

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.10.10>

УДК: 519.725; 514.87; 621.391

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВЫСОТ ПРАВИЛЬНЫХ СИМПЛЕКСОВ ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ РАЗМЕРНОСТИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

А.Ю. Гришенцев¹, А.Г. Коробейников²

¹ Национальный исследовательский университет ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., д. 49, лит. А.

² Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В.
Пушкова РАН, Санкт-Петербургский филиал
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д.5.

Статья поступила в редакцию 6 сентября 2022 г.

Аннотация. Проблема сферической упаковки и проблема распределения точек на сфере являются известными нерешёнными математическими проблемами. В частности, проблема распределения точек на сфере входит в известный список нерешённых математических проблем Стива Смейла. Соответственно, значительный интерес для исследования представляет как непосредственный поиск решения проблем, так и исследования в смежных с известными проблемами областях. В частности, проблема сферической плотной упаковки и упаковки покрытия имеет непосредственную связь с исследованием регулярных, нерегулярных и слоистых решёток, задачами помехоустойчивого кодирования, синтеза и анализа широкополосных сигналов, математическим исследованием многомерных пространств, кристаллографией, методами решения дифференциальных уравнений и вычисления n -мерных интегралов и многими другими частными задачами, и целыми областями знаний. В работе изложены результаты исследований некоторых свойств n -мерных правильных симплексов в евклидовом пространстве. Вектора, образующие n -мерный правильный симплекс задают фундаментальный базис гексагональной решётки.

Предметом исследования являются некоторые свойства и закономерности векторного объекта, образующего правильный симплекс в n -мерном евклидовом пространстве, новизна результатов заключается в сформулированной и доказанной теореме, нескольких формулах позволяющих производить рекурсивные и не рекурсивные вычисления некоторых характеристик n -мерных правильных симплексов и сферических гексагональных упаковок. **Объектом исследования** является n -мерный правильный симплекс. **Основные результаты** – сформулирована и доказана теорема об асимптотическом характере последовательности высот правильных симплексов при увеличении размерности пространства, сформулированы следствия из теоремы и замечания, дополняющие теорему. В заключении статьи содержатся дополнения и численные примеры с комментариями для некоторых результатов исследований. **Практическая значимость** заключается в предлагаемом математическом инструментарии, способствующем развитию теории сферической упаковки и исследованию свойств геометрических объектов в n -мерном евклидовом пространстве.

Ключевые слова: n -мерный правильный симплекс, гексагональная решётка, сферическая упаковка, плотная упаковка, помехоустойчивое кодирование, системы автоматизированного проектирования, информационная безопасность, системный анализ.

Финансирование: работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект тематики научных исследований № 2019-0898.

Автор для переписки: Гришенцев Алексей Юрьевич, agrishentsev@yandex.ru

Введение

Проблема сферической упаковки [1] и проблема распределения точек на сфере [2,3] являются известными нерешёнными математическими проблемами. В частности, проблема распределения точек на сфере входит в известный список нерешённых математических проблем Стива Смейла [4]. Соответственно, значительный интерес для исследования представляет как непосредственный поиск решения проблем, так и исследования в смежных с известными проблемами областях. В частности, проблема сферической упаковки имеет непосредственную связь с исследованием регулярных, нерегулярных и слоистых решёток [1], задачами помехоустойчивого кодирования [5,6], синтеза и анализа широкополосных сигналов [7], математическим исследованием многомерных пространств [7,8], кристаллографией [9-12], методами решения дифференциальных уравнений и вычисления n -мерных интегралов [13] и многими другими частными задачами и целыми областями знаний.

В данной работе приводятся результаты исследований некоторых свойств правильных симплексов образованных совокупностью векторов в n -мерном евклидовом пространстве. Такие симплексы задают базис гексагональной решётки, которая определяет один из известных способов плотной и замощающей сферической упаковки. Таким образом, исследование свойств n -мерных правильных симплексов является интересным как с точки зрения многомерной евклидовой геометрии, так и с точки зрения исследований свойств фундаментального базиса гексагональной решётки. Векторный базис гексагональной решётки образует фундаментальный параллелепипед (гипер-параллелепипед), который в свою очередь является геометрической структурой определяющей многие свойства гексагональной решётки.

В качестве примера на изображении (рис. 1) приведена структура гексагональной решётки в двумерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^2 и плотная сферическая упаковка (рис. 1, а.) и сферическая упаковка замощения (рис. 1, б.).

