

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.10.1>

УДК: 621.376.9

## МОДЕЛЬ СПЕКТРАЛЬНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ СИГНАЛОВ С OFDM МОДУЛЯЦИЕЙ И ЦИКЛИЧЕСКИМ ПРЕФИКСОМ

О.А. Гущина, Т.Я. Шевгунов, Е.Н. Ефимов, Ж.А. Вавилова

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4

Статья поступила в редакцию 2 августа 2022 г.

**Аннотация.** В статье представлен подход к построению моделей сигналов со сложными видами модуляции в рамках циклостационарного подхода и предложена процедура получения конечных аналитических выражений для их спектральных корреляционных функций (СКФ), являющихся функциями двух аргументов: частоты и циклической частоты и описывающих вероятностные свойства исследуемых сигналов при их представлении в виде реализаций циклостационарных случайных процессов (ЦССП) второго порядка. Предложенный подход к получению нормальной и сопряжённой СКФ основан на модифицированном методе формирующего оператора, позволяющим его эффективно использовать в анализе ЦССП. Такой метод предполагает, что модели многих используемых на практике ЦССП могут быть построены в форме последовательной цепочки преобразований одного или нескольких независимых ЦССП с известными характеристиками посредством сравнительно простых операций над сигналами. При этом операциям над сигналами, являющимися реализациями ЦССП, соответствуют преобразования СКФ, формулы которых представлены в работе. В статье получены точные аналитические выражения для нормальной и сопряжённой СКФ сигналов OFDM с модуляцией поднесущих

гармоник по методам BPSK и QPSK при наличии циклического префикса (ЦП). На примере OFDM сигнала с ЦП и QPSK модуляцией поднесущих проведено количественное сравнение аналитической СКФ, построенной по модельной формуле, и её оценки, полученной путём численного моделирования при использовании метода оценивания на основе смешанного двумерного быстрого преобразования Фурье. Показано, что при увеличении длительности анализируемой выборки оценка СКФ сходится в среднеквадратичном смысле к построенной аналитической модели.

**Ключевые слова:** циклостационарные случайные процессы, спектральная корреляционная функция, цифровая модуляция, OFDM, циклический префикс, формирующий оператор.

**Финансирование:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00497.

**Автор для переписки:** Шевгунов Тимофей Яковлевич, [shevgunov@gmail.com](mailto:shevgunov@gmail.com)

## Введение

Беспроводная связь является неотъемлемой составляющей техносферы современного мира. Количество стандартов, используемых в беспроводных цифровых системах, постоянно увеличивается; одновременно с этим расширяется и перечень предъявляемых в них требований к качеству и условиям передачи информации. От современных систем часто ожидается бесперебойная работа в условиях многолучевого распространения, в присутствии помех, создаваемых другими устройствами, работающими в перекрывающихся полосах частот, обеспечение эффективного использования ограниченных ресурсов, таких как полоса частот и максимальная допустимая мощность передаваемых сигналов.

В качестве одного из принципов модуляции, лежащего в основе организации физического уровня многих современных беспроводных стандартов передачи данных часто используется OFDM [1] (Orthogonal

frequency-division multiplexing) – мультиплексирование с ортогональным частотным разделением каналов.

OFDM представляет собой цифровую схему модуляции, которая предполагает передачу сообщений посредством одновременной передачи ортогональных сигналов на нескольких близко расположенных поднесущих, каждая из которых модулируется по типичной схеме цифровой модуляции, например, BPSK, QPSK, QAM- $N$  [2], на меньшей символьной скорости, сохраняя общую скорость передачи данных, как и у простых схем модуляции с единственной несущей, занимающих ту же полосу частотного спектра. Основными преимуществами схемы модуляции OFDM является высокая помехоустойчивость и способность противостоять частотно-избирательным затуханиям, вызванным многолучевым характером распространения, без использования сложных фильтров-эквалайзеров. Низкая символьная скорость делает возможным использование защитного интервала (циклического префикса [3]) между символами, что позволяет справляться с временным рассеянием и устранять межсимвольную интерференцию.

В силу того, что OFDM сигналы объединяют в себе структурную периодичность и информационную случайность, они могут быть успешно описаны посредством моделей, представляющих их реализациями подходящих циклостационарных случайных процессов (ЦССП) [4]. Для таких процессов можно воспользоваться вероятностными моделями описания свойств, используемыми в рамках циклостационарного подхода. Одной из характеристик описания свойств ЦССП является спектральная корреляционная функция (СКФ) [5], представляющая собой совокупность компонент  $S_x^{(\alpha)}(f)$  двух переменных: частоты  $f$  и циклической частоты  $\alpha$ . При этом множество циклических частот  $A_2$  (альфа), при которых  $\exists f, S_x^{(\alpha)}(f) \neq 0, \alpha \in A_2$ , оказывается не более чем счётным. Необходимо заметить, что СКФ однозначно связана покомпонентным преобразованием Фурье с циклической корреляционной функцией (ЦКФ):

$$S_x^{(\alpha)}(f) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}_x^{(\alpha)}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau, \quad (1)$$

