычислительной сложности данного алгоритма.

Ключевые слова: адаптивная антенная решётка, подавление активных помех, пространственный фильтр, диаграмма направленности, расширение нулей.

Abstract. The adaptive antenna array beamforming is used to suppress jammers by placing antenna directional pattern nulls in the directions of the jammer sources. The performance of the beamformer is known to degrade in rapidly moving jammer environments. This degradation occurs due to the jammer motion that can bring the jammers out of the sharp nulls of the adaptive directional pattern. The directional pattern nulls broadening is an effective means to settle this problem. To broaden the nulls, the first derivative of the pattern in the directions of the jammer sources is set equal to zero. Being applied to the beamformer with a linear array, this technique allows producing broaden nulls in the directional pattern. However, in the case of a two-dimensional planar antenna array, the nulls will broaden only in one angular plane. In order to equally broaden the nulls in all angular directions and in this way to make them symmetrical, some additional constraints on the second partial derivatives of the directional pattern should be imposed. To set these constraints, it is necessary to include additional transformed steering vectors of jammers in the basis of the jammer subspace. These new transformed steering vectors are calculated in accordance with the expressions for the second partial derivatives of the directional pattern. In this paper, the expressions for the transformed steering vectors are derived and a novel beamforming algorithm based on them is proposed. In the adaptive beamforming

algorithm based on such an approach unknown steering vectors of jammers are replaced by the eigenvectors of the sample covariance matrix corresponding to the largest eigenvalues. The effectiveness of the proposed method is verified by the computer simulation results. The computational complexity of this algorithm is estimated.

Key words: adaptive array, jammer suppression, beamformer, directional pattern, null broadening.

Введение.

В современных радиотехнических системах локации, связи и навигации для защиты от активных помех используются методы адаптивной цифровой пространственной фильтрации, основанные на совместной обработке комплексных огибающих колебаний, принимаемых многоканальной антенной решёткой (АР). При этом основной операцией пространственной фильтрации, обеспечивающей выделение полезного сигнала и подавление помех, является суммирование комплексных огибающих принимаемых колебаний, умноженных на комплексные весовые коэффициенты [1]. В результате этого в диаграмме направленности (ДН) пространственного фильтра формируются глубокие провалы (нули) в направлениях действия помех.

Существующие алгоритмы расчёта весовых коэффициентов предназначены, главным образом, для использования в стационарных условиях, когда в течение времени приёма сигнала нет взаимного углового перемещения АР и источников помех. Если же такое перемещение происходит, то помехи «выходят» из нулей ДН и эффективность их подавления снижается. В связи с этим был разработан ряд методов искусственного расширения нулей ДН в направлениях действия помех [2 - 5]. Один из таких методов основан на формировании в ДН пространственного фильтра с линейной АР кратных нулей [2, 6, 7]. Для этого в задачу вычисления весовых коэффициентов пространственного фильтра вводятся дополнительные условия равенства нулю производных ДН в направлениях воздействия помех.

Для пространственного фильтра, построенного на основе плоской АР, эффективность подавления помех в ряде случаев существенно зависит от конфигурации провалов в ДН, формируемых в направлениях на источники помех. В частности, для того чтобы обеспечить малую чувствительность глубины подавления помех к угловому перемещению источников помех вне зависимости от того, в каком направлении эти перемещения происходят, провалы должны иметь осесимметричную форму. Простейшей поверхностью такого вида является параболоид вращения.

Применение алгоритма формирования кратных нулей в ДН пространственного фильтра с линейной АР к задаче синтеза пространственного фильтра с плоской АР позволяет получить двумерную ДН, имеющую кратные нули в любом заданном сечении, проходящем через ось ДН. Для этого достаточно спроектировать элементы АР на секущую плоскость и затем для полученной эквивалентной линейной АР рассчитать весовые коэффициенты пространственного фильтра. Конфигурация сформированных таким образом провалов характеризуется тем, что ДН является локально параболической только в заданном сечении. В других сечениях она имеет такой же вид, как и при формировании простых нулей (нулей 1-го порядка). Это означает, что расширение провала в ДН происходит только в одном направлении.

Другие известные методы расширения нулей ДН пространственного фильтра с линейной АР, основанные на модификации корреляционной матрицы принимаемых колебаний, [3 - 5] также не позволяют получить провал осесимметричной формы.

В работе автора [8] был предложен подход к синтезу пространственного фильтра с плоской АР и показана принципиальная возможность формирования в ДН расширенных провалов осесимметричной формы. В данной статье приведён другой, более простой, вывод алгоритма синтеза пространственного фильтра и на его основе построен алгоритм адаптивного формирования осесимметричных расширенных нулей.

1. Синтез пространственного фильтра

Одним из методов расширения нулей ДН пространственного фильтра с линейной АР является формирование кратных нулей 2-го порядка. При этом в направлениях воздействия помех обеспечивается равенство нулю как самой ДН, так и её производной, т.е. в окрестности кратного нуля ДН является параболической. Алгоритм вычисления вектора весовых коэффициентов пространственного фильтра, обеспечивающий получение кратных нулей, основан на методе проектирования исходного весового вектора \mathbf{W}_0 на ортогональное дополнение подпространства помех [6].

В качестве примера рассмотрим характеристики ДН пространственного фильтра с плоской АР, состоящей из 37 изотропных элементов, расположенных в узлах треугольной сетки. Система координат, связанная с АР, показана на рис. 1. На рис. 2 изображена геометрия АР. Величина шага АР $d = \frac{\lambda}{\sqrt{3}}$, где λ – длина волны, задана исходя из условия отсутствия побочных дифракционных максимумов ДН при любых углах сканирования [9, п. 3.3.1].

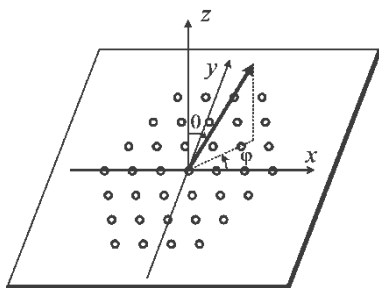


Рис. 1. Система координат.

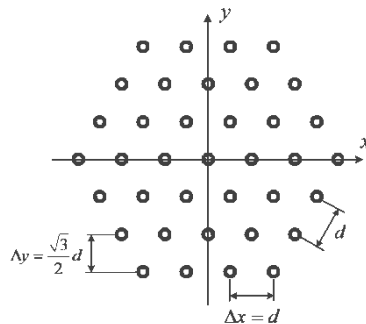


Рис. 2. Геометрия АР.

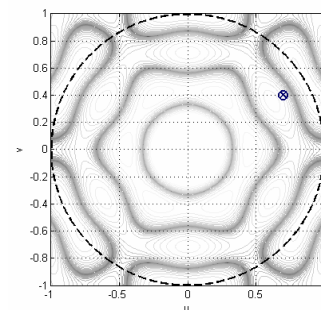
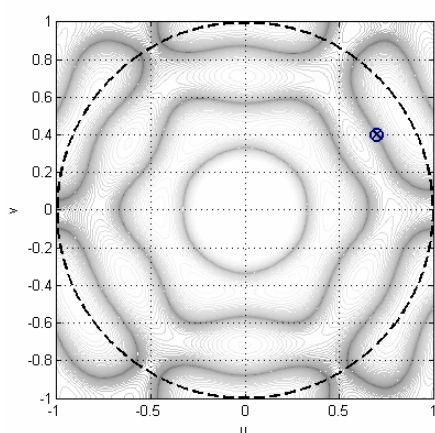


Рис. 3. ДН пространственного фильтра с единичными весовыми коэффициентами.

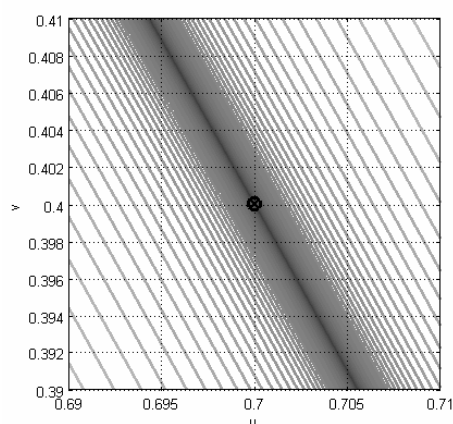
На рис. 3 приведено картографическое изображение (линии уровня) ДН пространственного фильтра с единичными весовыми коэффициентами, построенное в системе обобщённых угловых координат (u, v) , связанных с углами (θ, φ) сферической системы соотношениями $u = \sin \theta \cos \varphi$, $v = \sin \theta \sin \varphi$. Положение источника помехи с координатами $u_{\text{п}} = 0,7$, $v_{\text{п}} =$

0,4 показано знаком \otimes . Окружность единичного радиуса ограничивает область возможных значений обобщённых угловых координат [9, п. 2.1.3].