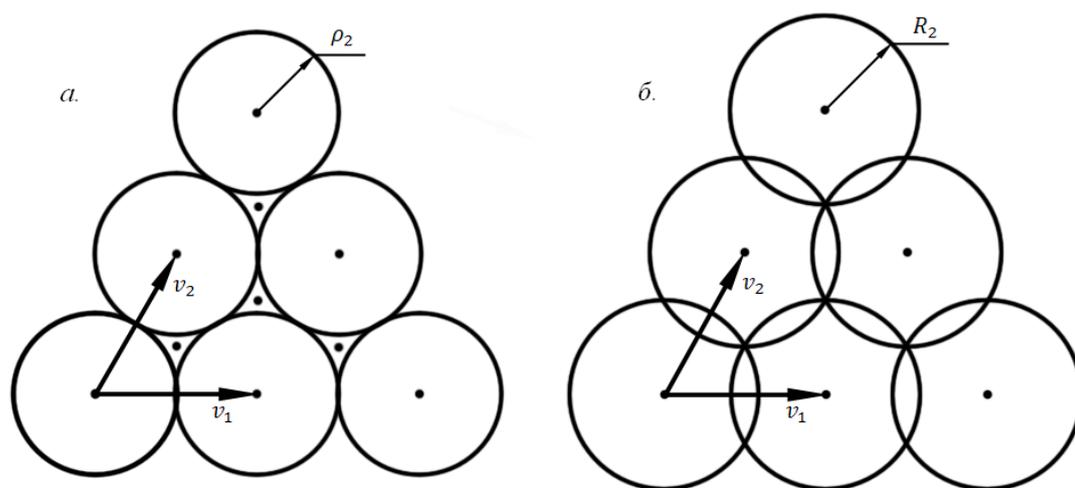


Рис. 1. *а.* – плотная гексагональная сферическая упаковка в пространстве \mathbb{R}^2 , ρ_2 – радиус двумерной сферы (окружности), в центре окружностей находятся узлы гексагональной решётки, точки между окружностями обозначают глубокие дыры сферической упаковки; *б.* – гексагональная сферическая упаковка покрытия (замощения) в пространстве \mathbb{R}^2 , R_2 – радиус двумерной сферы (окружности); векторы v_1, v_2 – задают фундаментальный базис двумерной решётки Λ_2

Целью работы является исследование некоторых свойств фундаментального базиса, а также некоторых следствий исследованных свойств фундаментального базиса гексагональной решётки.

1. Алгоритм синтеза базисных векторов гексагональной решётки

Базисные вектора гексагональной решетки образуют правильные симплексы. Поэтому синтез векторного базиса гексагональной решетки, в пространстве \mathbb{R}^n , эквивалентен построению правильного симплекса.

Предлагается рекурсивный алгоритм синтеза базисных векторов гексагональной решетки: $\begin{cases} M_1 = v_1 \\ M_{n+1} = M_n + v_{n+1} \end{cases}$, где M_1, M_2, \dots – бесконечное множество нижнетреугольных порождающих матриц составленных из векторов фундаментального базиса; v_1, v_2, \dots – вектора одинаковой длины $|v|$, порождающие фундаментальные базисы гексагональных решёток различной размерности $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$.

1) Синтез начинается с одномерного пространства \mathbb{R}^1 , заданием вектора $v_1 = (x_1^1)$ с началом в точке (x_1^0) . Таким образом, одномерная решётка Λ_1

задаётся одним вектором. Точка (x_1^0) , является точкой начала всех последующих векторов.

2) Для повышения размерности необходимо добавить вектор повышающий размерность базиса решётки, т.е. выполнить операцию $M_{n+1} = M_n + v_{n+1}$, где $v_{n+1} = (x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, \dots, x_{n+1}^{n+1})$. Пункт (2) повторяется необходимое число раз.