где компонента ЦКФ на циклической частоте  $\alpha \in A_2$  определяется посредством двойного усреднения:

$$\mathcal{R}_x^{(\omega)}(f) = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{B} \int_{-B/2}^{+B/2} \mathbb{E} \left\{ x(t + \tau/2) x^{(*)}(t - \tau/2) \right\} \exp(-j2\pi\alpha t) dt, \quad (2)$$

где  $\mathbb{E}\{\bullet\}$  обозначает вероятностное усреднение по ансамблю, а предельное усреднение по времени выражено непосредственно. Символ  $(*)$  обозначает опциональное комплексное сопряжение: так если сопряжение выполняется, то выражения (1) и (2) обеспечивают получение обычных, или нормальных, ЦКФ и СКФ. Если сопряжение не выполняется, другими словами, символ  $(*)$  опущен, то будут получены сопряжённые ЦКФ и СКФ. Более подробно этот вопрос раскрыт в главе 1 монографии [6].

Ценность СКФ состоит в том, что она позволяет выразить основные циклические свойства исследуемого ЦССП более компактной форме по сравнению с ЦКФ и изобразить их в форме функций в гомогенной двухчастотной области. В свою очередь, визуальный или инструментальный анализ оценок СКФ, полученных в результате цифровой обработки реализаций сигналов, может быть применён для определения циклических частот, на которых она отлична от нуля, что позволяет решить ряд задач, связанных с повышением качества обнаружения, точности оценки параметров, классификацией принимаемых сигналов, а также выделением полезных сигналов на фоне шума и помех [7].

Получение формальных аналитических выражений для характеристик ЦССП различных классов представляет собой отдельную задачу, систематическое решение которой продолжается более 35 лет. В числе пионерских работ в этом направлении следует отметить работу [8], в которой представлены аналитические модели СКФ для сигналов с аналоговой модуляцией, и работу [9], в которой получены явные формулы записи СКФ сигналов с такими типами цифровой модуляции как BPSK, QPSK, SQPSK и MSK. В работе [10] приведена общая формула для оценки СКФ ЦССП и представлены графики оценок СКФ OFDM сигнала, полученные путем

использования метод численного компьютерного моделирования на основе стандартного метода генерации длинных реализаций OFDM сигналов. Однако в работе [10] отсутствуют точные аналитические выражения, определяющие СКФ OFDM сигналов, которые бы учитывали практические параметры OFDM сигналов, например, тип модуляции поднесущих и циклический префикс.

В настоящей работе представлен подход к выводу аналитического выражения спектральной корреляционной функции (СКФ) на основе метода формирующего оператора [11] и свойств, описывающих преобразования СКФ при трансформациях описываемых ими ЦССП.

## 1. Системная модель формирования OFDM сигналов

Рассмотрим процесс формирования сигнала с OFDM модуляцией. В качестве простых примеров в настоящем разделе ограничимся следующими видами модуляции поднесущих: двоичная фазовая манипуляция (binary phase-shift keying, BPSK), квадратурная фазовая манипуляция (quadrature phase shift keying, QPSK).

Исходная битовая последовательность данных может быть представлена последовательностью  $\{a_n\}$ , сформированной из дискретных случайных величин, принимающих равновероятно значения из множества  $\{-1, 1\}$  для BPSK модуляции,  $\{-1-j, -1+j, 1+j, 1-j\}$  для QPSK модуляции.

При формировании OFDM сигнала от последовательного потока данных переходят к нескольким параллельным. Количество параллельных потоков соответствует количеству поднесущих  $N_{sc}$  OFDM сигнала. Каждый  $m$ -й поток будет представлять собой последовательность дискретных случайных величин  $b_m[n]$ , взятых из исходной последовательности  $\{a_n\}$ , так что  $b_m[n] = a[nN_{sc} + m]$ . Далее для  $m$ -го потока формируется сигнал  $x_m(t)$  в виде последовательности прямоугольных импульсов со случайными амплитудами, который может быть формально представлен в следующем виде:

$$x_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A b_m[n] \text{rect}\left(\frac{t - nT_{sym}}{T_{sym}}\right), \quad m = 0, \dots, N_{sc} - 1, \quad (3)$$

где  $A$  – амплитуда,  $T_{sym}$  – длительность символа OFDM сигнала, соответствующая длительности прямоугольных импульсов, образующих каждый символ сигнала  $x_m(t)$ .

Модель результирующего OFDM сигнала  $x(t)$  можно представить в виде суперпозиции сигналов  $x_m(t)$ , умноженных на комплексные экспоненты с частотами, кратными  $F_{sym} = 1/T_{sym}$ :

$$x(t) = \sum_{m=0}^{N_{sc}-1} x_m(t) \exp(j2\pi m F_{sym} t). \quad (4)$$

Здесь необходимо отметить, что кратность частот комплексных экспонент величине обратной длительности символа  $1/T_{sym}$  обеспечивает ортогональность сигналов  $x_m(t)\exp(j2\pi F_{sym}t)$ , формирующих OFDM сигнал [12].

Для предотвращения межсимвольной интерференции в начало каждого OFDM символа традиционно вводится циклический префикс (ЦП) [3]. Циклический префикс представляет собой размещаемую перед началом символа копию конечного участка OFDM символа длительностью  $T_{cp} = \kappa T_{sym}$ , где  $\kappa$  – доля, которую составляет длительность циклического префикса от длительности символа. Типичные значения  $\kappa$  составляют от 0 до 0,25. Длительность OFDM символа с циклическим префиксом определяется как  $T_{ofdm} = T_{sym} + T_{cp}$ .