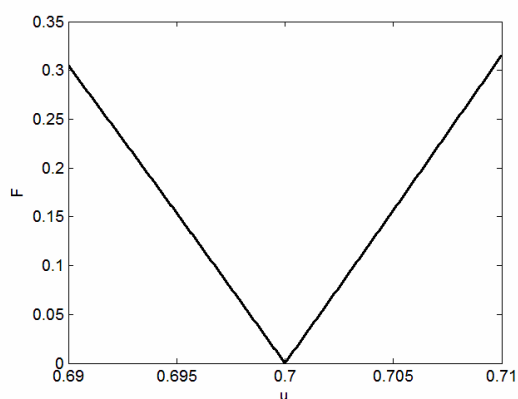
На рис. 4 показана ДН синтезированного пространственного фильтра с простым нулём: линии уровня во всей области значений обобщённых угловых координат (а), линии уровня в окрестности направления на источник помехи (б), сечения ДН в окрестности направления на источник помехи по оси u (в) и по оси v (г). Видно, что в сечении как по одной оси, так и по другой, ДН является линейной.



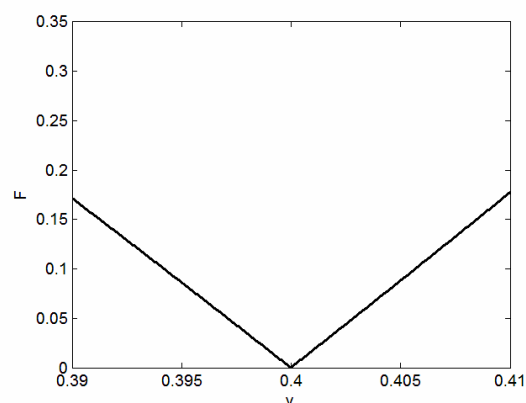
а) Линии уровня ДН.



б) Линии уровня ДН в окрестности направления на помеху.



в) Сечение ДН по оси u .



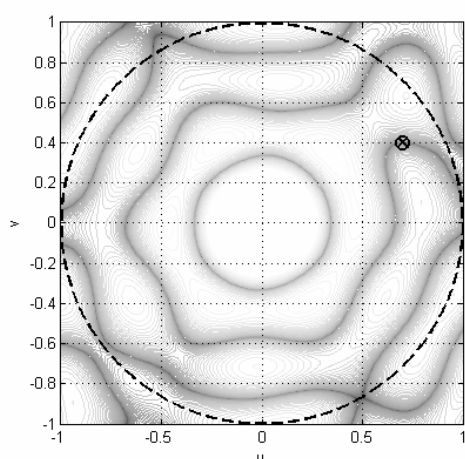
г) Сечение ДН по оси v .

Рис. 4. Синтезированная ДН: простой ноль в направлении на помеху.

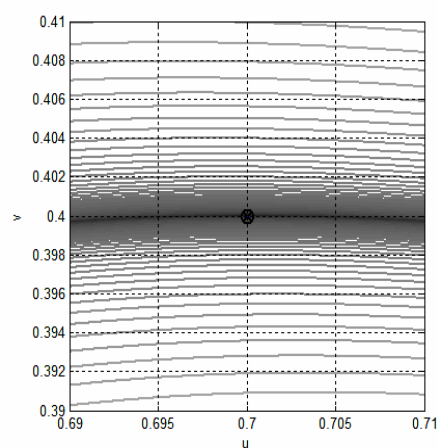
ДН пространственного фильтра, полученного в соответствии с алгоритмом формирования кратного нуля в случае линейной АР, показана на рис. 5. Видно, что в окрестности направления на помеху ДН имеет вид квадратичной параболы

в сечении по оси u и является линейной в сечении по оси v , т.е. расширение нуля происходит только в одном направлении.

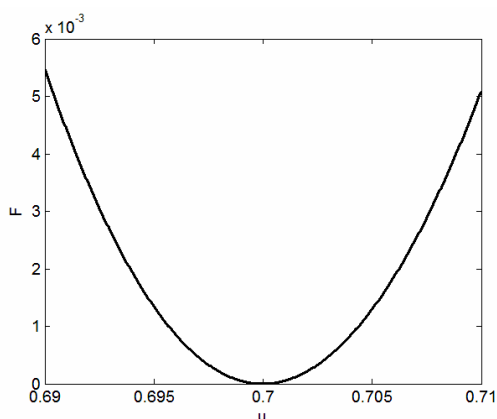
В качестве меры, позволяющей увеличить ширину нуля как в одной плоскости, так и в другой, предлагается синтезировать пространственный фильтр при дополнительном условии, обеспечивающем формирование локально параболической ДН не в одной, а в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Образующийся в результате провал в ДН можно условно назвать «дважды кратным нулём». Алгоритм синтеза пространственного фильтра с дважды кратными нулями является простым обобщением алгоритма формирования кратных нулей в случае линейной АР.



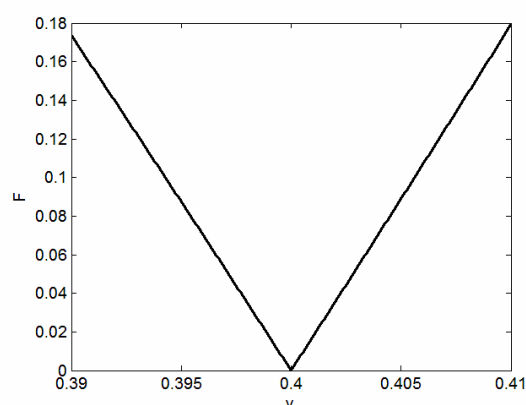
а) Линии уровня ДН.



б) Линии уровня ДН в окрестности направления на помеху.



в) Сечение ДН по оси u .



г) Сечение ДН по оси v .

Рис. 5. Синтезированная ДН: кратный нуль по оси u .

Рассмотрим задачу формирования нуля, кратного как по оси u , так и по оси v , в направлении действия помехи с обобщенными угловыми координатами $(u_{\text{п}}, v_{\text{п}})$. Условием получения такого нуля является одновременное равенство

нулю в точке $(u_{\text{п}}, v_{\text{п}})$ как самой ДН $F(u, v)$, так и её частных производных по обобщённым угловым координатам $F_u(u, v) = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u}$ и $F_v(u, v) = \frac{\partial F(u, v)}{\partial v}$:

$$\begin{cases} F(u_{\text{п}}, v_{\text{п}}) = 0, \\ F_u(u_{\text{п}}, v_{\text{п}}) = 0, \\ F_v(u_{\text{п}}, v_{\text{п}}) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Комплексная ДН пространственного фильтра определяется как

$$F(u, v) = \mathbf{W}^H \mathbf{S}(u, v), \quad (2)$$

где \mathbf{W} – вектор комплексных весовых коэффициентов (весовой вектор); $\mathbf{S}(u, v)$ – направляющий вектор, имеющий компоненты $S_n(u, v) = \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} (x_n u + y_n v)\right)$; x_n, y_n – координаты n -го элемента АР; H – символ эрмитова сопряжения.

Дифференцируя (2), получим следующие соотношения, связывающие частные производные комплексной ДН с весовым вектором:

$$F_u(u, v) = \mathbf{W}^H \frac{\partial \mathbf{S}(u, v)}{\partial u} = \mathbf{W}^H [\mathbf{D}_x \mathbf{S}(u, v)], \quad (3)$$

$$F_v(u, v) = \mathbf{W}^H \frac{\partial \mathbf{S}(u, v)}{\partial v} = \mathbf{W}^H [\mathbf{D}_y \mathbf{S}(u, v)], \quad (4)$$

где

$$\mathbf{D}_x = j \frac{2\pi}{\lambda} \text{diag}(x_1, \dots, x_N), \quad (5)$$

$$\mathbf{D}_y = j \frac{2\pi}{\lambda} \text{diag}(y_1, \dots, y_N) \quad (6)$$

– диагональные матрицы преобразования направляющего вектора.

Аналогичным образом получают выражения для вторых частных производных, которые используются в дальнейшем:

$$F_{uu}(u, v) = \frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial u^2} = \frac{\partial F_u(u, v)}{\partial u} = \mathbf{W}^H \left[\mathbf{D}_x \frac{\partial \mathbf{S}(u, v)}{\partial u} \right] = \mathbf{W}^H [\mathbf{D}_x^2 \mathbf{S}(u, v)], \quad (7)$$

$$F_{uv}(u, v) = \frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial F_u(u, v)}{\partial v} = \mathbf{W}^H \left[\mathbf{D}_x \frac{\partial \mathbf{S}(u, v)}{\partial v} \right] = \mathbf{W}^H [\mathbf{D}_x \mathbf{D}_y \mathbf{S}(u, v)], \quad (8)$$

$$F_{vv}(u, v) = \frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial v^2} = \frac{\partial F_v(u, v)}{\partial v} = \mathbf{W}^H \left[\mathbf{D}_y \frac{\partial \mathbf{S}(u, v)}{\partial v} \right] = \mathbf{W}^H [\mathbf{D}_y^2 \mathbf{S}(u, v)]. \quad (9)$$

Для формирования дважды кратного нуля в соответствии с условиями (1) необходимо, чтобы весовой вектор был ортогонален линейной оболочке

направляющего вектора помехи $\mathbf{S}_\Pi = \mathbf{S}(u_\Pi, v_\Pi)$ и преобразованных направляющих векторов $\mathbf{D}_x \mathbf{S}_\Pi$ и $\mathbf{D}_y \mathbf{S}_\Pi$:

$$\mathbf{W} \perp \text{span}(\mathbf{S}_\Pi, \mathbf{D}_x \mathbf{S}_\Pi, \mathbf{D}_y \mathbf{S}_\Pi), \quad (10)$$

а для обеспечения наименьших искажений ДН при формировании нуля необходимо иметь минимальное отклонение (евклидово расстояние) весового вектора \mathbf{W} от весового вектора \mathbf{W}_0 , соответствующего исходной ДН:

$$\|\mathbf{W} - \mathbf{W}_0\| = \min, \quad (11)$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора.