Практическая реализация операции $M_{n+1} = M_n + v_{n+1}$ выполняется следующим образом. Необходимо вычислить координаты вновь добавляемого вектора $v_{n+1} = (x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, \dots, x_{n+1}^{n+1})$, координаты $x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, \dots, x_n^{n+1}$, вычисляются как среднеарифметическое значение точек (вершин) задающих правильный симплекс [14], включая начальную точку (x_1^0) , т.е.: $x_k^{n+1} = \frac{1}{(n+1)} \sum_{p=0}^n x_k^p$, $k = 1 \dots n$. Оставшаяся координата x_{n+1}^{n+1} вычисляется с помощью обобщённой, для многомерных пространств, [15,16] теоремы Пифагора:

$x_{n+1}^{n+1} = \sqrt{|v|^2 - \sum_{k=1}^n (x_k^{n+1} - x_k^0)^2} + x_{k+1}^0$. При переходе от размерности \mathbb{R}^n к размерности \mathbb{R}^{n+1} , вновь добавляемые координаты, задающие базисные вектора и начальную точку, приравниваются нулю, т.е. $x_{n+1}^p = 0$, $p \leq n$, таким образом, формируется нижняя треугольная матрица M_n .

Полученный по пунктам 1 и 2 фундаментальный базис решётки можно поворачивать и масштабировать путём элементарных векторных преобразований, в случае унитарных преобразований все размеры и формы правильного симплекса будут сохранены без изменений.

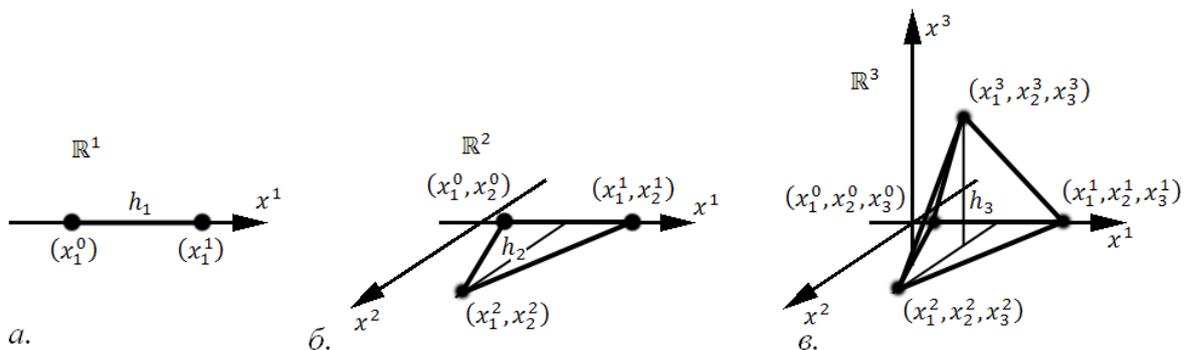


Рис. 2. Построение симплекса в пространствах \mathbb{R}^1 , \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3

2. Геометрическая интерпретация алгоритма

Построим вектор v_1 в одномерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^1 (рис. 2, а) из точки с координатами (x_0^1) в точку с координатами (x_1^1) в результате получим базис, образующий одномерную решетку Λ_1 . Для получения базиса решётки Λ_2 в двумерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^2 необходимо определить центр отрезка вектора v_1 как $x_1^2 = \frac{1}{2}(x_1^0 + x_1^1)$ и построить из центра v_1 высоту h_2 ортогональную к подпространству $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2$ такую, что длина высоты $h_2 = \sqrt{|v_2|^2 - (x_1^2 - x_1^0)^2}$. Далее из точки с координатами (x_1^0, x_2^0) , в точку с координатами $(x_1^2, x_2^2) = (x_1^2, h_2 + x_2^0)$, строим отрезок v_2 , причём $(|v_2| = |v_1|)$ (рис. 2, б). Длина высоты h_2 будет определять, насколько симплекс, заданный векторами, образующими матрицу $M_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, будет выпуклым из подпространства \mathbb{R}^1 в пространство \mathbb{R}^2 . Для построения фундаментального базиса решётки Λ_3 в трёхмерном пространстве \mathbb{R}^3 (рис. 2, в) необходимо построить высоту h_3 , перпендикулярную к подпространству $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, из точки с координатами (x_1^3, x_2^3) , вычисляемыми как среднее арифметическое координат задающих двумерный правильный симплекс, т.е. среднее арифметическое трёх точек равностороннего треугольника: $x_1^3 = \frac{1}{3}(x_1^0 + x_1^1 + x_1^2)$ и $x_2^3 = \frac{1}{3}(x_2^0 + x_2^1 + x_2^2)$. Длина высоты $h_3 = \sqrt{|v_3|^2 - \sum_{k=1}^2 (x_k^3 - x_k^0)^2}$, определяющая значение координаты x_3^3 , вычисляется из обобщённой теоремы Пифагора. Длина высоты h_3 определяет насколько фундаментальный базис выпуклый из подпространства \mathbb{R}^2 в пространство \mathbb{R}^3 . Далее, следуя вышеизложенному алгоритму, можно неограниченно наращивать размерность фундаментального базиса.