При этом фактически получается новый символ OFDM – символ с циклическим префиксом, что проиллюстрировано на рис. 1. ЦП выполняет роль защитного интервала, позволяющего сохранить ортогональность сигналов поднесущих на этапе детектирования OFDM сигнала.

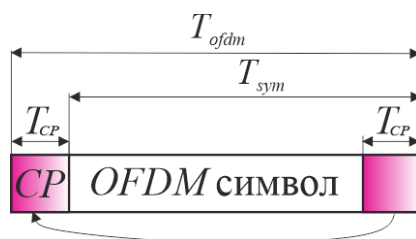


Рис. 1. Циклический префикс

Формирующая OFDM сигнал периодическая последовательность прямоугольных импульсов с учётом фазового множителя, который появляется в

результате расширения символа за счёт циклического префикса, имеет следующий вид:

$$x_{mCP}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( Ab_m[n] \text{rect} \left( \frac{t - nT_{ofdm}}{T_{ofdm}} \right) \exp(j2\pi m F_{sym} (-(n+1)T_{cp})) \right). \quad (5)$$

OFDM сигнал с циклическим префиксом  $x_{CP}(t)$  формируется путем суммирования сигналов  $x_{mCP}(t)$ , умноженных на комплексные экспоненты с частотами, кратными  $F_{sym} = 1/T_{sym}$ :

$$x_{CP}(t) = \sum_{m=0}^{N_{sc}-1} x_{mCP}(t) \exp(j2\pi m F_{sym} t). \quad (6)$$

Можно заметить, что модель сигнала без ЦП  $x(t)$  (4) является частным случаем модели сигнала с ЦП  $x_{CP}(t)$  (6), соответствующей выбору доли циклического префикса  $\kappa = 0$ . Поэтому для получения спектральной корреляционной функции OFDM сигнала остановимся на общем случае, т.е. OFDM сигнале с циклическим префиксом  $x_{CP}(t)$  (6).

## 2. Спектральная корреляционная функция OFDM сигналов

Каждый парциальный сигнал цифровой модуляции  $x_m(t)$ , заданный в рамках модели (3), представляет собой периодическую последовательность прямоугольных импульсов со случайными амплитудами и относится к классу циклостационарных случайных процессов (ЦССП) второго порядка [9]. Множество циклических частот  $A_2$  (альфа) такого ЦССП состоит из частот кратных  $1/T_{sym}$  [13]:

$$A_2 = \left\{ \alpha_k \mid \alpha_k = \frac{k}{T_{sym}}, k \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (7)$$

Результирующий OFDM сигнал (6) представляет собой суперпозицию сигналов с цифровой модуляцией, взвешенных комплексными экспонентами, т.е. OFDM сигнал является ЦССП второго порядка с циклическими частотами  $\alpha$ , кратными  $F_{ofdm} = 1/T_{ofdm}$  и принадлежащими множеству:

$$\tilde{A}_2 = \left\{ \alpha_k \mid \alpha_k = \frac{k}{T_{ofdm}}, k \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (8)$$

Для задания формального представления компонент нормальной и сопряженной спектральных корреляционных функций для OFDM сигналов, воспользуемся следующими свойствами ЦССП. Обозначим для ЦССП  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $q(t)$  компоненты нормальных СКФ через  $\mathcal{S}_y^{(\alpha)}(f)$ ,  $\mathcal{S}_z^{(\alpha)}(f)$ ,  $\mathcal{S}_q^{(\alpha)}(f)$  соответственно, а компоненты сопряженных СКФ через  $\bar{\mathcal{S}}_y^{(\alpha)}(f)$ ,  $\bar{\mathcal{S}}_z^{(\alpha)}(f)$ ,  $\bar{\mathcal{S}}_q^{(\alpha)}(f)$  соответственно. При выполнении преобразований ЦССП будут справедливы следующие изменения его СКФ:

1) умножение ЦССП на комплексную экспоненту приводит к сдвигам по частоте компонент СКФ:

$$\begin{aligned} z(t) &= y(t) \exp(j2\pi Ft), \\ \mathcal{S}_z^{(\alpha)}(f) &= \mathcal{S}_y^{(\alpha)}(f - F), \\ \bar{\mathcal{S}}_z^{(\alpha)}(f) &= \bar{\mathcal{S}}_y^{(\alpha-2F)}(f); \end{aligned} \quad (9)$$

2) при суммировании статистически независимых ЦССП с одинаковыми множествами циклических частот  $A_2$  компоненты их СКФ складываются:

$$\begin{aligned} q(t) &= y(t) + z(t), \\ \mathcal{S}_q^{(\alpha)}(f) &= \mathcal{S}_y^{(\alpha)}(f) + \mathcal{S}_z^{(\alpha)}(f), \\ \bar{\mathcal{S}}_q^{(\alpha)}(f) &= \bar{\mathcal{S}}_y^{(\alpha)}(f) + \bar{\mathcal{S}}_z^{(\alpha)}(f); \end{aligned} \quad (10)$$