Весовой вектор, ортогональный заданному подпространству и имеющий наименьшее отклонение от вектора \mathbf{W}_0 , равен [6]

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 - \mathbf{P}\mathbf{W}_0, \quad (12)$$

где

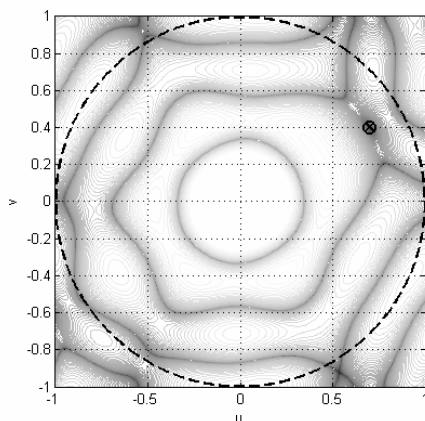
$$\mathbf{P} = \Psi(\Psi^H \Psi)^{-1} \Psi^H \quad (13)$$

– матрица ортогонального проектирования на линейную оболочку столбцов матрицы Ψ ;

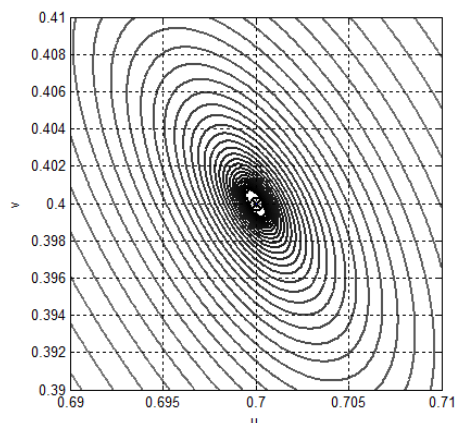
$$\Psi = [\mathbf{S}_\Pi, \mathbf{D}_x \mathbf{S}_\Pi, \mathbf{D}_y \mathbf{S}_\Pi] \quad (14)$$

– матрица размера $N \times 3$, столбцами которой являются векторы $\mathbf{S}_\Pi, \mathbf{D}_x \mathbf{S}_\Pi, \mathbf{D}_y \mathbf{S}_\Pi$.

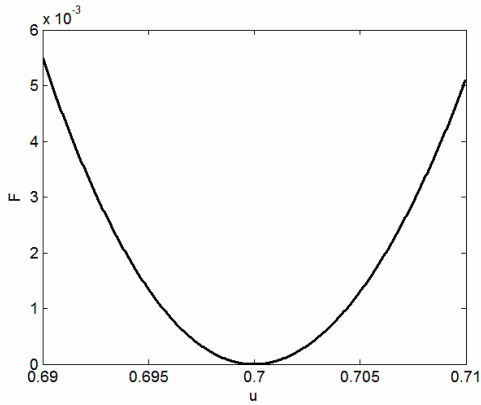
Линии уровня ДН при формировании дважды кратного нуля показаны на рис. 6. Видно, что линии уровня не круговые, а имеют форму эллипсов, т.е. полная инвариантность ширины нуля к ориентации секущей плоскости не обеспечивается.



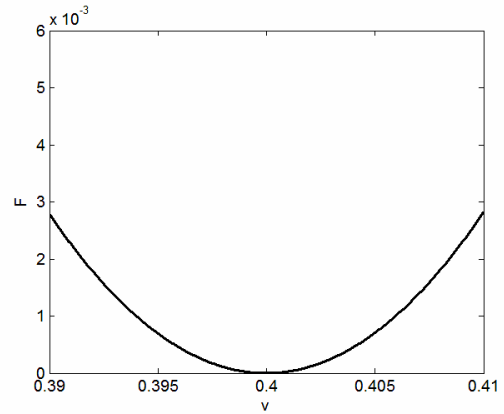
а) Линии уровня ДН.



б) Линии уровня ДН в окрестности направления на помеху.



а) Сечение ДН по оси u .



б) Сечение ДН по оси v .

Рис. 6. Синтезированная ДН: дважды кратный нуль.

Рассмотрим предлагаемый алгоритм формирования осесимметричного нуля 2-го порядка. Определим вектор обобщённых угловых координат как матрицу-столбец $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Тогда в малой окрестности направления на источник помехи, задаваемого вектором $\mathbf{p}_\Pi = \begin{pmatrix} u_\Pi \\ v_\Pi \end{pmatrix}$, комплексная ДН пространственного фильтра может быть представлена кратным рядом Тейлора [10, п. 4.10.5]:

$$F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}_\Pi) + \sum_{i=1}^2 \left. \frac{\partial F}{\partial p_i} \right|_{\mathbf{p}_\Pi} \Delta p_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left. \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} \right|_{\mathbf{p}_\Pi} \Delta p_i \Delta p_j + o(\|\Delta \mathbf{p}\|^2), \quad (15)$$

где $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_\Pi$ – отклонение вектора обобщённых угловых координат от направления на источник помехи; $o(\|\Delta \mathbf{p}\|^2)$ – остаточный член ряда, бесконечно малый по сравнению с $\|\Delta \mathbf{p}\|^2$ при $\Delta \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{0}$.

В матричной форме разложение (15) имеет следующий вид [11, § 3.3]:

$$F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}_\Pi) + \mathbf{g}(\mathbf{p}_\Pi)^T \Delta \mathbf{p} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{p}^T \mathbf{H}(\mathbf{p}_\Pi) \Delta \mathbf{p} + o(\|\Delta \mathbf{p}\|^2), \quad (16)$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} F_u(u, v) \\ F_v(u, v) \end{pmatrix}$ – градиент функции $F(u, v)$; $\mathbf{H}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} F_{uu}(u, v) & F_{uv}(u, v) \\ F_{vu}(u, v) & F_{vv}(u, v) \end{pmatrix}$ – матрица Гессе функции $F(u, v)$; T – символ транспонирования.

Поскольку по условию подавления помехи $F(\mathbf{p}_\Pi) = 0$, а по условию формирования кратного нуля как по оси u , так и по оси v (дважды кратного нуля),

$\mathbf{g}(\mathbf{p}_\Pi) = \begin{pmatrix} F_u(u_\Pi, v_\Pi) \\ F_v(u_\Pi, v_\Pi) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, то из (16) следует, что в окрестности направления на источник помехи

$$F(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{p}^T \mathbf{H}(\mathbf{p}_\Pi) \Delta \mathbf{p} + o(\|\Delta \mathbf{p}\|^2),$$

т.е. с точностью до бесконечно малой $o(\|\Delta \mathbf{p}\|^2)$ и множителя $\frac{1}{2}$ диаграмма направленности определяется квадратичной формой

$$Q(\Delta \mathbf{p}) = \Delta \mathbf{p}^T \mathbf{H}(\mathbf{p}_\Pi) \Delta \mathbf{p}. \quad (17)$$

Для того чтобы провал в ДН в окрестности направления на источник помехи имел осесимметричную форму, квадратичная форма (17) не должна зависеть от направления вектора $\Delta \mathbf{p}$. Это возможно только в том случае, когда матрица квадратичной формы $\mathbf{H}(\mathbf{p}_\Pi)$ является скалярной, т.е.