В качестве примера приведём порождающую матрицу $M_8 = (v_1, v_2, \dots, v_8)^T$ образованную базисными векторами единичной длины, полученными с помощью предлагаемого алгоритма и задающими гексагональную решётку Λ_8 :

$$M_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{10}} & \frac{1}{2\sqrt{15}} & \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{10}} & \frac{1}{2\sqrt{15}} & \frac{1}{2\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{7}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{10}} & \frac{1}{2\sqrt{15}} & \frac{1}{2\sqrt{21}} & \frac{1}{4\sqrt{7}} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Между любой парой различных векторов v_1, v_2, \dots, v_8 образующих матрицу M_8 угол составляет величину $\frac{\pi}{3}$, а евклидова дистанция – единица. Таким образом, вектора v_1, v_2, \dots, v_8 задают правильный симплекс в пространстве \mathbb{R}^8 .

Следует отметить, что существуют альтернативные способы задания векторного базиса гексагональной решётки, обладающие теми или иными преимуществами и недостатками. Различные способы задания векторного базиса гексагональной решётки реализуются с помощью поворотов и масштабирования правильного симплекса, а также при помощи переноса его в пространство большей размерности, например, *решётка корней* [1] с порождающей матрицей $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, при этом симплекс будет принадлежать гиперплоскости размерности $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, задаваемой уравнением $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = 0$ в \mathbb{R}^{n+1} .

В некоторых случаях полезен способ задания симплекса и векторного базиса решётки с помощью единичной матрицы $E_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, при этом симплекс будет принадлежать гиперплоскости размерности $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, задаваемой уравнением $\sum_{k=1}^{n+1} x_k - 1 = 0$ в \mathbb{R}^{n+1} .

3. Теорема об асимптотической последовательности высот правильных симплексов при увеличении размерности пространства

Теорема: Последовательность $\{h_n\}$, образованная значениями высот правильных симплексов при увеличении размерности пространства монотонно убывает и асимптотически приближается сверху к величине $\frac{|v|}{\sqrt{2}}$, где $|v|$ – длина рёбер, образующих правильный симплекс.

Доказательство: Для определённости положим, что длина векторов образующих правильный симплекс равна единице, т.е. $|v| = 1$, точка начала базисных векторов совпадает с точкой начала координат. В дальнейшем с помощью масштабирования можно перейти к произвольной длине базисных векторов. Анализ алгоритма построения правильных симплексов показывает, что координаты базисных векторов $v_n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_n^n)$ для $n > 1$, можно задать с помощью выражений $x_k^n = \frac{1}{2\sqrt{\frac{k(k+1)}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2k(k+1)}}$, для $k = 1 \dots n - 1$ и $x_n^n =$

$\sqrt{1^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2k(k+1)}\right)}$ для $k = n$, соответственно. При заданных ранее условиях, точка начала базисных векторов совпадает с точкой начала координат и высота h_n перпендикулярна к подпространству $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, координата x_n^n равна высоте (т.е. $h_n = x_n^n$) правильного симплекса в пространстве \mathbb{R}^n . Таким образом, общий член

последовательности:

$$h_n = x_n^n = \sqrt{1^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2k(k+1)}\right)}$$

– высоты правильных симплексов в зависимости от размерности пространства n , при $|v| = 1$.

Вычислим асимптотический предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2k(k+1)}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0, \Rightarrow \text{последовательность } \{h_n\}$$

сходится к $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и является знакопостоянной, т.к. подкоренное выражение общего

члена последовательности больше нуля при значениях $n = 1, 2, \dots$.

Так как $\frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{\sqrt{1^2 - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k(k+1)}\right)}}{\sqrt{1^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2k(k+1)}\right)}} = \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n+1} < 1$, при $n = 1, 2, \dots$, следовательно,

$h_{n+1} < h_n$ для всякого $n = 1, 2, \dots$, таким образом, последовательность $\{h_n\}$ является строго монотонной убывающей. Допуская произвольную длину $|v|$ базисных векторов, умножим полученные координаты на $|v|$, тогда $|v| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \frac{|v|}{\sqrt{2}}$ ч.т.д.

