

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.10.10>

УДК: 621.396 : 521.19

## ЗАВИСИМОСТЬ СТОХАСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ОТ ХАРАКТЕРИСТИК КАЖДОГО СЛАГАЕМОГО АДДИТИВНОЙ СМЕСИ

Ю.М. Вешкурцев<sup>1</sup>, Д.А. Титов<sup>2</sup>, А.С. Табакова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт радиоэлектроники, сервиса и диагностики,  
644077, г. Омск, проспект Мира 57

<sup>2</sup>Омский государственный технический университет,  
644050, г. Омск, проспект Мира 11

Статья поступила в редакцию 23 июля 2023 г.

**Аннотация.** Исследована с помощью моделирования нелинейная система, построенная по схеме цифрового фильтра с использованием характеристической функции Ляпунова. Установлено явление стохастического резонанса в нелинейной системе при наличии аддитивной смеси квазидетерминированного сигнала и шума на входе системы. Стохастический резонанс более чем в 15400 раз улучшает отношение сигнал/шум на выходе системы по сравнению с его значением на входе системы. Улучшение соотношения сигнал/шум может быть другим и характеризует главный признак резонанса. Исследована зависимость признака стохастического резонанса от вариаций вероятностных характеристик квазидетерминированного сигнала и шума. Сделан анализ экспериментальных данных, описывающих значения признака и особенности эффекта стохастического резонанса в нелинейной системе. Впервые открыта связь значения признака резонанса с полной энергией периодического сигнала.

**Ключевые слова:** стохастический резонанс, квазидетерминированный сигнал, характеристическая функция Ляпунова, цифровой фильтр, помехоустойчивость цифрового фильтра.

**Автор для переписки:** Титов Дмитрий Анатольевич, [dtitov2@yandex.ru](mailto:dtitov2@yandex.ru)

## Введение

Данная работа является продолжением исследования свойств нового эффекта стохастического резонанса в радиотехнической системе [1, 2]. После открытия в конце 20-го века этого эффекта, получившего потом название стохастический резонанс (СР), наблюдается интерес к нему ученых прикладных наук и конструкторов с практическими навыками. В естественных науках, например, в физике, термин «стохастический» применяют к явлениям, которые не считаются случайными, но содержат в себе случайность в произвольной степени. Следовательно, СР не относится к детерминированным явлениям, поскольку скрывает в себе некоторый элемент случайности. Многочисленные публикации о стохастическом резонансе раскрывают содержание нового эффекта, случайные факторы появления его и неслучайные показатели присутствия эффекта в системе при действии на ее входе аддитивной смеси информационного сигнала и шума. В качестве примера публикаций можно назвать содержательные обзоры [3, 4]. В этих обзорах по инициативе авторов записаны обязательные компоненты, влияющие на появление стохастического резонанса. К ним относятся:

- нелинейная система с наличием потенциальных ям у траектории движения броуновской частицы;
- аддитивная смесь шума и периодического сигнала на входе системы.

Кроме того, указано, что характеристики и свойства СР зависят от структуры сигналов, поступающих на вход нелинейной системы. Из работ [5-7] известно, что периодический сигнал в смеси может быть детерминированным (одночастотным или многочастотным) и даже представлять собой случайный процесс. Шум на входе системы бывает разный, в том числе «белый». Гипотетически можно утверждать, что замена детерминированного сигнала на другое, так называемое квазидетерминированное колебание [8, С. 171], или тем более на случайный сигнал, увеличивает количество элементов случайности стохастического резонанса. Всякая случайность в появлении СР представляет интерес. Целью

данной работы является изучение новых особенностей стохастического резонанса при вариации вероятностных характеристик каждого слагаемого аддитивной смеси. При этом показатели наличия СР в системе сохраняются, они записаны в [3, 4] и заключаются в следующем:

- наблюдается увеличение коэффициента усиления энергии периодического сигнала;
- увеличивается отношение сигнал/шум на выходе системы;
- появляются вероятности времени пребывания частицы в потенциальной яме.

По заявлению авторов обзора [3, С. 10]: «...как качественные, так и количественные характеристики стохастического резонанса будут во многом определяться свойствами конкретных нелинейных систем», и к этому добавим также вероятностными характеристиками слагаемых аддитивной смеси сигнала и шума.