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}_\Pi) = \alpha(\mathbf{p}_\Pi) \mathbf{I},$$

где $\alpha(\mathbf{p}_\Pi)$ – константа, зависящая от направления на источник помехи; \mathbf{I} – единичная матрица размера 2×2 . С учётом того, что $F_{vu}(u, v) = F_{uv}(u, v)$, из определения матрицы Гессе следует, что для этого должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} F_{uu}(u_\Pi, v_\Pi) = F_{vv}(u_\Pi, v_\Pi) \\ F_{uv}(u_\Pi, v_\Pi) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Для того чтобы на основе этих соотношений определить условия, которым должен удовлетворять весовой вектор пространственного фильтра, перепишем (18) в следующем виде:

$$\begin{cases} F_{uu}(u_\Pi, v_\Pi) - F_{vv}(u_\Pi, v_\Pi) = 0 \\ F_{uv}(u_\Pi, v_\Pi) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

и подставим в (19) выражения (7) – (9), определяющие вторые частные производные в направлении на источник помехи. В результате получим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^H (\mathbf{D}_x^2 - \mathbf{D}_y^2) \mathbf{S}_\Pi &= 0 \\ \mathbf{W}^H (\mathbf{D}_x \mathbf{D}_y) \mathbf{S}_\Pi &= 0, \end{aligned}$$

т.е. весовой вектор должен удовлетворять следующим условиям ортогональности:

$$\begin{cases} \mathbf{W} \perp (\mathbf{D}_x^2 - \mathbf{D}_y^2) \mathbf{S}_\Pi \\ \mathbf{W} \perp (\mathbf{D}_x \mathbf{D}_y) \mathbf{S}_\Pi. \end{cases} \quad (20)$$

Объединяя (20) с условием формирования дважды кратного нуля (10) и учитывая требование минимального искажения ДН (11), получим следующее

окончательное описание весового вектора, обеспечивающего формирование в ДН пространственного фильтра осесимметричного провала в направлении на источник помехи:

$$\begin{cases} \mathbf{W} \perp \text{span}(\mathbf{S}_\Pi, \mathbf{D}_x \mathbf{S}_\Pi, \mathbf{D}_y \mathbf{S}_\Pi, (\mathbf{D}_x^2 - \mathbf{D}_y^2) \mathbf{S}_\Pi, (\mathbf{D}_x \mathbf{D}_y) \mathbf{S}_\Pi) \\ \|\mathbf{W} - \mathbf{W}_0\| = \min. \end{cases}$$

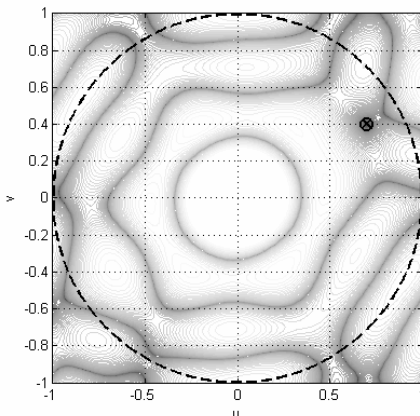
Для вычисления весового вектора, как и ранее, используются выражения (12), (13), причём матрица Ψ размера $N \times 5$ строится из векторов

$$\mathbf{S}_\Pi, \mathbf{D}_x \mathbf{S}_\Pi, \mathbf{D}_y \mathbf{S}_\Pi, (\mathbf{D}_x^2 - \mathbf{D}_y^2) \mathbf{S}_\Pi, (\mathbf{D}_x \mathbf{D}_y) \mathbf{S}_\Pi. \quad (21)$$

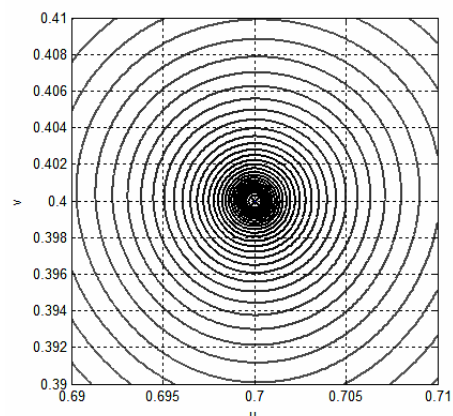
В случае воздействия нескольких помех весовой вектор, обеспечивающий формирование в ДН осесимметричных провалов в направлениях на источники этих помех, определяется аналогично. При этом, если количество помех равно M , то матрица Ψ строится из M совокупностей векторов вида (21), каждая из которых состоит из 5 векторов:

$$\Psi = [\mathbf{S}_{\Pi 1}, \mathbf{D}_x \mathbf{S}_{\Pi 1}, \mathbf{D}_y \mathbf{S}_{\Pi 1}, (\mathbf{D}_x^2 - \mathbf{D}_y^2) \mathbf{S}_{\Pi 1}, (\mathbf{D}_x \mathbf{D}_y) \mathbf{S}_{\Pi 1}, \dots, \mathbf{S}_{\Pi M}, \mathbf{D}_x \mathbf{S}_{\Pi M}, \mathbf{D}_y \mathbf{S}_{\Pi M}, (\mathbf{D}_x^2 - \mathbf{D}_y^2) \mathbf{S}_{\Pi M}, (\mathbf{D}_x \mathbf{D}_y) \mathbf{S}_{\Pi M}]. \quad (22)$$

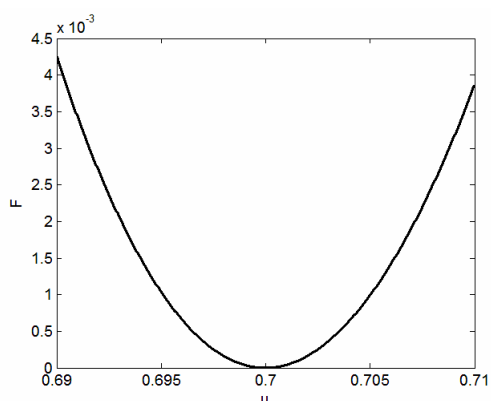
На рис. 8 показана ДН, сформированная с помощью предложенного алгоритма. Видно, что в некоторой окрестности направления на источник помехи линии уровня ДН имеют форму окружностей, т.е. провал в ДН обладает требуемым свойством симметричности. Видно также, что графики сечений ДН по оси u и по оси v практически совпадают.



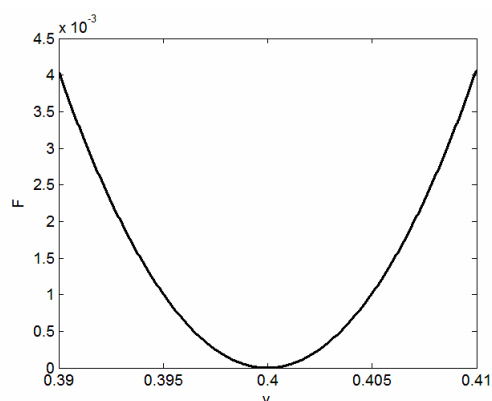
а) Линии уровня ДН.



б) Линии уровня ДН в окрестности направления на помеху.



в) Сечение ДН по оси u .

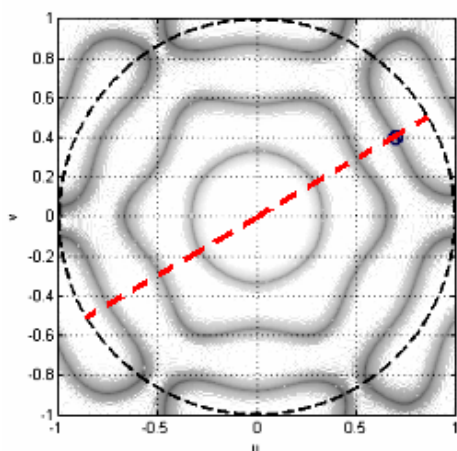


г) Сечение ДН по оси v .

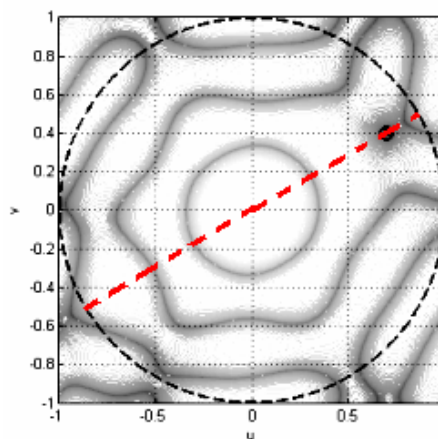
Рис. 8. Синтезированная ДН: кратный параболический нуль.

Следовательно, при использовании ДН данного вида эффективность подавления помехи при взаимных угловых перемещениях источника помехи и АР не будет зависеть от того, в какой плоскости происходит перемещение.

Качественное представление о форме провалов в ДН даёт сечение двумерной ДН плоскостью, проходящей через начало координат и точку с координатами помехи $u_{п}$, $v_{п}$. На рис. 9,а и 9,б красной линией отмечено положение секущей плоскости. На рис. 9,в показано сечение ДН при формировании простого нуля, а на рис. 9,г – кратного параболического. На этих графиках обобщённая угловая координата, отложенная по горизонтальной оси, определяется как $w = \sqrt{u^2 + v^2}$. Значение координаты $w_{п}$, соответствующее направлению на помеху, отмечено красной стрелкой.



а) Линии уровня ДН: простой нуль.



б) Линии уровня ДН: параболический нуль.