3) трансляция, или сдвиг во времени, ЦССП приводит к появлению фазового множителя у компонент СКФ:

$$\begin{aligned} z(t) &= y(t - \theta), \\ \mathcal{S}_z^{(\alpha)}(f) &= \mathcal{S}_y^{(\alpha)}(f) \exp(-j2\pi\alpha\theta), \\ \bar{\mathcal{S}}_z^{(\alpha)}(f) &= \bar{\mathcal{S}}_y^{(\alpha)}(f) \exp(-j2\pi\alpha\theta); \end{aligned} \quad (11)$$

4) умножение ЦССП на комплексный скаляр позволяет записать:

$$\begin{aligned} z(t) &= \lambda y(t), \\ \mathcal{S}_z^{(\alpha)}(f) &= |\lambda|^2 \mathcal{S}_y^{(\alpha)}(f), \\ \bar{\mathcal{S}}_z^{(\alpha)}(f) &= \lambda^2 \bar{\mathcal{S}}_y^{(\alpha)}(f). \end{aligned} \quad (12)$$

Перечисленные выше свойства позволяют получить формальную связь между компонентами нормальных и сопряженных СКФ сигналов  $x_{CP}(t)$  (6) и  $x_{mCP}(t)$  (5):



$$\begin{aligned} \mathcal{S}_x^{(\omega)}(f) &= \sum_{m=0}^{N_{sc}-1} \mathcal{S}_{x_m}^{(\omega)}(f - mF_{sym}), \\ \bar{\mathcal{S}}_x^{(\omega)}(f) &= \sum_{m=0}^{N_{sc}-1} \bar{\mathcal{S}}_{x_m}^{(\omega-2mF_{sym})}(f). \end{aligned} \quad (13)$$

В работе [13] получено формальное выражение для компонент нормальной спектральной корреляционной функции для ЦССП, соответствующего сигналу  $m$ -го канала (5) OFDM с BPSK модуляцией  $x_{mBPSK}(t)$ :

$$\mathcal{S}_{BPSK_m}^{(k/T_{ofdm})}(f) = AT_{ofdm} \operatorname{sinc} \left[ \pi \left( f - \frac{k}{2T_{ofdm}} \right) T_{ofdm} \right] \operatorname{sinc} \left[ \pi \left( f + \frac{k}{2T_{ofdm}} \right) T_{ofdm} \right]. \quad (14)$$

Компоненты сопряжённой СКФ для ЦССП  $m$ -го потока (5) OFDM с BPSK модуляцией  $\bar{\mathcal{S}}_{BPSK_m}^{(k/T_{ofdm})}(f)$  совпадают с компонентами нормальной СКФ  $\mathcal{S}_{BPSK_m}^{(k/T_{ofdm})}(f)$  [6]:

$$\bar{\mathcal{S}}_{BPSK_m}^{(k/T_{ofdm})}(f) = \mathcal{S}_{BPSK_m}^{(k/T_{ofdm})}(f). \quad (15)$$

Тогда компоненты нормальной  $\mathcal{S}_{BPSK}^{(k/T_{ofdm})}$  и сопряженной  $\bar{\mathcal{S}}_{BPSK}^{(k/T_{ofdm})}$  СКФ OFDM сигнала  $x_{BPSK}(t)$  (6) с внутренней BPSK модуляцией определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{BPSK}^{(k/T_{ofdm})}(f) &= \sum_{m=0}^{N_{sc}-1} \mathcal{S}_{BPSK_m}^{(k/T_{ofdm})} \left( f - \frac{m}{T_{sym}} \right), \\ \bar{\mathcal{S}}_{BPSK}^{(k/T_{ofdm})}(f) &= \sum_{m=0}^{N_{sc}-1} \mathcal{S}_{BPSK_m}^{(k/T_{ofdm}-2m/T_{sym})}(f). \end{aligned} \quad (16)$$

Компоненты нормальной спектральной корреляционной функции для ЦССП сигнала  $m$ -го потока с QPSK модуляцией  $x_{mQPSK}(t)$  (3) могут быть определены следующим образом [9, 14]:

$$\mathcal{S}_{QPSK_m}^{(k/T_{ofdm})}(f) = 2AT_{ofdm} \operatorname{sinc} \left[ \pi \left( f - \frac{k}{2T_{ofdm}} \right) T_{ofdm} \right] \operatorname{sinc} \left[ \pi \left( f + \frac{k}{2T_{ofdm}} \right) T_{ofdm} \right], \quad (17)$$

и фактически они совпадают с компонентами нормальной СКФ сигнала с BPSK модуляцией. Сопряжённая СКФ  $\bar{\mathcal{S}}_{QPSK_m}^{(k/T_{ofdm})}(f)$  равна нулю при любых значениях индекса  $k$ , что показано, например, в [6].

Компоненты нормальной СКФ OFDM сигнала с QPSK модуляцией поднесущих  $x_{QPSK}(t)$  (6) могут быть представлены как:

$$S_{QPSK}^{(k/T_{ofdm})}(f) = \sum_{m=0}^{N_{sc}-1} S_{QPSK_m}^{(k/T_{ofdm})} \left( f - \frac{m}{T_{sym}} \right). \quad (18)$$

Компоненты сопряженной СКФ OFDM сигнала с внутренней QPSK модуляцией  $x_{QPSK}(t)$  (6) равны нулю для любых значений циклической частоты  $\alpha$ .