## 1. Ключи вероятностных характеристик сигнала и шума

В статистической радиотехнике используют квазидетерминированные сигналы, которые по определению [8, С. 171] «...описываются функциями времени заданного вида, содержащими один или несколько случайных параметров  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \dots$ , не зависящих от времени». Рассмотрим аддитивную смесь из двух слагаемых:

$$z(t) = u(t) + n(t), \quad (1)$$

где  $n(t)$  – шум;

$u(t) = U_0 \times \sin(\omega_0 \times t + \eta)$  – центрированный квазидетерминированный сигнал с законом распределения арксинус, у которого  $U_0, \omega_0$  – амплитуда и круговая частота есть постоянные величины, а  $\eta$  – начальный угол сдвига фаз есть случайная величина с равномерным законом распределения в пределах  $-\pi \dots +\pi$

Здесь же запишем модель нецентрированного квазидетерминированного сигнала

$$u(t) = e_0 + U_0 \sin(\omega_0 \cdot t + \eta), \quad (2)$$

у которого  $e_0$  – математическое ожидание. Далее оба сигнала и шум будем моделировать при значении  $U_0 = 0,9$ ,  $e_0 = 0,3$ ,  $\omega_0 = 2\pi \times 10^5$  рад/с и времени дискретизации  $\Delta t = 2,5$  мкс. Алгоритмы моделирования шума и сигнала построены с учетом возможности получения множества реализаций, отличающихся друг от друга некоторым начальным числом. И как результат этого, вероятностные характеристики разных реализаций шума и сигнала будут отличаться между собой. Для идентификации реализаций и вероятностных характеристик используем ключ с обозначением V0 – для реализаций шума; V00 – для реализаций центрированного квазидетерминированного сигнала; V01 – для реализаций нецентрированного квазидетерминированного сигнала. Моделирование сигнала и шума выполнялось средствами языка программирования Fortran и рассмотренные ключи соответствуют идентификаторам реализаций в данном языке программирования. Моделирование реализаций квазидетерминированного сигнала включает использование таблиц со случайными значениями величины  $\eta$  – начального угла сдвига фаз, которые появляются через 2 либо 3, или 4 либо 5 периодов сигнала и остаются постоянными на протяжении указанного числа периодов. Реализации квазидетерминированного сигнала смоделированы с разными таблицами. Для идентификации реализаций квазидетерминированного сигнала используем, например, ключ  $V00 = 1.000099977648006E-002$  ( $\varphi = 5$ ) или  $V01 = 2.000099955296264E-002$  ( $\varphi = 5$ ), где  $\varphi$  – количество периодов сигнала с одинаковой начальной фазой.

Оценки вероятностных характеристик реализаций шума объемом пятьсот дискретных значений измерялись виртуальным прибором XN 1.31 beta с погрешностью 15% [9] и использовались далее при анализе стохастического резонанса. Они показаны на рис. 1-4. Оценки вероятностных характеристик квазидетерминированного сигнала были получены ранее [9]. Мгновенные значения указанных выше квазидетерминированных сигналов распределены

по закону арксинуса и имеют разные начальные моментные функции первого порядка.

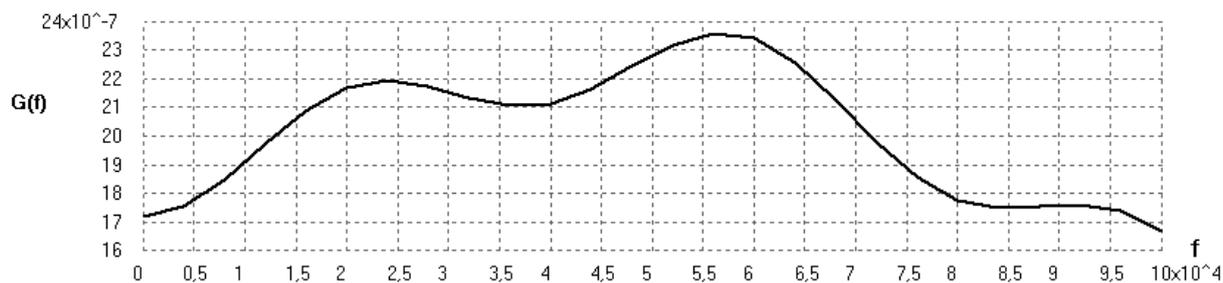


Рис. 1. Оценка спектральной плотности мощности шума с ключом  $V_0 = 1.834215897314670E-001$ .