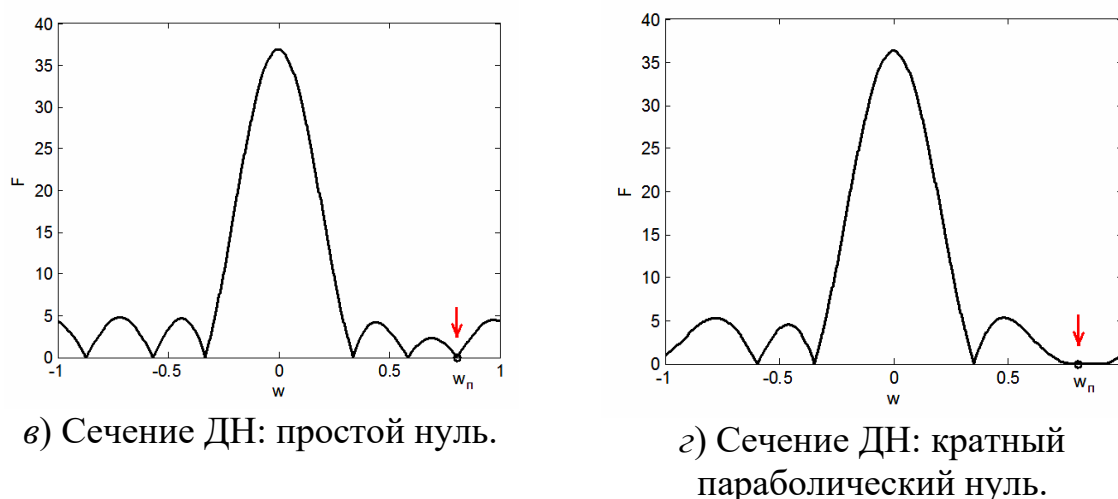


Рис. 9. Синтезированная ДН: простой нуль и кратный параболический нуль.

Для количественной оценки ширины нуля на рис. 10 приведены графики сечения ДН, нормированной на максимум главного лепестка, построенные в логарифмическом масштабе. Видно, что по уровню -60 дБ ширина кратного параболического нуля приблизительно в 30 раз больше, чем ширина простого.

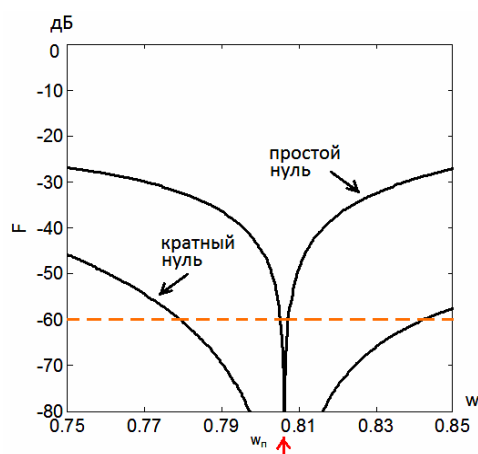


Рис. 10. Сечения ДН: простой нуль и кратный параболический нуль.

2. Алгоритм адаптивного формирования расширенных провалов в диаграмме направленности

Если информация о количестве и угловом положении источников помех, необходимая для вычисления направляющих векторов $\mathbf{S}_{п1}, \dots, \mathbf{S}_{пM}$, отсутствует, то алгоритм вычисления весового вектора пространственного фильтра должен быть адаптивным, т.е. построенным таким образом, чтобы всю необходимую информацию получать из принимаемых колебаний. Возможность адаптивного формирования расширенных провалов в ДН основана на следующем известном свойстве корреляционной матрицы комплексных огибающих $\mathbf{X}(t)$ принимаемых

колебаний $\mathbf{R} = \mathbf{E}\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t)^H\}$: в случае действия M точечных источников помех собственные векторы корреляционной матрицы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_M$, соответствующие M наибольшим собственным значениям, лежат в подпространстве $L_{\Pi} = \text{span}(\mathbf{S}_{\Pi 1}, \dots, \mathbf{S}_{\Pi M})$, образованном направляющими векторами помех, т.е. принадлежат линейной оболочке этих векторов [12, п. 7.3.2].

Поскольку корреляционная матрица по определению эрмитова, то собственные векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_M$ взаимно ортогональны и, следовательно, образуют базис подпространства L_{Π} . Поэтому направляющие векторы помех могут быть представлены как линейные комбинации собственных векторов:

$$\mathbf{S}_{\Pi m} = a_{m1}\mathbf{e}_1 + \dots + a_{mM}\mathbf{e}_M, \quad m = 1, \dots, M, \quad (23)$$

где a_{m1}, \dots, a_{mM} – коэффициенты линейной комбинации для направляющего вектора m -го источника помехи. Аналогичным образом, каждый преобразованный направляющий вектор представляется в виде такой же линейной комбинации преобразованных собственных векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_x \mathbf{S}_{\Pi m} &= a_{m1} \mathbf{D}_x \mathbf{e}_1 + \dots + a_{mM} \mathbf{D}_x \mathbf{e}_M, \quad m = 1, \dots, M \\ \mathbf{D}_y \mathbf{S}_{\Pi m} &= a_{m1} \mathbf{D}_y \mathbf{e}_1 + \dots + a_{mM} \mathbf{D}_y \mathbf{e}_M, \quad m = 1, \dots, M \\ \mathbf{D}_x \mathbf{D}_y \mathbf{S}_{\Pi m} &= a_{m1} \mathbf{D}_x \mathbf{D}_y \mathbf{e}_1 + \dots + a_{mM} \mathbf{D}_x \mathbf{D}_y \mathbf{e}_M, \quad m = 1, \dots, M \\ \mathbf{D}_x^2 \mathbf{S}_{\Pi m} &= a_{m1} \mathbf{D}_x^2 \mathbf{e}_1 + \dots + a_{mM} \mathbf{D}_x^2 \mathbf{e}_M, \quad m = 1, \dots, M \\ \mathbf{D}_y^2 \mathbf{S}_{\Pi m} &= a_{m1} \mathbf{D}_y^2 \mathbf{e}_1 + \dots + a_{mM} \mathbf{D}_y^2 \mathbf{e}_M, \quad m = 1, \dots, M \end{aligned}$$

Следовательно, в выражениях (13), (14), определяющих матрицу проектирования на подпространство L_{Π} , можно заменить матрицу Ψ матрицей Φ , составленной по такому же правилу, но с заменой направляющих векторов помех собственными векторами $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_M$:

$$\begin{aligned} \Phi &= [\mathbf{e}_1, \mathbf{D}_x \mathbf{e}_1, \mathbf{D}_y \mathbf{e}_1, (\mathbf{D}_x^2 - \mathbf{D}_y^2) \mathbf{e}_1, (\mathbf{D}_x \mathbf{D}_y) \mathbf{e}_1, \dots, \\ &\quad \mathbf{e}_M, \mathbf{D}_x \mathbf{e}_M, \mathbf{D}_y \mathbf{e}_M, (\mathbf{D}_x^2 - \mathbf{D}_y^2) \mathbf{e}_M, (\mathbf{D}_x \mathbf{D}_y) \mathbf{e}_M]. \end{aligned} \quad (24)$$

В адаптивном алгоритме вычисления весового вектора пространственного фильтра неизвестная корреляционная матрица R заменяется её оценкой по L отсчётам – выборочной корреляционной матрицей

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{X}(t_l) \mathbf{X}(t_l)^H, \quad (25)$$

где $\mathbf{X}(t_l)$ – l -й отсчёт вектора комплексных огибающих принимаемых колебаний. При этом количество отсчётов L должно быть не меньше, чем число источников помех M , что легко обеспечить на практике, т.к. для получения достаточно точной оценки корреляционной матрицы количество отсчётов должно быть много больше числа приёмных каналов.

Таким образом, адаптивный алгоритм вычисления весового вектора определяется следующими выражениями:

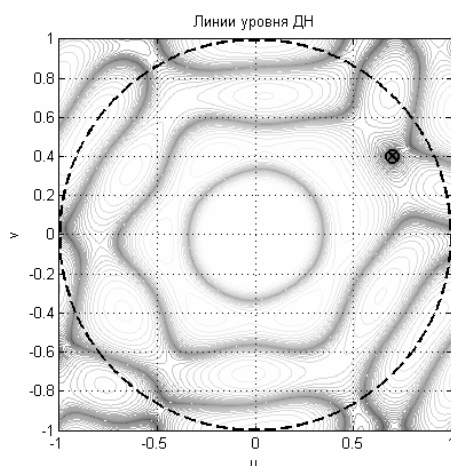
$$\hat{\Phi} = [\hat{\mathbf{e}}_1, \mathbf{D}_x \hat{\mathbf{e}}_1, \mathbf{D}_y \hat{\mathbf{e}}_1, (\mathbf{D}_x^2 - \mathbf{D}_y^2) \hat{\mathbf{e}}_1, (\mathbf{D}_x \mathbf{D}_y) \hat{\mathbf{e}}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_M, \mathbf{D}_x \hat{\mathbf{e}}_M, \mathbf{D}_y \hat{\mathbf{e}}_M, (\mathbf{D}_x^2 - \mathbf{D}_y^2) \hat{\mathbf{e}}_M, (\mathbf{D}_x \mathbf{D}_y) \hat{\mathbf{e}}_M], \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\Phi} (\hat{\Phi}^H \hat{\Phi})^{-1} \hat{\Phi}^H, \quad (27)$$

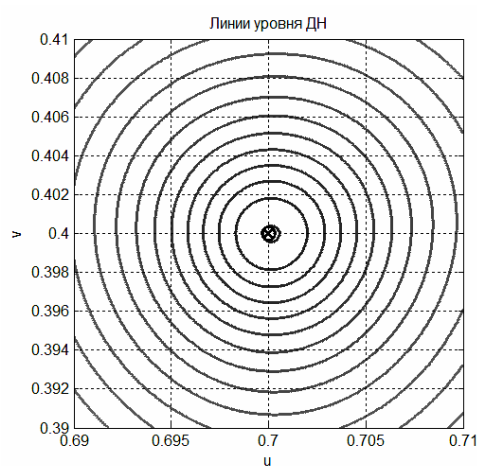
$$\hat{\mathbf{W}} = \mathbf{W}_0 - \hat{\mathbf{P}} \mathbf{W}_0, \quad (28)$$

где $\hat{\mathbf{e}}_m$ – m -й собственный вектор выборочной корреляционной матрицы.