Замечание I. В случае длины базисных векторов $|v|$ отличных от единицы высота правильных симплексов вычисляется как:

$$h_n = |v| \sqrt{1^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2k(k+1)}\right)}.$$

Замечание II. Так как n -мерный правильный симплекс Λ_n в пространстве \mathbb{R}^n является совершенной фигурой образованной равноудалёнными вершинами с общим центром и форм-инвариантен к операции поворота и порядку последовательности наращивания размерности, то все высоты правильных симплексов в пространстве \mathbb{R}^n , не зависимо от формы и масштаба симплекса, будут стремиться к $\frac{|v|}{\sqrt{2}}$ при $n \rightarrow \infty$.

Замечание III. Детерминант матрицы M_n , определяющий объём фундаментального параллелепипеда гексагональной решётки Λ_n с длиной ребра $|v|$, может быть вычислен с помощью выражения:

$$\det(M_n) = |v|^n \prod_{s=2}^n \sqrt{1^2 - \sum_{k=1}^{s-1} \left(\frac{1}{2k(k+1)}\right)} = \prod_{s=1}^n h_n,$$

дискриминант матрицы Грама $A_n = M_n M_n^T$, определяющий квадрат объёма, фундаментального параллелепипеда

$$\det(A_n) = \det(M_n)^2 = |v|^{2n} \prod_{s=2}^n \left(1^2 - \sum_{k=1}^{s-1} \left(\frac{1}{2k(k+1)}\right)\right) = \left(\prod_{s=1}^n h_n\right)^2.$$

Используя известное выражение: $P_n = \frac{|v|^{n\sqrt{n+1}}}{n!2^{(n/2)}}$ – определяющее объём правильного n -мерного симплекса, и учитывая, что $P_n = \frac{\det(M_n)}{n!}$, получим ещё

одно выражение для расчёта объёма фундаментального параллелепипеда $\det(M_n) = \frac{|v|^n \sqrt{n+1}}{2^{(n/2)}}$.

Замечание IV. Координаты дыры плотной гексагональной упаковки можно рассчитать как среднее арифметическое [14] координат вершин правильного симплекса $y_p^n = \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=0}^n x_p^k$, расстояние до равноудалённой точки от вершин правильного симплекса известно из [14]: $l_n = |v| \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$. Учитывая, ранее полученное выражение для h_n , и что отношение точки пересечения высот в правильном симплексе в евклидовом n -мерном пространстве \mathbb{R}^n делит высоты на отрезки в соотношении $1:n$, расстояние от узлов гексагональной решётки, т.е. центров сфер (при сферической гексагональной упаковке на решётке Λ_n) до ближайшей дыры

$$l_n = \frac{n}{(n+1)} h_n = \frac{n}{(n+1)} |v| \sqrt{1^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2k(k+1)} \right)} = |v| \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}},$$

из полученного выражения следует, что $h_n = |v| \sqrt{\frac{n+1}{2n}}$, что так же доказано в [14].

Следствие I. При любом постоянном значении длины ребра $|v| = const$ правильного n -мерного симплекса, при устремлении размерности пространства к бесконечности объём правильного n -мерного симплекса стремиться к нулю:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ |v|=const}} P_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ |v|=const}} \frac{|v|^n \sqrt{n+1}}{n! 2^{(n/2)}} = 0.$$

Следствие II. Предел расстояния l_n от центра сферы, при сферической гексагональной упаковке, до ближайшей дыры

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n}{(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 1 \cdot \frac{|v|}{\sqrt{2}} = \frac{|v|}{\sqrt{2}}.$$

Тот же результат можно получить, используя теорему, доказанную в работе [14], о расстоянии до равноудалённой точки в совершенной системе

точек: $l_n = |v| \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$, получим: $\lim_{n \rightarrow \infty} |v| \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} = \frac{|v|}{\sqrt{2}}$.