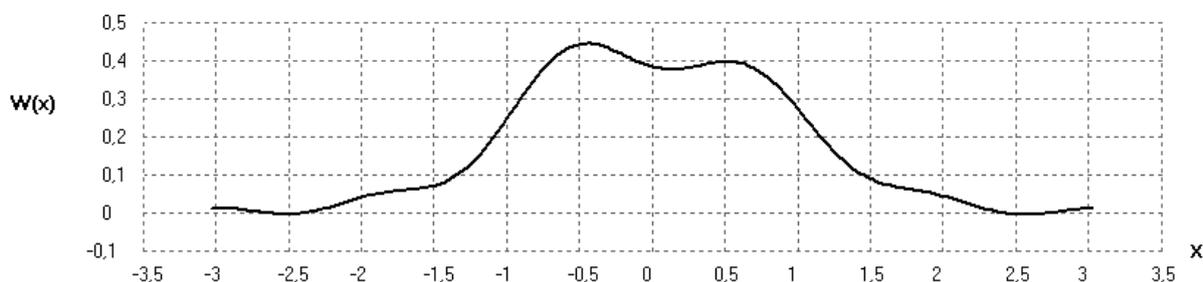


Рис. 2. Оценка плотности вероятностей шума с ключом  $V_0 = 1.834215897314670E-001$ , у которого математическое ожидание  $m_1 = 0,0075$ .

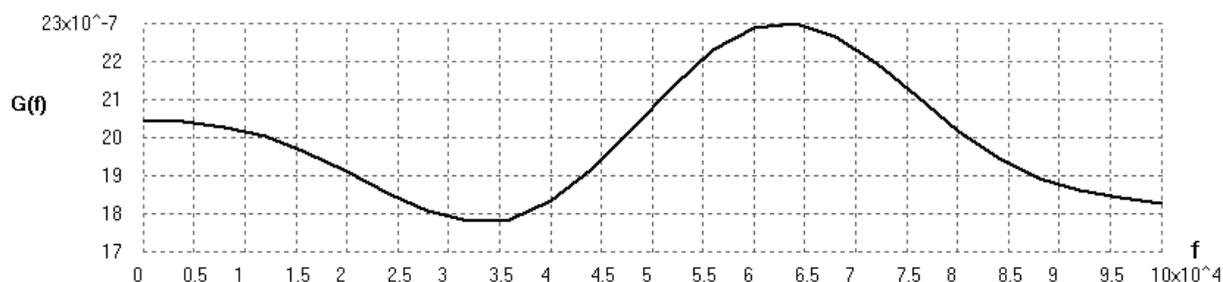


Рис. 3. Оценка спектральной плотности мощности шума с ключом  $V_0 = 1.001000014875899E-001$ .

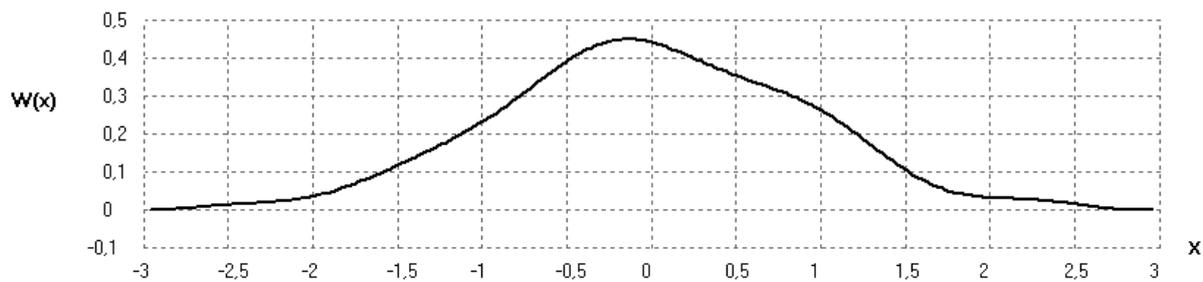


Рис. 4. Оценка плотности вероятностей шума с ключом  $V_0=1.001000014875899E-001$ , у которого математическое ожидание  $m_1=0,012$

Дополнительно на рис. 5 приведена оценка плотности вероятностей случайной величины  $\eta$ , присутствующей в математической модели сигнала.