На рис. 11 показана ДН адаптивного пространственного фильтра при вычислении выборочной корреляционной матрицы по 1024 независимым отсчётам. Отношение помеха-шум в одном приёмном канале 40 дБ, обобщённые угловые координаты помехи, как и ранее, равны $u_{\Pi} = 0,7, v_{\Pi} = 0,4$.



а) Линии уровня ДН.



б) Линии уровня ДН в окрестности направления на помеху.

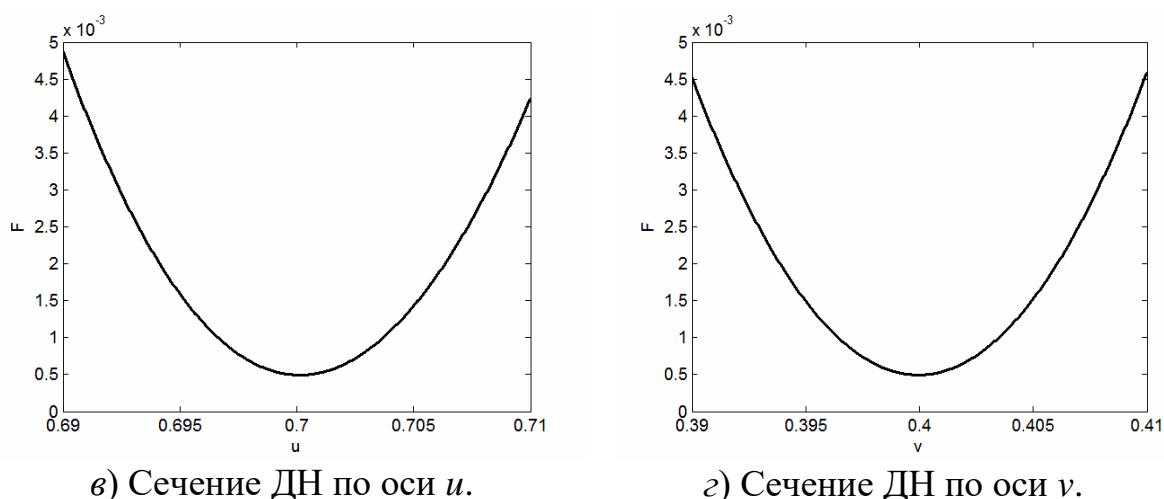


Рис. 11. Адаптивная ДН: кратный параболический нуль.

Видно, что в направлении действия помехи в ДН образуется осесимметричный провал, однако значение ДН не равно нулю из-за статистической погрешности оценки корреляционной матрицы, т.е. полного подавления помехи не происходит.

3. Оценка вычислительной сложности алгоритма

Реализация предложенного адаптивного алгоритма включает в себя выполнение следующих вычислительных процедур:

1. вычисление выборочной корреляционной матрицы в соответствии с (25);
2. вычисление собственных векторов выборочной корреляционной матрицы, соответствующих наибольшим собственным значениям;
3. вычисление весового вектора пространственного фильтра в соответствии с (26) – (28).

Определим количество вычислительных операций – сначала для отдельных процедур, а затем – общее.

3.1. Вычисление выборочной корреляционной матрицы

Выборочная корреляционная матрица $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{X}(t_l) \mathbf{X}(t_l)^H$ эрмитова и с вероятностью 1 положительно определённая. Её элементы определяются выражениями

$$\begin{aligned}\hat{R}_{ik} &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L x_i(t_l) x_k(t_l)^*, \quad i = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, l} \\ \hat{R}_{ik} &= \hat{R}_{ki}^*, \quad i = \overline{1, (N-1)}, \quad k = \overline{(i+1), N}.\end{aligned}\quad (29)$$

С учётом того, что нормирующий множитель $\frac{1}{L}$ вычисляется один раз, для вычислений по формуле (29) требуется 1 операция деления и $(L+1) \frac{N(N+1)}{2}$ операций умножения-сложения^{1*)}.

3.2. Вычисление собственных векторов выборочной корреляционной матрицы

Алгоритм приближённого вычисления собственных векторов и собственных значений выборочной корреляционной матрицы основан на итерационном степенном методе вычисления наибольшего по модулю (доминирующего) собственного значения эрмитовой матрицы и соответствующего ему собственного вектора [10, п. 20.3-5, (b)].

Поскольку выборочная корреляционная матрица эрмитова и положительно определённая, то при воздействии на пространственный фильтр M точечных некоррелированных помех M её наибольших собственных значений («помеховых» собственных значений) положительны и различны, а соответствующие собственные векторы ортогональны. Это позволяет после отыскания собственного вектора \hat{e}_1 , соответствующего максимальному собственному значению $\hat{\lambda}_1$, с помощью такой же итерационной процедуры приближённо найти собственный вектор \hat{e}_2 , соответствующий следующему в порядке убывания собственному значению $\hat{\lambda}_2$. Для этого необходимо последовательность векторов, сходящуюся к \hat{e}_2 , вычислять в подпространстве, ортогональном вектору \hat{e}_1 . Аналогичным образом вычисляются собственные векторы $\hat{e}_3, \dots, \hat{e}_M$, соответствующие остальным «помеховым» собственным значениям $\hat{\lambda}_3, \dots, \hat{\lambda}_M$.

^{1*)} Операция умножения-сложения (умножения с накоплением – multiply-accumulate) является базовой для многих семейств сигнальных процессоров.

Процесс последовательного вычисления собственных векторов прекращается тогда, когда очередное собственное значение $\hat{\lambda}_{M+1}$ становится меньше некоторого порогового уровня $\lambda_{\text{п}}$ [1, п. 2.4.1]. Величина этого порогового уровня задаётся исходя из того, что при действии $M < N$ помех $N - M$ наименьших собственных значений корреляционной матрицы («шумовых» собственных значений) равны дисперсии комплексной, огибающей собственного шума приёмных каналов $\sigma_{\text{ш}}^2$ [1, Приложение 2], которая известна из технических характеристик радиосистемы. Поскольку «шумовые» собственные значения выборочной корреляционной матрицы имеют случайный разброс относительно $\sigma_{\text{ш}}^2$, то пороговое значение $\lambda_{\text{п}}$ задаётся с некоторым запасом в бóльшую сторону, но так, чтобы оно было много меньше последнего «помехового» собственного значения $\hat{\lambda}_M$. Псевдокод данной итерационной процедуры, а также выражения, определяющие количество вычислительных операций, приведены в Приложении 1.

3.3. Вычисление весового вектора

Вычисление адаптивного весового вектора по формулам (26) – (28) включает в себя выполнение следующих матричных операций:

I. вычисление преобразованных собственных векторов $\mathbf{D}_x \hat{\mathbf{e}}_m, \mathbf{D}_y \hat{\mathbf{e}}_m, (\mathbf{D}_x^2 - \mathbf{D}_y^2) \hat{\mathbf{e}}_m, (\mathbf{D}_x \mathbf{D}_y) \hat{\mathbf{e}}_m, m = \overline{1, M}$, входящих в состав матрицы $\hat{\Phi}$;

II. вычисление матрицы проектирования $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\Phi}(\hat{\Phi}^H \hat{\Phi})^{-1} \hat{\Phi}^H$;

III. вычисление вектора $\hat{\mathbf{P}} \mathbf{W}_0$.

Расчёт необходимого количества операций, а также описание алгоритма обращения матрицы $\hat{\Phi}^H \hat{\Phi}$, необходимого для вычисления матрицы проектирования, приведены в Приложении 2.

3.4. Общее количество операций и численный пример

В табл. 1 приведены итоговые выражения для количества операций, полученные в Приложении 1 и Приложении 2 (здесь $N_A = 5M$), а также

количество операций, необходимое для вычисления выборочной корреляционной матрицы.

Таблица 1. Количество операций в адаптивном алгоритме

Операция	Количество операций в процедуре		
	Вычисление выборочной корреляционной матрицы	Вычисление собственных векторов	Вычисление весового вектора
умножение-сложение	$(L + 1) \frac{N(N + 1)}{2}$	$KN(N + 1) + MN \left[\frac{(M + 1)(N + 1)}{4} + 2K(N + 1) + 1 \right]$	$4MN + \frac{N_A(N_A + 1)}{2} N + \frac{N_A(4N_A^2 + 3N_A - 1)}{6} + NN_A \left(N_A + \frac{N + 1}{2} \right) + N^2$
деление	1	$KN + M(KN + 1)$	$\frac{N_A(N_A + 1)}{2}$
извлечение корня	–	$K + M(1 + 2K)$	N_A

В качестве примера в табл. 2 приведено количество вычислительных операций как для отдельных процедур, так и для адаптивного алгоритма в целом, при следующих значениях параметров: количество каналов пространственного фильтра $N = 37$, количество помех $M = 2$, количество отсчётов принимаемых колебаний $L = 1024$, количество итераций при вычислении собственных векторов $K = 10$.

