

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.10.2>

УДК: 530.182

СВЯЗАННЫЕ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ С РАЗНЫМИ ТИПАМИ СВЯЗИ (ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ)

А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова

Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
410019, Саратов, ул. Зеленая, 38

Статья поступила в редакцию 14 июня 2024 г.

Аннотация. В работе рассмотрены режимы двух связанных радиофизических генераторов квазипериодических колебаний с реактивной, комбинированной и активной связью. С целью упрощения исследования введена дискретная версия исследуемой системы. Представлены ляпуновские карты, иллюстрирующие различные режимы, включая квазипериодические колебания с разным числом несоизмеримых частот. Для чисто реактивной связи по сравнению с диссипативной отсутствует режим устойчивого равновесия, а области двухчастотных режимов имеют очень малый размер. Для диссипативной связи при добавке реактивной компоненты характерные режимы при большой связи сохраняются. При малой связи исчезают пятичастотные режимы; их вытесняют сначала четырехчастотные, а затем трехчастотные, хаотические и гиперхаотические. Для реактивной связи с добавкой диссипативной языки трехчастотных режимов имеют не острия, а занимают определенные интервалы на оси частотной расстройки. Для активной (отталкивающей) связи также отсутствует устойчивое равновесие. Становится характерной трехчастотная область со встроенной системой языков резонансных двухчастотных режимов, перекрытие которых приводит к хаосу.

Ключевые слова: квазипериодичность, хаос, ляпуновские показатели.

Финансирование: Работа выполнена по государственному заданию Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

Автор для переписки: Седова Юлия Викторовна, sedovayv@yandex.ru

Введение

Связанные автоколебательные системы представляют собой классический предмет исследования в теории синхронизации [1-4]. Одним из основных примеров является генератор (осциллятор) ван дер Поля [1-5]. При этом важным фактором является характер связи генераторов. Выделяют два основных типа связи [1-10]. В первом случае диссипативной связи она осуществляется через скорости изменения переменных. Одним из наиболее характерных феноменов в такой системе является эффект гибели (гашения) колебаний, когда связь подавляет автоколебательные свойства генераторов [2-4,8,9]. Альтернативным является случай реактивной связи (ее иногда называют также консервативной [9]), когда связь осуществляется непосредственно через переменные [1-5]. В электронных схемах первый тип связи реализуется через резистор, а второй – через реактивный элемент с мнимым импедансом. Еще рассматривают случай «активной» связи, когда параметр диссипативной связи имеет отрицательное значение. Подобную связь называют также отталкивающей (*repulsive coupling*). Причина состоит в том, что для двух связанных осцилляторов ван дер Поля для данного типа связи синфазные колебания становятся неустойчивыми [2,4]. Этот тип связи достаточно популярен, причем не только для осцилляторов ван дер Поля [11,12], но и для задач лазерной физики, хаотических осцилляторов и др. [13-20]. В случае электронной схемы такая связь может быть обеспечена за счет включения активного элемента (например, операционного усилителя) в цепь связи.

Наряду с генераторами периодических и хаотических колебаний были введены в рассмотрение и исследованы примеры генераторов, способных

демонстрировать автономные квазипериодические колебания [21-26]. Соответственно, возникает задача о колебательных режимах связанных таких генераторов [22,27-29]. Отметим, что такие генераторы играют заметную роль в развитии и иллюстрациях теории многочастотных колебаний и бифуркаций таких режимов. Предыдущее рассмотрение, однако, относилось к простейшему случаю диссипативной связи. Мы здесь обсудим случаи реактивной, комбинированной и активной связи квазипериодических генераторов.