Замечание V. Учитывая [1], что в евклидовом n -мерном пространстве \mathbb{R}^n гиперобъём шара радиуса ρ равен $\rho^n V_n$, и задаётся для чётных и нечётных

значений n следующей формулой $\rho^n V_n = \begin{cases} \rho^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!}, & (n \bmod 2) = 0 \\ \rho^n \frac{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} (\frac{n-1}{2})!}{n!}, & (n \bmod 2) = 1 \end{cases}$,

а плотность сферической гексагональной упаковки [1] в общем виде рассчитывается как $\Delta_n = \frac{\rho^n V_n}{\sqrt{\det(A_n)}} = \frac{\rho^n V_n}{\det(M_n)}$, запишем выражение для расчёта плотности сферической упаковки на гексагональной решётке в зависимости от размерности пространства:

$$\Delta_n = \begin{cases} \frac{\rho^n \pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})! |v|^n \prod_{s=2}^n \sqrt{1^2 - \sum_{k=1}^{s-1} (\frac{1}{2k(k+1)})}} = \frac{2^{(n/2)} \rho^n \pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})! |v|^n \sqrt{n+1}}, & (n \bmod 2) = 0 \\ \frac{2^n \rho^n \pi^{\frac{n-1}{2}} (\frac{n-1}{2})!}{n! |v|^n \prod_{s=2}^n \sqrt{1^2 - \sum_{k=1}^{s-1} (\frac{1}{2k(k+1)})}} = \frac{2^{(3n/2)} \rho^n \pi^{\frac{n-1}{2}} (\frac{n-1}{2})!}{n! |v|^n \sqrt{n+1}}, & (n \bmod 2) = 1 \end{cases}, \quad (1)$$

Причём, если сферы расположены с перекрытием друг друга, так что происходит замощение, то говорят о плотности упаковки покрытия, а если перекрытия сфер нет, а есть только касание сфер друг с другом, то говорят о плотности плотной упаковки.

4. Дополнение, обсуждение

В качестве иллюстрации полученных результатов приведём некоторые графики с комментариями. Рисунок 3 иллюстрирует теорему об асимптотике последовательности $\{h_n\}$ высот правильных симплексов образованных базисными векторами гексагональной решётки.

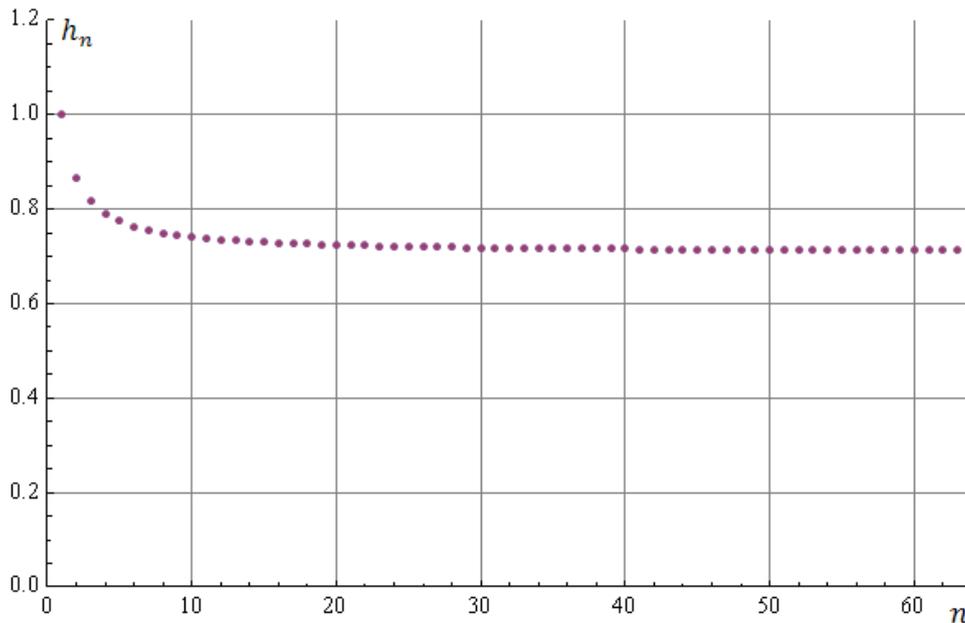


Рис. 3. Высота правильных симплексов при увеличении размерности пространства монотонно убывает, длина векторов, образующих правильный симплекс принята за единицу $|v| = 1$

При различных размерностях евклидова пространства наибольшую плотность показывают различные виды сферической плотной упаковки, в том числе слоистые и нерегулярные [1]. Гексагональная решётка наибольшую плотность показывает в случае одномерного \mathbb{R}^1 пространства $\Delta_1 = 1$ и в двухмерного пространства \mathbb{R}^2 плотность [18] имеет значение $\Delta_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ (таблица 1). Для решётчатых упаковок в размерности пространства три \mathbb{R}^3 наибольшую плотность даёт гранецентрированная кубическая решётка [1,19].