Таблица 2. Численные значения количества вычислительных операций

Операция	Количество операций			
	Вычисление выборочной корреляционной матрицы	Вычисление собственных векторов	Вычисление весового вектора	Полный алгоритм адаптации

умножение- сложение	720575	72483	15145	808203
деление	1	1112	55	1168
извлечение корня	–	52	10	62

Считая, что все операции требуют одинакового времени, получим, что при заданных параметрах общее количество операций равно 809433. Необходимое для их выполнения время зависит от типа процессора, а также от формата и разрядности представления чисел. Например, для сигнального процессора TigerSHARC ADSP-TS101S с тактовой частотой 300 МГц время выполнения одной операции умножения-сложения с фиксированной запятой для комплексных операндов составляет 1,9 нс [15]. В этом случае при последовательном выполнении всех операций общее время вычислений в соответствии с предложенным адаптивным алгоритмом приблизительно равно 1,54 мс, что позволяет использовать его в условиях действия быстро перемещающихся источников помех.

Следует отметить, что, как следует из данных табл. 2, основной вклад в общее количество операций даёт вычисление выборочной корреляционной матрицы. Однако из выражения (29), определяющего её элементы, следует, что для каждого отсчёта произведения $x_i(t_l)x_k(t_l)^*$ для различных значений индексов i и k могут вычисляться одновременно. Следовательно, время, необходимое для вычисления выборочной корреляционной матрицы, может быть сокращено за счёт распараллеливания вычислений.

Заключение.

В статье рассмотрены алгоритмы синтеза пространственного фильтра с плоской антенной решёткой, обеспечивающие формирование в ДН расширенных зон подавления помех. Получены диаграммы направленности пространственного фильтра при различных требованиях к конфигурации

провалов в ДН. Показано, что при использовании алгоритма, формирующего кратный нуль в ДН линейной АР, в случае плоской АР расширение нуля происходит только в одном направлении. Для получения расширенного симметричного провала в ДН плоской АР, имеющего вид параболоида вращения, предложен алгоритм синтеза, включающий ограничения на значения вторых частных производных ДН в направлениях на источники помех, а также соответствующий алгоритм адаптации пространственного фильтра. Результаты моделирования подтверждают возможность адаптивного формирования в ДН пространственного фильтра с плоской АР расширенных симметричных провалов в виде параболоида вращения. Использование предложенного алгоритма позволяет повысить эффективность подавления активных помех в случае быстрого углового перемещающихся их источников вне зависимости от того, в каком направлении происходит перемещение. Оценка вычислительной сложности алгоритма показывает, что при использовании современных сигнальных процессоров он может быть реализован за приемлемое время.

Приложение 1. Количество операций при вычислении собственных векторов

Псевдокод итерационной процедуры вычисления собственных векторов выборочной корреляционной матрицы, соответствующих наибольшему собственным значениям, приведён на рис. П1.1. При записи псевдокода приняты следующие обозначения:

M_{max} – максимальное количество осесимметричных провалов, которые могут быть сформированы в ДН адаптивного пространственного фильтра с N -элементной АР;

\mathbf{e}_0 – начальный вектор итерационной процедуры;

λ_m – m -е (в порядке убывания) собственное значение;

\mathbf{e}_m – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_m ;

K – количество итераций;

\mathbf{E}_m – матрица, составленная из собственных векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$;

$\hat{\mathbf{R}}$ – выборочная корреляционная матрица;

\mathbf{I} – единичная матрица;

$\mathbf{P}_{\mathbf{E}_m}^\perp$ – матрица проектирования на ортогональное дополнение собственных векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{m-1}$;

λ_{Π} – пороговый уровень для собственных значений.

$$M_{max} = \lfloor N/5 \rfloor$$

$\mathbf{e}_0 = (1, 0, \dots, 0)^T$ /* начальное приближение собственных векторов */

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_0$$

for $k = 1$ to K step 1 do

$$\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{e}_1$$

$$\|\mathbf{e}_1\| = \sqrt{\sum_{n=1}^N |(\mathbf{e}_1)_n|^2} \quad /* \text{норма вектора } \mathbf{e}_1 */$$

$$\lambda_1 = \|\mathbf{e}_1\|$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 / \|\mathbf{e}_1\| \quad /* \text{нормировка} */$$

end for k

for $m = 2$ to $(M_{max} + 1)$ step 1 do

$$\mathbf{E}_{m-1} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{m-1})$$

$\mathbf{P}_{\mathbf{E}_{m-1}}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{E}_{m-1}\mathbf{E}_{m-1}^H$ /* матрица проектирования на ортогональное дополнение собственных векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{m-1}$ */

$\mathbf{e}_m = \mathbf{P}_{\mathbf{E}_{m-1}}^\perp \mathbf{e}_0 = (\mathbf{P}_{\mathbf{E}_{m-1}}^\perp)_1$ /* проекция вектора \mathbf{e}_0 (1-й столбец матрицы $\mathbf{P}_{\mathbf{E}_{m-1}}^\perp$) */

$$\|\mathbf{e}_m\| = \sqrt{\sum_{n=1}^N |(\mathbf{e}_m)_n|^2} \quad /* \text{норма вектора } \mathbf{e}_m */$$

$$\mathbf{e}_m = \mathbf{e}_m / \|\mathbf{e}_m\| \quad /* \text{нормировка} */$$

for $k = 1$ to K step 1 do

$$\mathbf{e}_m = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{e}_m$$

$$\|\mathbf{e}_m\| = \sqrt{\sum_{n=1}^N |(\mathbf{e}_m)_n|^2} \quad /* \text{норма вектора } \mathbf{e}_m */$$

$$\lambda_m = \|\mathbf{e}_m\| \quad /* \text{собственное значение} */$$

$\mathbf{e}_m^\perp = \mathbf{P}_{\mathbf{E}_{m-1}}^\perp \mathbf{e}_m$ /* проекция вектора \mathbf{e}_m на ортогональное дополнение собственных векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{m-1}$ */

$$\|\mathbf{e}_m^\perp\| = \sqrt{\sum_{n=1}^N |(\mathbf{e}_m^\perp)_n|^2} \quad /* \text{норма вектора } \mathbf{e}_m^\perp */$$

$$\mathbf{e}_m = \mathbf{e}_m^\perp / \|\mathbf{e}_m^\perp\| \quad /* \text{нормировка} */$$

```

end for k
if  $\lambda_m < \lambda_{\pi}$  /* сравнение с порогом */
return
end if
end for m
    
```

Рис. П1.1. Псевдокод итерационной процедуры вычисления собственных векторов выборочной корреляционной матрицы, соответствующих наибольшему собственным значениям.

В табл. П1.1 приведено количество операций умножения-сложения, деления и извлечения квадратного корня, необходимых для выполнения операторов псевдокода.

Таблица П1.1 – Количество операций в алгоритме вычисления собственных векторов и собственных значений

	оператор	кратность выполнения	количество операций		
			умножения-сложения	деления	извлечения корня
$m = 1$	$\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{e}_1$	K	KN^2	–	–
	$\ \mathbf{e}_1\ = \sqrt{\sum_{n=1}^N (\mathbf{e}_1)_n ^2}$	K	KN	–	K
	$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 / \ \mathbf{e}_1\ $	K	–	KN	–
$m > 1$	$\mathbf{P}_{\mathbf{E}_{m-1}}^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{E}_{m-1}\mathbf{E}_{m-1}^H$	1	$m \frac{N(N+1)}{2}$	–	–
	$\ \mathbf{e}_m\ = \sqrt{\sum_{n=1}^N (\mathbf{e}_m)_n ^2}$	1	N	–	1
	$\mathbf{e}_m = \mathbf{e}_m / \ \mathbf{e}_m\ $	1	–	1	–
	$\mathbf{e}_m = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{e}_m$	K	KN^2	–	–
	$\ \mathbf{e}_m\ = \sqrt{\sum_{n=1}^N (\mathbf{e}_m)_n ^2}$	K	KN	–	K
	$\mathbf{e}_m^{\perp} = \mathbf{P}_{\mathbf{E}_{m-1}}^{\perp} \mathbf{e}_m$	K	KN^2	–	–
	$\ \mathbf{e}_m\ = \sqrt{\sum_{n=1}^N (\mathbf{e}_m)_n ^2}$	K	KN	–	K
$\mathbf{e}_m = \mathbf{e}_m / \ \mathbf{e}_m\ $	K	–	KN	–	

В табл. П1.2 приведены выражения, определяющие общее количество операций.