1. Исследуемая система

Будем использовать радиофизический генератор квазипериодических колебаний [25], допускающий экспериментальную реализацию [30]:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= -bz - k\dot{x}^2.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь x, z – динамические переменные, ω_0 – собственная частота генератора, λ – параметр возбуждения (отрицательного трения), аналогичный управляющему параметру системы Ван дер Поля. Значения остальных параметров выбираем в соответствии с [25,27]: $b = 1, k = 0.02, \beta = 1/18, \omega_0 = 2\pi$. Этот набор отвечает автономному квазипериодическому режиму. Отметим, что с ростом ω_0 генератор может перейти в обычный периодический режим.

Два диссипативно связанных генератора такого типа описываются уравнениями [27-29]:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda_1 + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x + \mu(\dot{x} - \dot{u}) &= 0, \\ \dot{z} &= -bz - k\dot{x}^2, \\ \ddot{u} - (\lambda_2 + w + u^2 - \beta u^4)\dot{u} + (\omega_0 + \Delta)^2 u + \mu(\dot{u} - \dot{x}) &= 0, \\ \dot{w} &= -bw - k\dot{u}^2.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь Δ – частотная расстройка генераторов, μ – параметр диссипативной связи. В работах [27-29] были выявлены различные типы синхронизации квазипериодических генераторов, включая эффекты широкополосных квазипериодических колебаний, а также обсуждается возникновение хаоса с дополнительным нулевым ляпуновским показателем. В [28] рассмотрен режим,

когда в автономной системе разрушен инвариантный тор, являющийся образом квазипериодических колебаний в фазовом пространстве.

Система (2) требует достаточно кропотливого и емкого исследования. В подобных случаях иногда используют переход от системы с непрерывным временем к ее дискретному аналогу, заменяя производные по времени конечными разностями. Многочисленные примеры для систем различной природы можно найти в обзорной части [31]. При этом дискретная модель как наследует существенные свойства системы-прототипа, так и демонстрирует дополнительные возможности. Такой прием позволил ввести в рассмотрение и исследовать дискретную версию генератора (1) [32] и дискретную версию диссипативно связанных генераторов (2) [33]. В данном сообщении мы используем данный подход, чтобы обсудить влияние характера связи на картину режимов. Отметим, что полученное отображение имеет и самостоятельное значение в теории дискретных динамических систем.

По аналогии с (2) можно записать уравнения системы с реактивной связью. Это легко и корректно сделать, поскольку первое уравнение (1) представляет собой обобщенный осциллятор ван дер Поля, для которого связь описывается хорошо известным образом [1-5]. Тогда с учетом двух типов связи получаем

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x + \mu(\dot{x} - \dot{u}) + \gamma(x - u) &= 0, \\ \dot{z} &= -bz - k\dot{x}^2, \\ \ddot{u} - (\lambda_2 + w + u^2 - \beta u^4)\dot{u} + (\omega_0 + \Delta)^2 u + \mu(\dot{u} - \dot{x}) + \gamma(u - x) &= 0, \\ \dot{w} &= -bw - k\dot{u}^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь μ – параметр диссипативной, а γ – реактивной связи.

Построим теперь точечное отображение. По аналогии с [32,33], используя переменные $y = \dot{x}$, $v = \dot{u}$ и проводя дискретизацию системы (3), получим

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + h \cdot y_{n+1}, \\
 y_{n+1} &= y_n + h \cdot \left((\lambda_1 + z_n + x_n^2 - \beta x_n^4) y_n - \omega_0^2 x_n - \mu(y_n - v_n) - \gamma(x_n - u_n) \right), \\
 z_{n+1} &= z_n + h \cdot (-bz_n - ky_n^2), \\
 u_{n+1} &= u_n + h \cdot v_{n+1}, \\
 v_{n+1} &= v_n + h \cdot \left((\lambda_2 + w_n + u_n^2 - \beta u_n^4) v_n - (\omega_0 + \Delta)^2 u_n - \mu(v_n - y_n) - \gamma(u_n - x_n) \right), \\
 w_{n+1} &= w_n + h \cdot (-bw_n - kv_n^2).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь h – шаг дискретного времени. Отметим, что для первого и третьего уравнения дискретизация выполнена по полуявной схеме Эйлера, т.е. используется значение переменных y и v в $n + 1$ -ый момент, что является более корректным с точки зрения соответствия непрерывной и дискретной моделей [34,35].