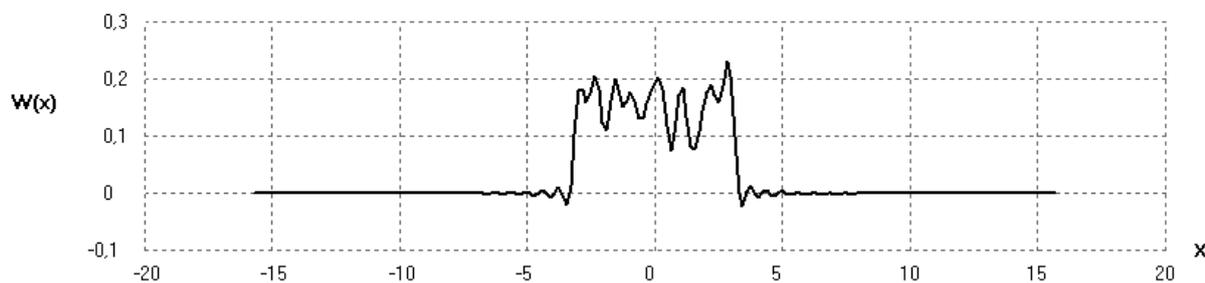


Рис. 5. Оценка плотности вероятностей случайной величины  $\eta$  у квазидетерминированного сигнала с ключом  $V00 = 1.000099977648006E-002$  ( $\varphi = 5$ ) и с ключом  $V01 = 2.000099955296264E-002$  ( $\varphi = 5$ )

## 2. Нелинейная система на базе цифрового фильтра

В работе [10] синтезирована структурная схема системы (рис. 6), реализующей алгоритм цифровой фильтрации с использованием характеристической функции Ляпунова

$$B_u(V_k) = B_z(V_m) / A_n(V), \quad (3)$$

где  $A_n(V)$  – действительная часть характеристической функции шума,  $B_u(V_k)$ ,  $B_z(V_m)$  – мнимая часть характеристической функции сигнала и аддитивной смеси (1) соответственно;

$V$ ,  $V_k$ ,  $V_m$  – параметр характеристической функции шума, сигнала, аддитивной смеси соответственно.

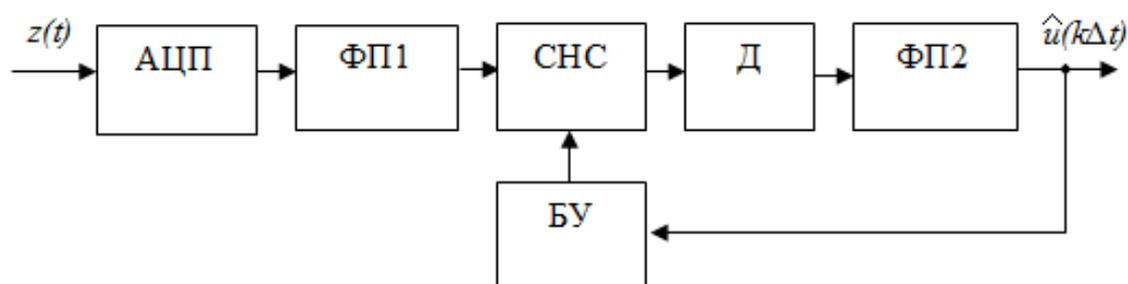


Рис. 6. Структурная схема цифрового фильтра (ЦФ):  $\hat{u}(k\Delta t)$  – оценка сигнала на выходе фильтра.

На структурной схеме рис. 6 имеются: АЦП – аналого-цифровой преобразователь; ФП1 – функциональный преобразователь первый;

СНС – сумматор накапливающий со скользящим усреднением; Д – делитель на коэффициент  $R$ ; ФП2 – функциональный преобразователь второй; БУ – блок управления. Помимо стандартных блоков линейного ЦФ в данной структурной схеме содержатся блок деления на константу  $R$  и нелинейные функциональные преобразователи ФП1, ФП2 прямой и обратной тригонометрической функции синус соответственно.