На рисунках 2 и 3 представлены несколько первых компонент СКФ OFDM сигналов с QPSK модуляцией при  $N_{sc} = 4$ ,  $\kappa = 0$  и  $\kappa = 0.25$  соответственно.

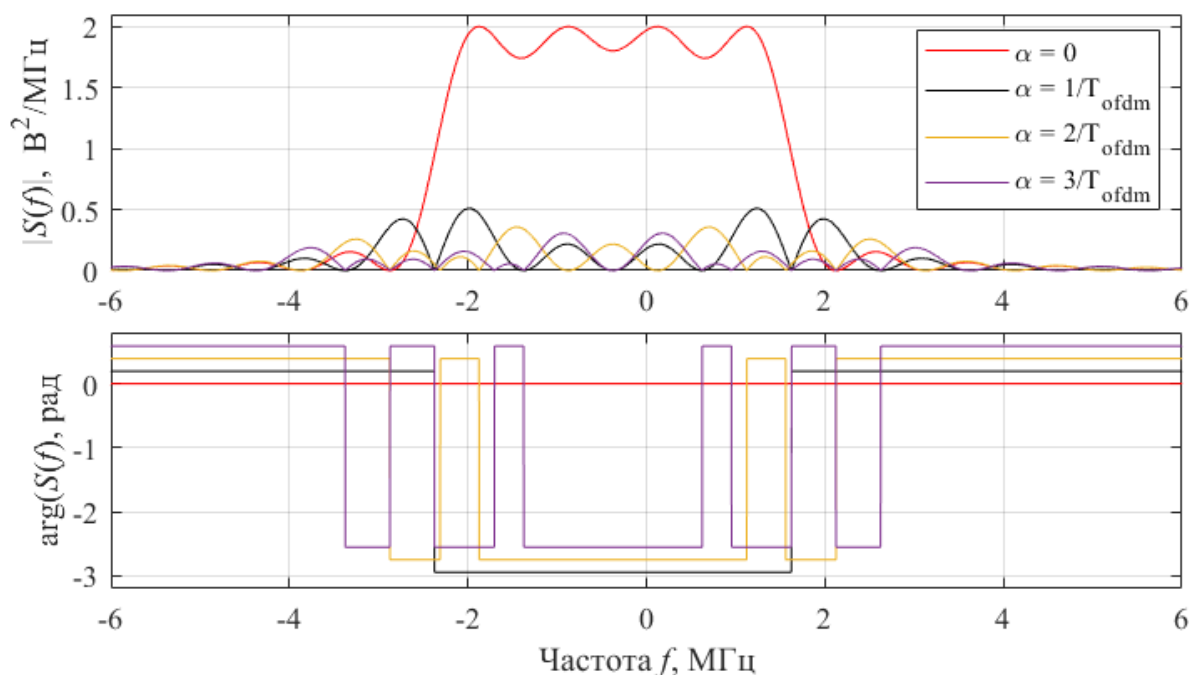


Рис. 2. Модуль и аргумент СКФ OFDM сигнала с QPSK модуляцией при  $N_{sc} = 4$  и  $\kappa = 0$