Интересным фактом является то, что в соответствии с выражением расчёта плотности по [1], плотность сферических гексагональных упаковок при стремлении размерности \mathbb{R}^n к бесконечности стремиться к нулю при любом конечном и постоянном значении радиуса сферы $\rho = const$, т.е.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho^n \pi^{n/2}}{\binom{n}{2}! |v|^n \prod_{s=2}^n \sqrt{1^2 - \sum_{k=1}^{s-1} \left(\frac{1}{2k(k+1)}\right)}} = 0,$$

что является следствием следующего: $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \rho = const}} \rho^n V_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \rho = const}} \rho^n \frac{\pi^{n/2}}{\binom{n}{2}!} = 0.$

Таким образом, для гиперсферы нельзя выбрать такое постоянное значение характеристики (радиуса $\rho = const$, который определяет величину

двухсторонней выпуклости n -мерной гиперсферы в пространство \mathbb{R}^n из подпространства \mathbb{R}^{n-1}) при котором гиперобъём n -мерной сферы будет стремиться к бесконечности при стремлении размерности пространства \mathbb{R}^n к бесконечности.

Если для плотной упаковки взять радиус $\rho = \frac{|v|}{2}$, то плотность плотной упаковки монотонно убывает. Для упаковки покрытия радиус сферы возьмем равным расстоянию от вершины правильного симплекса (узла решётки) до ближайшей дыры, т.е. $\rho = R_n = l_n = \frac{nh_n}{(n+1)}$, тогда плотность упаковки покрытия сначала возрастает, имея максимум $\frac{8\pi^2}{25\sqrt{5}}$ при $n = 4$ в \mathbb{R}^4 , а затем убывает. При этом плотность упаковки покрытия достигает значений менее единицы, уже при размерностях $n \geq 8$. Из чего можно сделать вывод, что при $n \geq 8$ и радиусе сферы равном расстоянию от узла решётки до ближайшей дыры, полного замощения не происходит, т.е. весь гиперобъём гексагональной решётки не покрывается гиперсферами, т.к. $\Delta_n < 1$ при $n \geq 8$.

Используя формулу (1) запишем выражение для расчёта радиуса сферы, при котором плотность покрытия гексагональной решётки имеет значения не менее единицы, т.к. при упаковке замощения гиперсферы должны покрывать весь объём фундаментального параллелепипеда и в том числе частично перекрываться, запишем условие $\Delta_n = \frac{(R_n)^n V_n}{\det(M_n)} > 1$, тогда:

$$\min(R_n) > \left(\frac{\det(M_n)}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} |v| \left(\frac{\left(\frac{n}{2}\right)! \sqrt{n+1}}{2^{(n/2)} \pi^{\frac{n}{2}}}\right)^{\frac{1}{n}}, & (n \bmod 2) = 0 \\ |v| \left(\frac{n! \sqrt{n+1}}{2^{(3n/2)} \pi^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}\right)^{\frac{1}{n}}, & (n \bmod 2) = 1 \end{cases}.$$

Полученная величина $\min(R_n)$ является нижней границей радиуса сферы замощения пространства гексагональной решётки и не гарантирует полного замощения, т.к. сферы могут перекрываться, но гарантирует, что при меньших значениях радиуса замощение гексагональной решётки не может быть полным.

Для сравнения в таблицу 1 помещены численные значения величин: нижняя граница радиуса сферы покрытия замощения, расстояние от узлов гексагональной решётки до ближайших дыр и высота правильного симплекса.