В соответствии с алгоритмом (3) на выходе блока СНС имеем [10]:

$$\hat{B}_z(V, t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin[z(k\Delta t) \cdot V], \quad (4)$$

где обозначение  $\hat{B}_z(\cdot)$  указывает на получение значений оценки характеристической функции при конечном числе  $N$ . В структурной схеме ЦФ на рис. 6 включено скользящее усреднение, поэтому выражение (4) следует переписать в другом виде

$$\hat{B}_z(V, k\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sin[z((k-l)\Delta t) \cdot V], \quad (5)$$

где  $l$  – целое число. Выражение (5) использовано в дальнейшем при моделировании входных блоков вместе с блоком СНС нелинейной системы, представленной на рис. 6.

При проведении моделирования и на рис. 7 применены следующие обозначения:  $h_{\text{ВХ}}^2 = (\sigma_{\text{с}}^2)_{\text{ВХ}} / (\sigma_{\text{ш}}^2)_{\text{ВХ}}$  – отношение по мощности сигнал/шум на входе ЦФ;  $h_{\text{ВЫХ}}^2 = (\sigma_{\text{с}}^2)_{\text{ВЫХ}} / (\sigma_{\text{ш}}^2)_{\text{ВЫХ}}$  – отношение по мощности сигнал/шум на выходе ЦФ;  $h_{\text{ВХ}}, h_{\text{ВЫХ}}$ , – отношение по напряжению сигнал/шум на входе и выходе ЦФ соответственно;  $m_2 = [U_0^2 / 2] + e_0^2$  – энергия нецентрированного сигнала (2);  $\sigma_{\text{с}}^2 = U_0^2 / 2$  – энергия центрированного сигнала. В модели ЦФ использовалось значение  $N = 5$ .

### 3. Анализ результатов моделирования нелинейной системы

Результаты моделирования нелинейной системы в виде графиков 1, 2 представлены на рис. 7. Причем реализации квазидетерминированного сигнала имели ключи:  $V00 = 1.000099977648006\text{E}-002$  ( $\varphi = 5$ ),

$V01 = 2.000099955296264E-002$  ( $\varphi = 5$ ), а у реализации шума был ключ  $V0 = 1.834215897314670E-001$ . Оценки вероятностных характеристик такой реализации шума показаны на рис. 1, 2. Они позволяют говорить, что шум не является гауссовым и «белым», поскольку плотность вероятностей мгновенных значений шума имеет трапецеидальный вид, а неравномерность спектральной плотности мощности шума превышает 41 %.

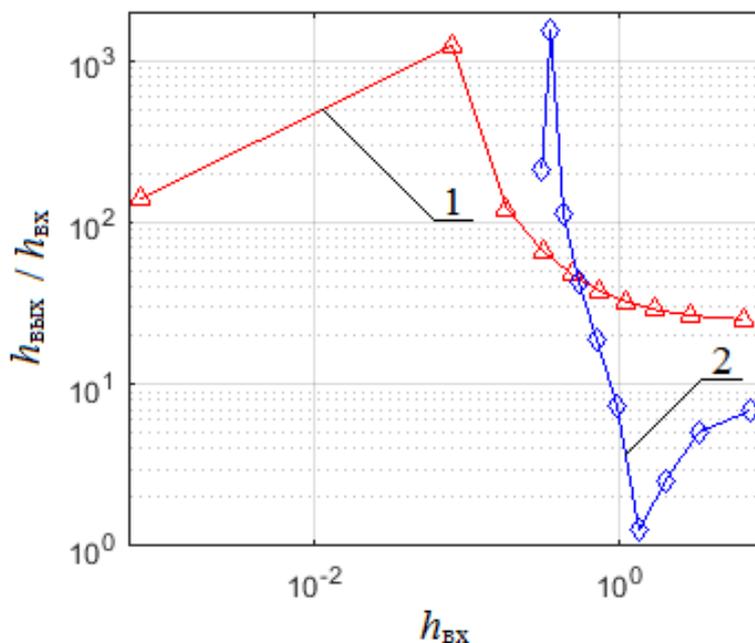


Рис. 7. Результаты моделирования нелинейной системы:  
 кривая 1 – центрированный сигнал;  
 кривая 2 – нецентрированный сигнал.