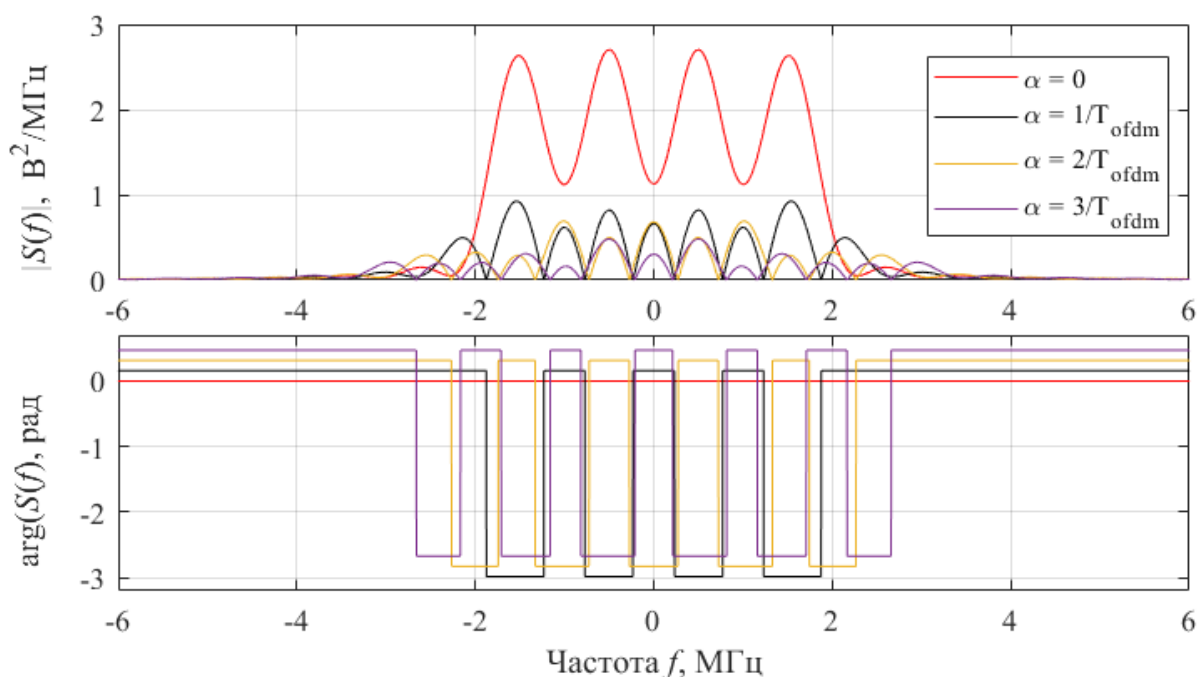


Рис. 3. Модуль и аргумент СКФ OFDM сигнала с QPSK модуляцией при  $N_{sc} = 4$  и  $\kappa = 0,25$

Для отличных от нуля циклических частот ( $\alpha \neq 0$ ) модуль СКФ (18) имеет лепестковую структуру. В целом можно отметить следующую тенденцию: компоненты СКФ уменьшаются по абсолютному значению с увеличением модуля циклической частоты  $\alpha$ , для которой они определяются.

### 3. Результаты моделирования

Для проверки достоверности построенной модели может быть проведено сравнение теоретических СКФ и результатов оценивания по типичным реализациям сигналов. СКФ ЦССП второго порядка может быть оценена по его дискретным отсчетам, например, с помощью простого и эффективного алгоритмом оценки СКФ на основе двумерного быстрого преобразования Фурье [15].

Для генерации дискретных отсчетов OFDM сигнала воспользуемся компьютерным экспериментом, проводимым на ПЭВМ, оснащенной процессором Intel® Core™ i7-8750H 2,2 ГГц с оперативной памятью объемом 16 Гб. Для численного моделирования установим следующие параметры (6): вид модуляции поднесущих: QPSK, амплитуда  $A = 1$  В, длительность OFDM символа

$T_{ofdm} = 1,25$  мкс, период дискретизации  $T_s = 0,0625$  мкс, доля циклического префикса  $\kappa = 0,25$ , количество поднесущих  $N_{sc} = 4$ , количество анализируемых отсчетов  $N = 10^4$ , время наблюдения  $T = NT_s = 625$  мкс.

На рис. 4 и 5 представлены кривые модуля и аргумента двух первых компонент нормальной СКФ OFDM сигнала: полученные по теоретической модели (18), обозначены как «модель», и экспериментальные, рассчитанные с помощью алгоритма оценки СКФ на основе двумерного быстрого преобразования Фурье, обозначены как «оценка».

На рис. 4 представлена нулевая компонента СКФ при  $\alpha = 0$ . Она представляет собой спектральную плотность мощности случайного процесса. Теоретическая и экспериментальная кривые модуля СКФ практически совпадают.

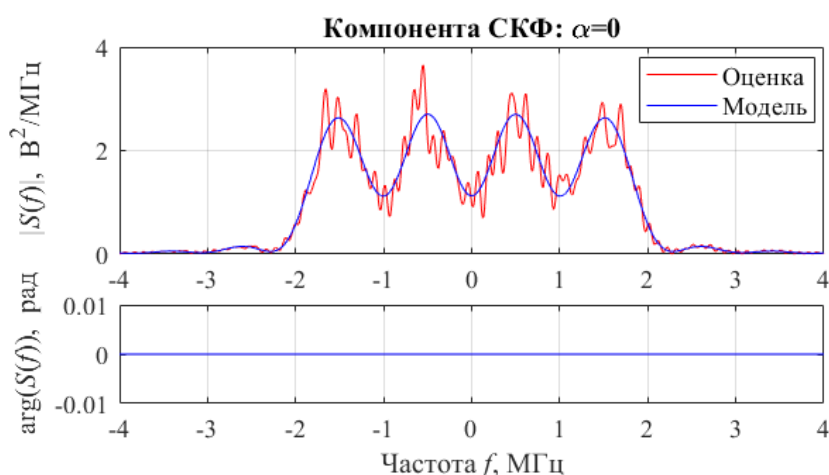


Рис. 4. Модуль и аргумент компоненты СКФ OFDM сигнала на нулевой циклической частоте

На рис. 5 представлена первая циклическая компонента СКФ, компонента на циклической частоте при  $\alpha = 1/T_{ofdm}$ . В отличие от нулевой компоненты СКФ аргумент первой компоненты СКФ имеет отличные от нуля значения. Небольшие различия теоретических и экспериментальных кривых СКФ объясняется конечной длительностью интервала наблюдения, выбранного при моделировании, и характерными артефактами использованного алгоритма оценки, включающими спектральные утечки по циклической и обычной частоте.