2. Реактивная связь

Чтобы выявить возможные типы колебаний системы (4), построим численно ляпуновские карты на плоскости параметров частотная расстройка – величина связи. В рамках этого метода тип режима определяется по спектру показателей Ляпунова Λ_n в соответствии с Таблицей 1, а плоскость параметров окрашивается в разные цвета, свои для каждого режима.

Используем маленькое значение $h = 0.01$. Для сравнения на рис. 1а приведена ляпуновская карта системы с диссипативной связью ($\gamma = 0$) [33], а на рис. 1б – с реактивной ($\mu = 0$). Для общности, как и в [27,33], генераторы полагаем неидентичными по параметрам возбуждения: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3.5$. Цветовая палитра расшифрована внизу рисунка. Отметим, что для значения $h = 0.01$ карта для отображения с диссипативной связью визуально совпадает с аналогичной картой для системы с непрерывным временем [27]. (Точное соответствие получается при $h \rightarrow 0$.) Отличие состоит в появлении в системе с непрерывным временем дополнительного нулевого показателя Ляпунова, так что периодический режим превращается в двухчастотный, двухчастотный – в трехчастотный и т.д. Иными словами, карта перекрашена со сдвигом в Таблице на одну позицию (детали см. в [33]).

Таблица 1. Типы режимов и спектр показателей Ляпунова.

Обозначение	Тип режима	Спектр показателей Ляпунова
Е, Р	Состояние равновесия или периодический (цикл)	$\Lambda_{1,2,3,4,5,6} < 0$
2Т	двухчастотный квазипериодический	$\Lambda_1 = 0, \Lambda_{2,3,4,5,6} < 0$
3Т	трехчастотный квазипериодический	$\Lambda_{1,2} = 0, \Lambda_{3,4,5,6} < 0$
4Т	четырёхчастотный квазипериодический	$\Lambda_{1,2,3} = 0, \Lambda_{4,5,6} < 0$
5Т	пятичастотный квазипериодический	$\Lambda_{1,2,3,4} = 0, \Lambda_{5,6} < 0$
С	Хаос	$\Lambda_1 > 0, \Lambda_{2,3,4,5,6} < 0$
Н	Гиперхаос	$\Lambda_{1,2} > 0, \Lambda_{3,4,5,6} < 0$
Д	Разбегание траекторий	

Как видно из рис. 1а, для диссипативной связи к основным элементам на плоскости параметров относится область устойчивого равновесия Е, являющаяся аналогом режима гибели (гашения) колебаний в потоковой системе [27]. Ее границей является линия бифуркации Неймарка-Сакера NS рождения двухчастотного режима. При большой расстройке Δ для нее из физических соображений имеем оценку $\mu \approx \max(\lambda_1, \lambda_2)$. При уменьшении связи мы через квазипериодическую бифуркацию Хопфа QH_1 попадаем в область трехчастотной квазипериодичности 3Т и далее, через аналогичную бифуркацию QH_2 – в область четырехчастотной 4Т. В области большой расстройки Δ режимы 2Т и 3Т наблюдаются в широком диапазоне Δ , так что в [27,33] они классифицируются как «широкополосные». Весьма характерным является большой язык трехчастотного режима с вершиной в точке совпадения собственных частот генераторов $\Delta = 0$. Можно также видеть систему резонансных трехчастотных языков, встроенных в четырехчастотную область. При малой связи возможны пятичастотные режимы 5Т.