Повторное моделирование нелинейной системы с другим шумом, а именно с ключом  $V0 = 1.001000014875899E-001$  результаты не изменило. Графики 1, 2 на рис. 7 точно совпали, когда использовались реализации квазидетерминированного сигнала с указанными выше ключами  $V00 = 1.000099977648006E-002$  ( $\varphi = 5$ ),  $V01 = 2.000099955296264E-002$  ( $\varphi = 5$ ). Характеристики реализаций сигналов не изменились. Напомним, что характеристики сигналов отличаются только значениями математического ожидания, у нецентрированного сигнала оно равно  $e_0 = 0,3$ . Оценки вероятностных характеристик новой реализации шума представлены на рис. 3, 4. Их анализ показывает, что шум близок к гауссову, но не является

«белым», поскольку неравномерность спектральной плотности мощности шума превышает 28 %.

Кривые 1, 2 на рис. 7 показывают увеличение отношения сигнал/шум на выходе нелинейной системы (т. е. имеется признак эффекта стохастического резонанса) при изменении интенсивности шума на ее входе. Причем кривая 1 получена при аддитивной смеси (1) на входе системы с центрированным квазидетерминированным сигналом, а кривая 2 – с нецентрированным сигналом (2). Оба графика на рис. 7 подтверждают наличие явления стохастического резонанса в нелинейной системе при преобразовании ею аддитивной смеси (1) с разными характеристиками слагаемых, рассмотренных выше. Более того, подтверждается сделанный ранее авторами работ [6, 7] вывод о том, что стохастический резонанс не зависит от характеристик шума. Более точно они пишут, что шум по своим статистическим свойствам может быть близок к «белому» шуму, а может и отличаться от него, но иметь, по нашему мнению, математическое ожидание, равное нулю.

Стохастический резонанс зависит от характеристик периодического сигнала. Кривые 1, 2 значительно отличаются друг от друга. Кривая 1 повторяет классическую форму графика резонанса с одним максимумом, а кривая 2 отличается от классической формы и, кроме того, имеет минимум. При стохастическом резонансе отношение  $(h_{\text{ВЫХ}} / h_{\text{ВХ}}) = 1520,95$  для сигнала (2) и отношение  $(h_{\text{ВЫХ}} / h_{\text{ВХ}}) = 1237,97$  для центрированного сигнала, т.е. при отношении на входе ЦФ  $h_{\text{ВХ}} = 0,08$  отношение на выходе ЦФ увеличилось у центрированного сигнала в 15474 раза или только в 4296 раза у сигнала (2). Вполне закономерно возникает вопрос: почему такая разница в цифрах? Ответ на этот вопрос вытекает из следующих вычислений по формулам, приведенным выше. Полная энергия центрированного сигнала  $\sigma_c^2 = U_0^2 / 2 = 0,405$ . Полная энергия нецентрированного сигнала  $m_2 = [U_0^2 / 2] + e_0^2 = 0,495$ . Отношение  $m_2 / \sigma_c^2 = 1,22$ . Отношение максимальных значений стохастического резонанса в нелинейной системе с разными квазидетерминированными сигналами равно  $1520,95 / 1237,97 = 1,22$ . Следовательно, значение вершины

стохастического резонанса в системе определяется полной энергией сигнала, так как полная энергия шума в обоих случаях одинаковая.

Кроме того, обратим внимание на следующий факт. Если бы исследование нелинейной системы начиналось при отношении  $h_{\text{вх}} = 0,1$  или более, то кривая 1 была бы монотонно убывающей функцией, а вершина стохастического резонанса с показателем 1237,97 осталась бы за «кадром». Тогда могло возникнуть ложное мнение, будто явление стохастического резонанса в системе отсутствует. Однако это не так. Явление стохастического резонанса имеет место, если отношение сигнал/шум на выходе нелинейной системы больше, чем на ее входе. При этом вершина резонансной кривой обязательно существует, а при необходимости ее можно определить. Заметим, по словам авторов обзора [3], стохастический резонанс появляется при слабом периодическом сигнале, т.е. при малом отношении сигнал/шум на входе системы. При большом отношении сигнал/шум на входе системы показатель стохастического резонанса проявляется слабее. Например, у кривой 1 на рис. 7 показатель резонанса равен 25,1 при  $h_{\text{вх}} = 6,55$ , т. е. он в 49 раз меньше показателя 1237,97.