Таблица П1.2 – Общее количество операций

Операция	Количество операций
умножение-сложение	$KN(N + 1) + MN \left[\frac{(M + 1)(N + 1)}{4} + 2K(N + 1) + 1 \right]$
деление	$KN + M(KN + 1)$
извлечение корня	$K + M(1 + 2K)$

Приложение 2. Количество операций при вычислении весового вектора

П2.1. Вычисление преобразованных собственных векторов

Количество преобразованных собственных векторов определяется количеством помех и равно $4M$. Поскольку матрицы $\mathbf{D}_x, \mathbf{D}_y, (\mathbf{D}_x^2 - \mathbf{D}_y^2), (\mathbf{D}_x \mathbf{D}_y)$ – диагональные, то для вычисления каждого преобразованного вектора требуется N операций умножения. Следовательно, общее количество операций умножения равно $N_{\text{умн}}^I = 4MN$.

П2.2. Вычисление матрицы проектирования

Матрица проектирования $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{\Phi}}(\hat{\mathbf{\Phi}}^H \hat{\mathbf{\Phi}})^{-1} \hat{\mathbf{\Phi}}^H$ вычисляется в следующей последовательности.

1) Вычисляется матрица $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{\Phi}}^H \hat{\mathbf{\Phi}}$ размера $(5M) \times (5M)$.

Для упрощения записи последующих выражений обозначим $5M$ как N_A . Поскольку матрица $\hat{\mathbf{\Phi}}$ имеет размер $N \times N_A$, а матрица \mathbf{A} эрмитова, то для вычисления элементов \mathbf{A} требуется $N_{\text{умн.сл.1}}^{\text{II}} = \frac{N_A(N_A+1)}{2} N$ операций умножения-сложения.

2) Вычисляется обратная матрица $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$ размера $N_A \times N_A$.

Поскольку матрица \mathbf{A} эрмитова и положительно определённая, то обратная матрица также эрмитова и вычисляется по следующему алгоритму [13]:

Шаг 1: матрица \mathbf{A} представляется в виде произведения нижней треугольной матрицы \mathbf{L} и эрмитово-сопряжённой к ней \mathbf{L}^H (разложение Холецкого):

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^H;$$

для этого требуется $\frac{N_A(N_A^2-1)}{6}$ операций умножения-сложения [14, ч. I, гл. 1, § 5], $\frac{N_A(N_A-1)}{2}$ операций деления и N_A операций извлечения корня.

Шаг 2: вычисляется нижняя треугольная матрица \mathbf{B} , обратная нижней треугольной матрице \mathbf{L} ; для этого требуется $\frac{N_A(N_A^2-1)}{3}$ операций умножения-сложения и N_A операций деления.

Шаг 3: вычисляется матрица $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$ как произведение верхней треугольной матрицы \mathbf{B}^H и нижней треугольной матрицы \mathbf{B} :

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^H\mathbf{B};$$

для этого требуется $\frac{N_A(N_A^2+3N_A+2)}{6}$ операций умножения-сложения.

Общее количество операций при вычислении обратной матрицы составляет:

- умножения-сложения: $N_{\text{умн.сл.2}}^{\text{II}} = \frac{N_A(N_A^2-1)}{6} + \frac{N_A(N_A^2-1)}{3} + \frac{N_A(N_A^2+3N_A+2)}{6} = \frac{N_A(4N_A^2+3N_A-1)}{6};$
- деления: $N_{\text{дел.2}}^{\text{II}} = \frac{N_A(N_A-1)}{2} + N_A = \frac{N_A(N_A+1)}{2};$
- извлечения квадратного корня: $N_{\sqrt{\cdot},2}^{\text{II}} = N_A.$

3) вычисляется матрица проектирования $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{\Phi}}\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}^H$; с учётом эрмитовости матрицы $\hat{\mathbf{P}}$ для этого требуется $N_{\text{умн.сл.3}}^{\text{II}} = NN_A(N_A + \frac{N+1}{2})$ операций умножения-сложения.

Таким образом, для вычисления матрицы проектирования всего требуется следующее количество операций:

- умножения-сложения:

$$N_{\text{умн.сл}}^{\text{II}} = N_{\text{умн.сл.1}}^{\text{II}} + N_{\text{умн.сл.2}}^{\text{II}} + N_{\text{умн.сл.3}}^{\text{II}} = \frac{N_A(N_A+1)}{2}N + \frac{N_A(4N_A^2+3N_A-1)}{6} + NN_A\left(N_A + \frac{N+1}{2}\right);$$

- деления: $N_{\text{дел}}^{\text{II}} = N_{\text{дел.2}}^{\text{II}} = \frac{N_A(N_A+1)}{2}$;
- извлечения квадратного корня: $N_{\sqrt{\quad}}^{\text{II}} = N_{\sqrt{\quad}.2}^{\text{II}} = N_A$.

П2.3. Вычисление вектора $\hat{\mathbf{P}}\mathbf{W}_0$

Умножение N -элементного вектора \mathbf{W}_0 на матрицу $\hat{\mathbf{P}}$ размера $N \times N$ требует выполнения N^2 операций умножения-сложения: $N_{\text{умн.сл}}^{\text{III}} = N^2$.

Таким образом, для вычисления весового вектора пространственного фильтра требуется следующее количество операций (здесь $N_A = 5M$):

- умножение-сложение (включая умножение):

$$\begin{aligned} N_{\text{умн.сл}} &= N_{\text{умн}}^{\text{I}} + N_{\text{умн.сл}}^{\text{II}} + N_{\text{умн.сл}}^{\text{III}} \\ &= [4MN] + \left[\frac{N_A(N_A+1)}{2}N + \frac{N_A(4N_A^2+3N_A-1)}{6} + NN_A \left(N_A + \frac{N+1}{2} \right) \right] \\ &\quad + [N^2]; \end{aligned}$$

- деление: $N_{\text{дел}} = N_{\text{дел}}^{\text{II}} = \frac{N_A(N_A+1)}{2}$;

извлечения квадратного корня: $N_{\sqrt{\quad}} = N_{\sqrt{\quad}}^{\text{II}} = N_A$

Финансирование.

Оставить пустым если финансирование отсутствует

Литература

1. Ратынский М.В. *Адаптация и сверхразрешение в антенных решётках*. Москва, Радио и связь. 2003. 200 с.
2. Гершман А.Б., Ермолаев В.Т. Синтез весового распределения адаптивной антенной решётки с широкими провалами в диаграмме направленности. *Известия вузов. Радиофизика*. 1991. Т.34. №6. С.720-724.
3. Qian J., He Z., Xie J., Zhan Y. Null broadening adaptive beamforming based on covariance matrix reconstruction and similarity constraint. *EURASIP Journal on*

Advances in Signal Processing. (2017) 2017:1. <https://doi.org/10.1186/s13634-016-0440-1>

4. Yang X., Li S., Long T., Sarkar T. Adaptive null broadening method in wideband beamforming for rapidly moving interference suppression. *Electronics Letters*. 2018. Vol.54. No.16. P.1003-1005.

5. Mohammadzadeh S., Kukrer O. Robust adaptive beamforming for fast moving interference based on the covariance matrix reconstruction. *IET Signal Processing*. 2019. Vol.13. Iss.4. P.486-493. <https://doi.org/10.1049/iet-spr.2018.5264>

6. Steyskal H. Synthesis of antenna patterns with prescribed nulls. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1982. Vol.30. No.2. P.273-279.

7. Li R., Zhao X., Shi X.W. Derivative constrained robust LCMV beamforming algorithm. *Progress in Electromagnetics Research C*. 2008. Vol.4. P.43-52.

8. Лишак М.Ю. Формирование в диаграмме направленности пространственного фильтра на основе плоской антенной решётки двумерных расширенных зон угловой режекции. *Прогрессивные направления развития радиоэлектронных информационных комплексов и систем: доклады юбилейной научно-технической конференции ЦНИИРЭС 12-13 сентября 1996 г.* Москва, ЦНИИРЭС. 1997. Ч.1. С.134-139.

9. Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч. *Теория и анализ фазированных антенных решёток*. Москва, Мир. 1974. 456 с.

10. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике (для научных работников и инженеров)*. 4-е изд. Москва, Наука. 1978. 832 с.

11. Базара М., Шетти К. *Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы*. Москва, Мир. 1982. 583 с.

12. Johnson D.H., Dudgeon D.E. *Array Signal Processing: Concepts and Techniques*. Englewood Cliffs, NJ, PTR Prentice Hall. 1993. 552 p.

13. Krishnamoorthy A., Menon D. Matrix Inversion Using Cholesky Decomposition [электронный ресурс]. Last revised 17 Oct 2013. URL: <https://arxiv.org/abs/1111.4144v2> (дата обращения: 29.10.21)

14. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
15. TigerSHARC Embedded Processor ADSP-TS101S [электронный ресурс]. Analog Devices. URL: <https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/adsp-ts101s.pdf> (дата обращения: 10.11.21)

Для цитирования:

Лишак М.Ю. Формирование расширенных провалов в диаграмме направленности адаптивного пространственного фильтра с плоской антенной решёткой. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. № 10. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.10.12>