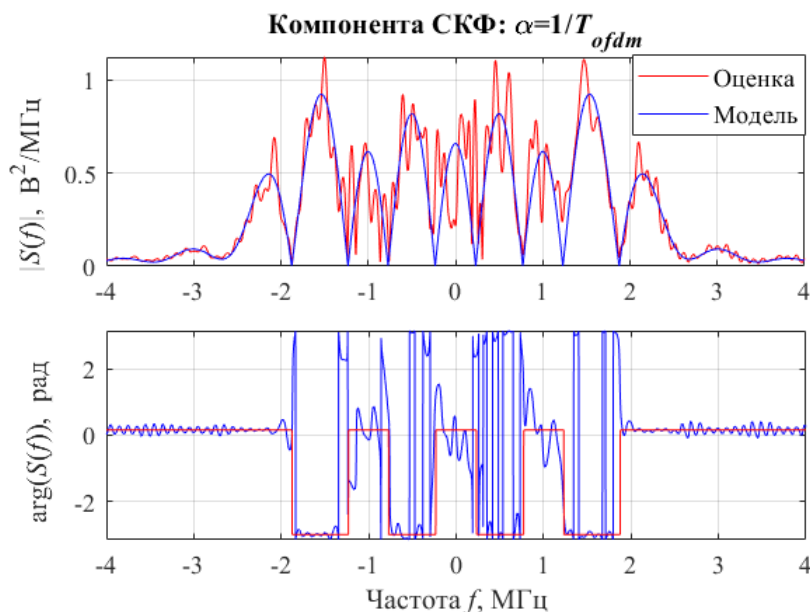


Рис. 5. Модуль и аргумент компоненты СКФ OFDM сигнала на циклической частоте  $\alpha = 1/T_{ofdm}$

Для численного сравнения оценки СКФ OFDM сигнала, полученной с помощью алгоритма на основе двумерного быстрого преобразования Фурье [16], и теоретической модели СКФ (18), представленной в настоящей работе, была рассчитана относительная среднеквадратическая ошибка (ОСКО) между двумя функциями для компоненты СКФ на циклической частоте  $\alpha$  по следующей формуле:

$$\varepsilon^2 = \frac{\sum_{n=1}^N \left( \left| \mathcal{S}^{(\alpha)}[n] - \hat{\mathcal{S}}^{(\alpha)}[n] \right| \right)^2}{\sum_{n=1}^N \left| \mathcal{S}^{(\alpha)}[n] \right|^2}, \quad (19)$$

где  $\mathcal{S}^{(\alpha)}[n]$  и  $\hat{\mathcal{S}}^{(\alpha)}[n]$  – соответственно значения отсчетов модели СКФ и ее оценки, на циклической частоте  $\alpha$ , рассчитанные в одних и тех же узлах частотной сетки  $f_n = n/(NT_s)$  в связи с тем, что элемент разрешения по частоте  $f$  определяется временем наблюдения OFDM сигнала  $T = NT_s$ .

На рис. 6 представлен график зависимости ОСКО от количества отсчетов OFDM сигнала, используемых для оценки третьей компоненты СКФ (при  $\alpha = 3/T_{ofdm}$ ).

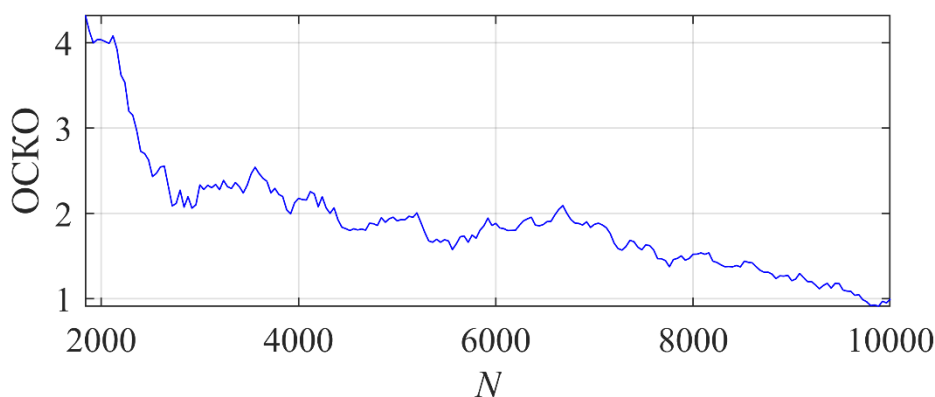


Рис. 6. ОСКО определения третьей компоненты СКФ

Из характера зависимости, представленной на графике на рис. 6, можно сделать вывод, что с увеличением количества отсчетов OFDM сигнала, используемых для оценки СКФ, ОСКО уменьшается, и модуль оценки третьей компоненты СКФ стремится к модулю компоненты СКФ, рассчитанной по предложенной модели СКФ (18).

## Заключение

В настоящей работе представлен синтез модели описания циклических свойств OFDM сигнала на основе метода формирующего оператора, описывающего моделируемый сигнал с помощью линейной поликомпонентной модели, представляющей его в виде суперпозиции сигналов отдельных поднесущих независимых в вероятностном смысле. На основе предложенного подхода было получено аналитическое описание в форме двухчастотной характеристики циклостационарной модели – спектральной корреляционной функции OFDM сигнала с BPSK и QPSK модуляцией поднесущих. С помощью численного моделирования на примере OFDM сигнала с QPSK модуляцией было проведено сравнение компонент СКФ, построенных по формулам теоретической модели OFDM сигнала, и их оценок, полученных с помощью алгоритма цифровой обработки, основанного на методе смешанного двумерного быстрого преобразования Фурье. Сравнение теоретической модели и найденных оценок, количественное измеренное как ОСКО двух функций, показало, что с увеличением количества отсчётов, используемых для оценки СКФ, ОСКО

уменьшается, а оценка СКФ стремится к предложенной теоретической модели СКФ OFDM сигналов.