На рис. 7 формы кривых 1, 2 различаются. Кривая 2 опускается вниз до показателя  $(h_{\text{вых}} / h_{\text{вх}}) = 1,25$  при  $h_{\text{вх}} = 1,345$ , а потом опять поднимается вверх. Показатель со значением  $(h_{\text{вых}} / h_{\text{вх}}) = 1,25$  можно считать признаком анти резонанса в нелинейной системе. Анти резонанс, по нашему мнению, возникает в нелинейной системе за счет математического ожидания, создающего разницу так называемых потенциальных барьеров у положительной полуволны и отрицательной полуволны нецентрированного квазидетерминированного сигнала, которые для наглядности представления заимствованы из работы [1] и показаны на рис. 8а. У центрированного квазидетерминированного сигнала обе полуволны в нелинейной системе имеют одинаковые значения потенциальных барьеров (рис. 8б). Поэтому кривая 2 не опускается вниз, а переходит в монотонно падающую линию.

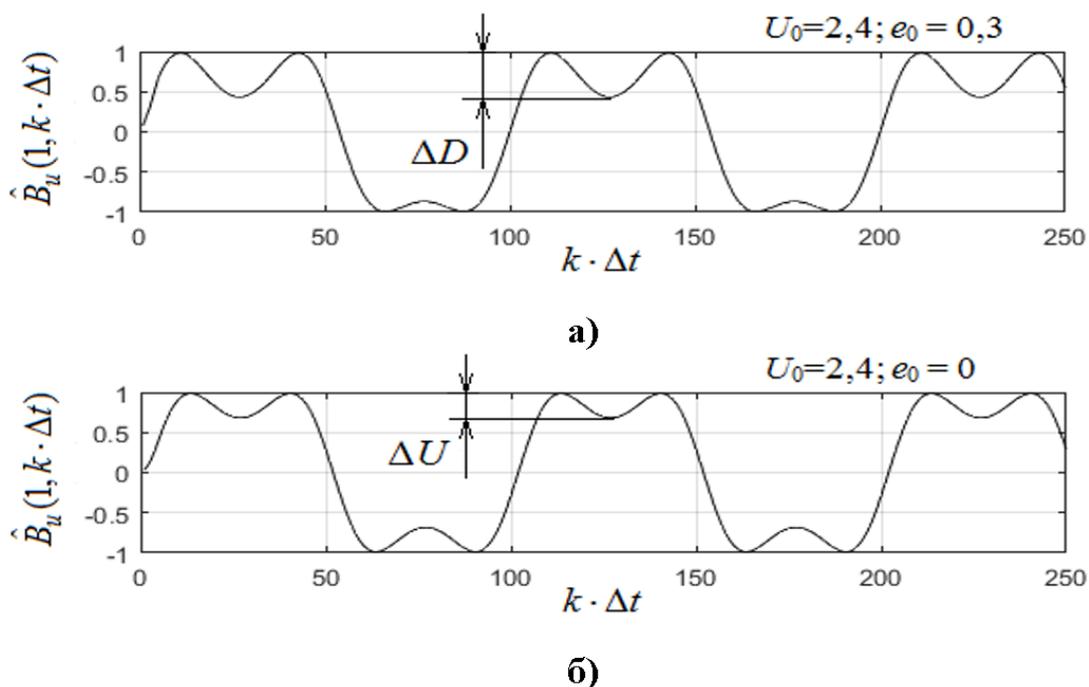


Рис. 8. Результаты моделирования нелинейной системы:  
 $\Delta D, \Delta U$  – потенциальные барьеры;  $\Delta D > \Delta U$ .