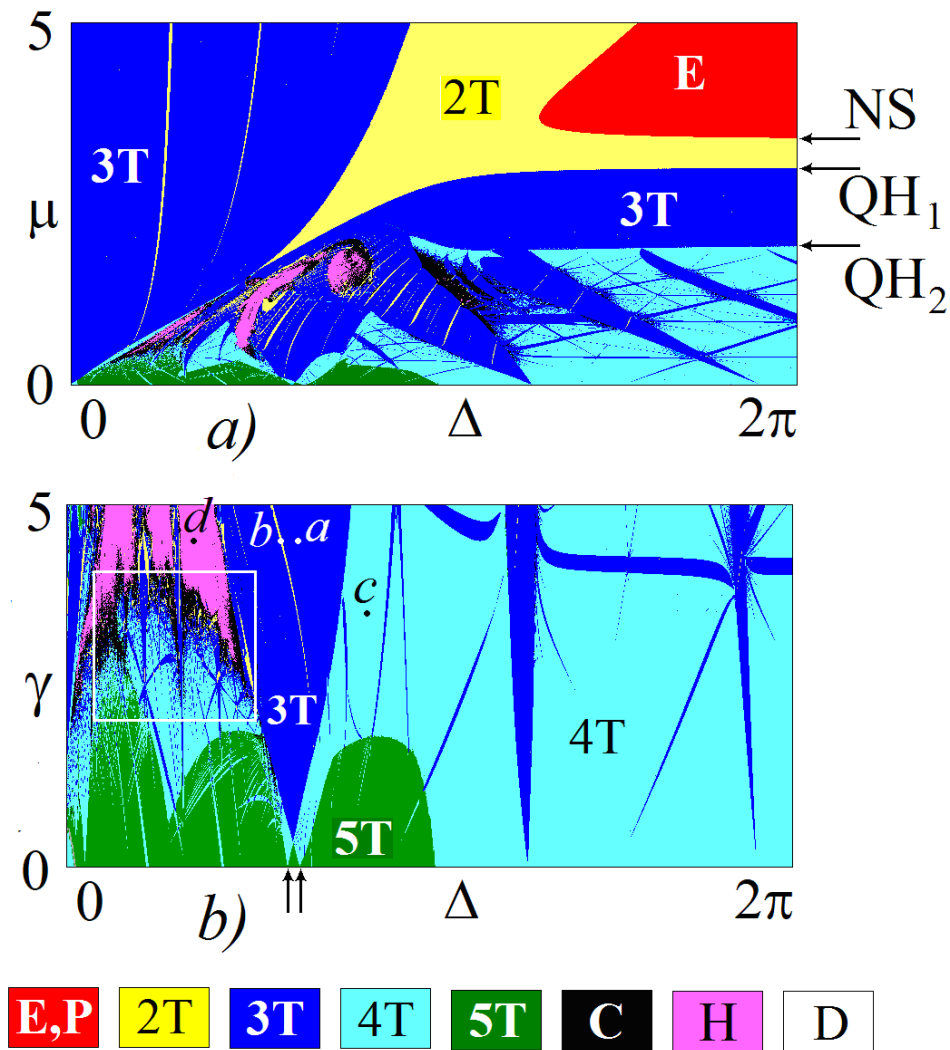


Рис. 1. Ляпуновские карты квазипериодических генераторов (4) с чисто диссипативной (a) и реактивной связью (b).

Как видно из рис. 1b, многие элементы этой картины в случае реактивной связи не наблюдаются. В частности, отсутствует режим устойчивого равновесия E, а области двухчастотных режимов 2T имеют очень малый размер. Однако сохраняются резонансные трехчастотные языки, хотя они и меняют форму. При этом область основного трехчастотного резонанса $\Delta = 0$ исчезает. Вместо нее наблюдается картина, демонстрирующая все характерные режимы. Соответствующий увеличенный фрагмент карты показан на рис. 2. Отметим появление более обширной области гиперхаоса H. На рис. 2 можно видеть нелинейный феномен, известный как резонансная паутина Арнольда [36]. Паутина представляет собой иерархически организованную систему «нитей» трехчастотных режимов, погруженных в четырехчастотную область.