Таблица 1. Нижняя граница радиуса сферы покрытия замощения, расстояние от узлов гексагональной решётки до ближайших дыр и высота правильного симплекса

Размерность пространства, \mathbb{R}^n	Нижняя граница радиуса сферы покрытия замощения, при $ v = 1$	Расстояние от узлов гексагональной решётки до ближайших дыр, при $ v = 1$	Высота правильного n-мерного симплекса, при $ v = 1$
1	0.5	0	1
2	0.525038	0.57735	0.866025
3	0.552669	0.612372	0.816497
4	0.580148	0.632456	0.790569
5	0.606793	0.645497	0.774597
6	0.632451	0.654654	0.763763
7	0.65713	0.661438	0.755929
8	0.680889	0.666667	0.75
9	0.703801	0.67082	0.745356
10	0.725935	0.6742	0.74162
11	0.747359	0.677003	0.738549
12	0.768131	0.679366	0.73598

Заключение

Произведено исследование зависимости, от увеличения размерности евклидова пространства, последовательности высот правильных симплексов, образованных векторным базисом гексагональной решётки. Сформулирована и доказана теорема об асимптотике последовательности высот правильных симплексов при увеличении размерности евклидова пространства. Сформулированы замечания и следствия доказанной теоремы. В заключительной части работы приведены некоторые дополнения, с численными примерами, выведено выражение для нижней границы радиуса сферы покрытия гексагональной решётки.

Финансирование: работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект тематики научных исследований № 2019-0898.

Литература

1. Конвей Дж., Слоэн Н. *Упаковки шаров, решетки и группы. В 2-х томах. Т. 1. Пер. с англ.* Москва, Мир. 1990. 415 с.
2. Braucharta J.S., Grabner P.J. Distributing many points on spheres: minimal energy and designs. *Journal of Complexity*. 2015. V.31. №3. P.293-326 <https://doi.org/10.1016/j.jco.2015.02.003>
3. Гришенцев А.Ю. Численное решение многомерной проблемы Томсона для упаковки векторов на гиперсфере в задачах широкополосной радиосвязи. *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2019. Т.19. №4. С.730-739. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2019-19-4-730-739>
4. Smale S. Mathematical problems for the next century. *Mathematical Intelligencer*. 1998. V.20. №2. P.7-15. <https://doi.org/10.1007/BF03025291>
5. Зюко А.Г., Фалько А.И., Панфилов И.П., Банкет В.Л., Иващенко П.В. *Помехоустойчивость систем передачи информации*. Москва, Радио и связь. 1985. 272 с.
6. Ветчинкин Н.М. Упаковка равных и мерных шаров, построенные по кодам, исправляющим ошибки. *Ученые записки Ивановского гос. университета*. 1974. Т.89. С.87-91.
7. Гришенцев А.Ю. Метод синтеза алфавитов ортогональных сигнальных широкополосных сообщений. *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2018. Т.18. №6. С.1074-1083. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2018-18-6-1074-1083>
8. Новиков С.П., Тайманов И.А. *Современные геометрические структуры и поля*. Москва, МЦНМО. 2005. 584 с.

9. Малоземов В.Н., Тамасян Г.Ш. Два быстрых алгоритма проектирования точки на стандартный симплекс. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2016. Т.56. №5. С.742-755.
10. Нардов В.В. *Практическое руководство по геометрической кристаллографии*. Ленинград, изд-во Ленинградского университета. 1974. 143 с.
11. Егоров-Тисменко Ю.К. *Кристаллография и кристаллохимия*. Москва, КДУ. 2005. 592 с.
12. Ткачук П.Н., Ткачук В.И., Букивский П.Н., Курик М.В. Метастабильный х-центр в монокристаллах теллурида кадмия. *Физика твердого тела*. 2004. Т.46. №5. С.804-810.
13. Huffman W.C., Sloane N.J.A. Most primitive groups have messy invariants. *Adv. in Math.* 1979. №32. P.118-127.
14. Рябухин Ю.М., Жугин М.А. Правильный симплекс произвольной размерности и его свойства. *Вестник приднестровского университета. Серия: физ.-мат. и технические науки*. 2020. Т.3. №66. С.53-58.
15. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа: В 2 ч. Часть I*. 5-ое изд. Москва, Наука, Физматлит, 1998. 616 с.
16. Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*. Москва, Айрис-Пресс. 2010. 608 с.
17. Попов В.Л., Зархин Ю.Г. Кольца целых в числовых полях и решетки корней. *Доклады российской академии наук. математика, информатика, процессы управления*. 2020. Т.492. №1. С.58-61.
18. Fejes Toth L. *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und in Raum*. Berlin, Springer. 1953. P.1-24.
19. Кокстер Г.С.М. *Введение в геометрию*. Москва, Наука. 1966. 649 с.

Для цитирования:

Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г. Исследование асимптотической последовательности высот правильных симплексов при увеличении размерности евклидова пространства. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2022. №10. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.10.10>