## Заключение

По итогам проведенных исследований и на основе полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1) В нелинейной системе, построенной по схеме цифрового фильтра с использованием характеристической функции Ляпунова, установлено явление стохастического резонанса при преобразовании аддитивной смеси квазидетерминированного сигнала и шума, причем эффект стохастического резонанса не зависит от вариации статистики шума. Шум по своим статистическим свойствам может быть близок к «белому» шуму, а может и отличаться от него;

2) Вероятностные характеристики квазидетерминированного сигнала в аддитивной смеси влияют на значения признаков стохастического резонанса в нелинейной системе, например, на значения отношения сигнал/шум на выходе системы, устанавливая, таким образом, зависимость максимального значения признака резонанса от полной энергии сигнала. Сигналу с большой энергией соответствует большое значение показателя признака стохастического резонанса;

3) Значение математического ожидания квазидетерминированного сигнала в аддитивной смеси, поступающей на вход нелинейной системы, влияет на показатели и на форму кривой стохастического резонанса. Любое, не равное нулю, значение математического ожидания сигнала приводит в нелинейной системе к появлению отличия так называемых потенциальных барьеров для положительной и отрицательной полувольт сигнала. При этом у центрированного квазидетерминированного сигнала резонансная кривая стохастического резонанса по форме приближается к классической резонансной кривой, в то время как у нецентрированного квазидетерминированного сигнала она опускается вниз, а потом вновь поднимается вверх, образуя анти резонанс;

4) Максимальное значение признака стохастического резонанса на резонансной кривой получается при малом отношении сигнал/шум на входе нелинейной системы. Однако, встречаются резонансные кривые в виде монотонно падающей линии, на которых вершина признака стохастического резонанса отсутствует, т. е. вершина на рисунке кривой не обозначена, она осталась за «кадром». Утверждаем, что вершина резонансной кривой обязательно существует и при необходимости ее можно восстановить, если продолжить исследование при меньших значениях отношения сигнал/шум на входе системы, чем они были указаны на оси абсцисс полученной ранее кривой.

### Литература

1. Вешкурцев, Ю. М. Стохастический резонанс в цифровом фильтре на основе характеристической функции Ляпунова / Ю. М. Вешкурцев, Д. А. Титов, А. С. Табакова. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.6.7> // Журнал радиоэлектроники. – 2023. – №. 6.
2. Вешкурцев, Ю. М. Спектральные характеристики выходных сигналов цифрового фильтра в условиях возникновения стохастического резонанса / Ю. М. Вешкурцев, Д. А. Титов, А. С. Табакова // Теория и техника радиосвязи. – 2023. – № 2. – С. 28–37.

3. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка / В. С. Анищенко, А. Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер // Успехи физических наук. – 1999. – Т. 169, №. 1. – С. 7–38.
4. Климонтович, Ю. Л. Что такое стохастическая фильтрация и стохастический резонанс? / Ю. Л. Климонтович // Успехи физических наук. – 1999. – Т. 169, № 1. – С. 39–47.
5. Neiman, A. Stochastic resonance in bistable systems driven by harmonic noise / A. Neiman, L. Schimansky-Geier. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.2988> // Physical review letters. – 1994. – Vol. 72 (19). – P. 2988–2991.
6. Can colored noise improve stochastic resonance? / P. Hänggi, P. Jung, C. Zerbe, F. Moss // Journal of Statistical Physics. – 1993. – Vol. 70. – P. 25–47.
7. Neiman, A. Memory effects on stochastic resonance / A. Neiman, W. Sung // Physics Letters A. – 1996. – Vol. 223, no. 5. – P. 341–347.
8. Левин, Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. – 3-е изд. перераб. и доп. – Москва : Радио и связь, 1989. – 656 с. – ISBN 5-256-00264-3.
9. Вешкурцев, Ю. М. Приборостроение на базе характеристической функции случайных процессов : моногр. / Ю. М. Вешкурцев, Н. Д. Вешкурцев, Д. А. Титов. – Новосибирск : Сибирская академическая книга, 2018. – 182 с. – ISBN 978-5-4379-0592-0.
10. Вешкурцев, Ю. М. Фильтрация в пространстве вероятностей аддитивной смеси нецентрированного квазидетерминированного сигнала и шума / Ю. М. Вешкурцев, Н. Д. Вешкурцев, Д. А. Титов // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2018. – №. 3. – С. 18–23.

**Для цитирования:**

Вешкурцев Ю.М., Титов Д.А., Табакова А.С. Зависимость стохастического резонанса в нелинейной системе от характеристик каждого слагаемого аддитивной смеси // Журнал радиоэлектроники. – 2023. – №. 10. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.10.10>