На пересечении таких нитей лежат двухчастотные острова. Отличие от диссипативного случая в том, что для него такая паутина возникает только при достаточно большой расстройке генераторов Δ , причем двухчастотные острова для диссипативной связи не характерны.

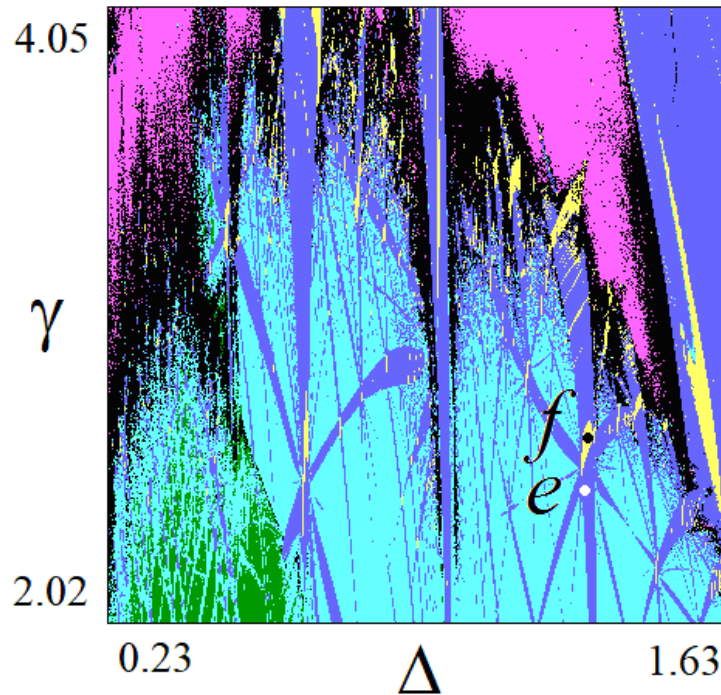


Рис. 2. Увеличенный фрагмент ляпуновской карты рис. 1*b* квазипериодических генераторов с реактивной связью.

Для реактивной связи наиболее выраженным оказывается трехчастотный резонансный язык, отмеченный как 3Т на рис. 1*b*. Он имеет порог по величине связи и возникает в результате перекрытия двух четырехчастотных языков, острия которых отмечены стрелочками на рис. 1*b*.

На рис. 3 показаны примеры фазовых портретов системы с реактивной связью в проекции на плоскость (x_n, y_n) . Буквы соответствуют точкам на картах рис. 1*b* и рис. 2. Рис. 3*a* демонстрирует трехчастотный тор внутри основного языка трехчастотного режима. Рис. 3*b* отвечает несколько уменьшенному значению Δ , и демонстрирует возникающий на его поверхности резонансный двухчастотный режим, которому соответствует трехоборотная инвариантная кривая. Рис. 3*c* представляет четырехчастотный тор, а рис. 3*d* – гиперхаос. Рис. 3*e, f* относятся к области резонансной паутины: рис. 3*e* дает трехчастотный

тор в одной из ее «нитей», а рис. 3*f* – соответствует двухчастотному острову на пересечении таких нитей. Можно видеть, что соответствующая инвариантная кривая имеет много оборотов вокруг начала координат. При этом на трехчастотном торе просматриваются области сгущения траекторий, из которых и возникает резонансная инвариантная кривая, что сигнализирует о наличии седло-узловой бифуркации инвариантных кривых [37].