Априорная информация о составе множества циклических частот, характеризующих ЦССП второго порядка, открывает возможность обнаружения OFDM сигналов в присутствии помех без их приёма и демодуляции. При этом важно заметить, что в общем случае различные типы модуляции поднесущих OFDM сигналов будут формировать различные спектральные корреляционные функции, поэтому полученные в настоящей работе точные аналитические модели СКФ позволят сформировать банк шаблонов для классификации OFDM сигналов по типу внутренней модуляции. Использование СКФ при оценке параметров OFDM сигналов позволит увеличить точность оценки параметров за счет того, что оценка параметров сигналов происходит одновременно по нескольким сечениям спектральной корреляционной функции, а не по одному сечению на нулевой циклической частоте, соответствующему спектру мощности сигнала, которая наиболее подвержена воздействию помех и шумов.

**Финансирование:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00497.

### Литература

1. Hwang T., Yang C., Wu G., Li S., Ye Li G. OFDM and Its Wireless Applications: A Survey. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. 2009. V.58. №4. P.1673-1694. <https://doi.org/10.1109/TVT.2008.2004555>
2. Sclar B. *Digital Communications Fundamentals and Applications*. New Jersey, Prentice Hall. 2019. 1011 p.
3. Сердюков П.Н., Григорьев А.С., Гугалов К.Г., Пучков Г.Ю. Циклический префикс при передаче OFDM-сигналов. *Электронные информационные системы*. 2014. №1. С.59-68.
4. Gardner W.A., Napolitano A., Paura L. Cyclostationarity: Half a century of research. *Signal Processing*. 2006. V.86. P.639-697. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2005.06.016>

5. Gardner W.A. The spectral correlation theory of cyclostationary time-series. *Signal Processing*. 1986. V.11. №1. P.13-36. [https://doi.org/10.1016/0165-1684\(86\)90092-7](https://doi.org/10.1016/0165-1684(86)90092-7)
6. Napolitano A. *Cyclostationary Processes and Time Series Theory, Applications, and Generalizations*. London, Academic Press. 2019. 590 p. <https://doi.org/10.1016/C2017-0-04240-4>
7. Ефимов Е.Н., Шевгунов Т.Я., Филимонова Д.В. Использование циклоstationарных характеристик при оценке времени запаздывания сигналов. *X Всероссийская научно-техническая конференция «Радиолокация и радиосвязь»*. Москва. 2016. С.353-358.
8. Gardner W.A. Spectral Correlation of Modulated Signals: Part I – Analog Modulation. *IEEE Transactions on Communications*. 1987. V.35. №6. P.584-594. <https://doi.org/10.1109/TCOM.1987.1096820>
9. Gardner W.A., Brown W., Chen C.-K. Spectral Correlation of Modulated Signals: Part II – Digital Modulation. *IEEE Transactions on Communications*. 1987. V.35. №6. P.595-601. <https://doi.org/10.1109/TCOM.1987.1096816>
10. Sohn S.H., Han N., Kim J.M., Kim J.W. OFDM Signal Sensing Method Based on Cyclostationary Detection. *2007 2nd International Conference on Cognitive Radio Oriented Wireless Networks and Communications*. 2007. P.63-68. <https://doi.org/10.1109/CROWNCOM.2007.4549773>
11. Шевгунов Т.Я. Метод формирующего оператора для моделирования циклоstationарных случайных процессов. *T-Comm: Телекоммуникации и транспорт*. 2021. Т.15. №8. С.4-12. <https://doi.org/10.36724/2072-8735-2021-15-8-4-12>
12. Lathi B.P. *Modern Digital and Analog Communication Systems*. New York, Oxford University Press. 2010. 903 p.
13. Шевгунов Т.Я. Основные характеристики циклоstationарного описания случайных процессов на примере последовательности импульсов со случайными амплитудами. *Радиотехнические и телекоммуникационные системы*. 2019. №2. С.30-40.



14. Ефимов Е.Н., Шевгунов Т.Я. Циклостационарные модели радиосигналов с квадратурной амплитудной модуляцией. *Электросвязь*. 2016. №11. С. 65-71.
15. Шевгунов Т.Я., Гущина О.А. Использование двумерного преобразования Фурье для оценки спектральной корреляционной функции. *T-Comm: Телекоммуникации и транспорт*. 2021. Т.15. №11. С.54-60.  
<https://doi.org/10.36724/2072-8735-2021-15-11-54-60>
16. Shevgunov T., Efimov E. Two-dimensional FFT Algorithm for Estimating Spectral Correlation Function of Cyclostationary Random Processes. *2019 Signal Processing Symposium*. Krakow, Poland. 2019. P.216-220.  
<https://doi.org/10.1109/SPS.2019.8881963>

**Для цитирования:**

Гущина О.А., Шевгунов Т.Я., Ефимов Е.Н., Вавилова Ж.А. Модель спектральной корреляционной функции для сигналов с OFDM модуляцией и циклическим префиксом. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2022. №10. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.10.1>