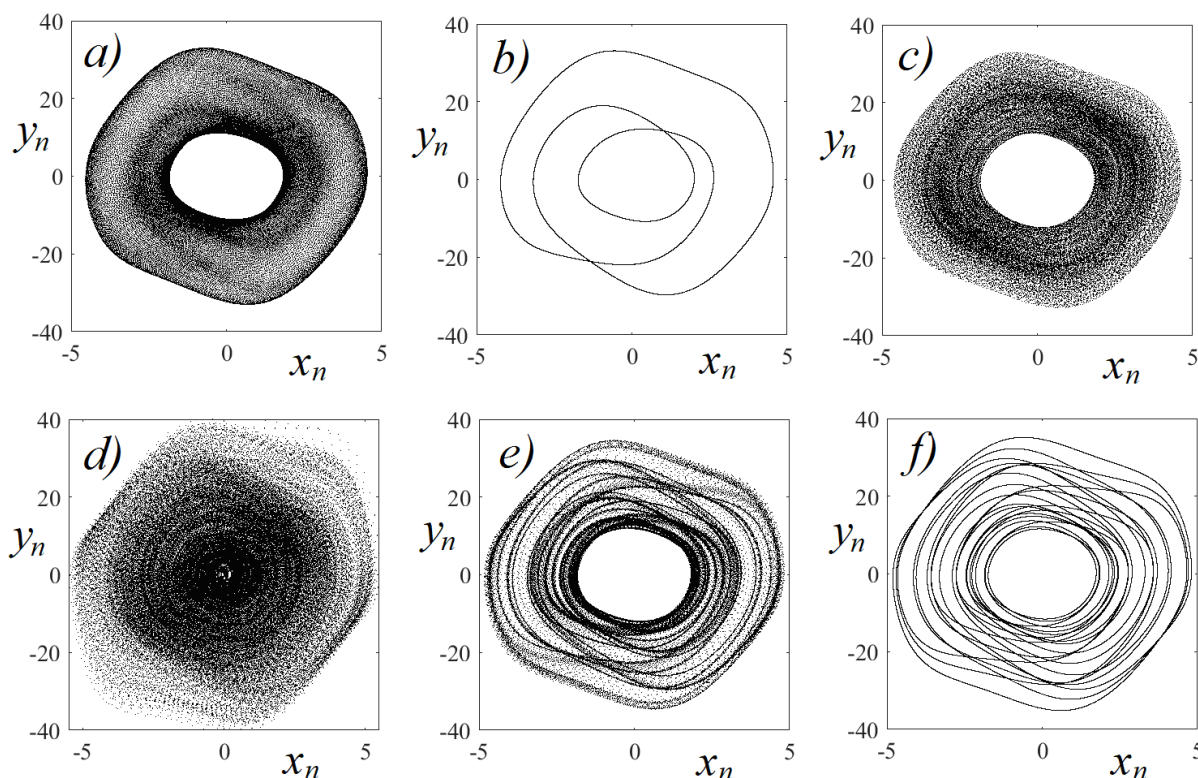


Рис. 3. Фазовые портреты квазипериодических генераторов с реактивной связью; *a*) $\Delta = 2, \gamma = 4.5$, *b*) $\Delta = 1.85, \gamma = 4.5$, *c*) $\Delta = 2.6, \gamma = 3.5$, *d*) $\Delta = 1.1, \gamma = 4.5$, *e*) $\Delta = 1.3, \gamma = 2.45$, *f*) $\Delta = 1.32, \gamma = 2.63$.

3. Комбинированная связь

Рассмотрим теперь случай, когда присутствуют оба типа связи: диссипативная и реактивная. На рис. 4 показана плоскость параметров (Δ, μ) в случае возрастающего уровня реактивной связи γ : *a*) $\gamma = 2.75$, *b*) $\gamma = 4$. Можно видеть, что большая диссипативная связь «подавляет» реактивную. В обоих случаях на рис. 4 при $\mu > 2$ сохраняются характерные для диссипативной связи области устойчивого равновесия E , а также двух- и трехчастотной квазипериодичности $2T$ и $3T$. Это, несмотря на достаточно большие значения

параметра реактивной связи γ . Существенно, что и при малой диссипативной связи μ в области частотных расстройок $\Delta > \pi$ картина также сохраняется при разных γ . На всех рис. 1а и рис. 4а, б в этой области можно видеть аналогичную картину резонансной паутины на базе четырехчастотных режимов.

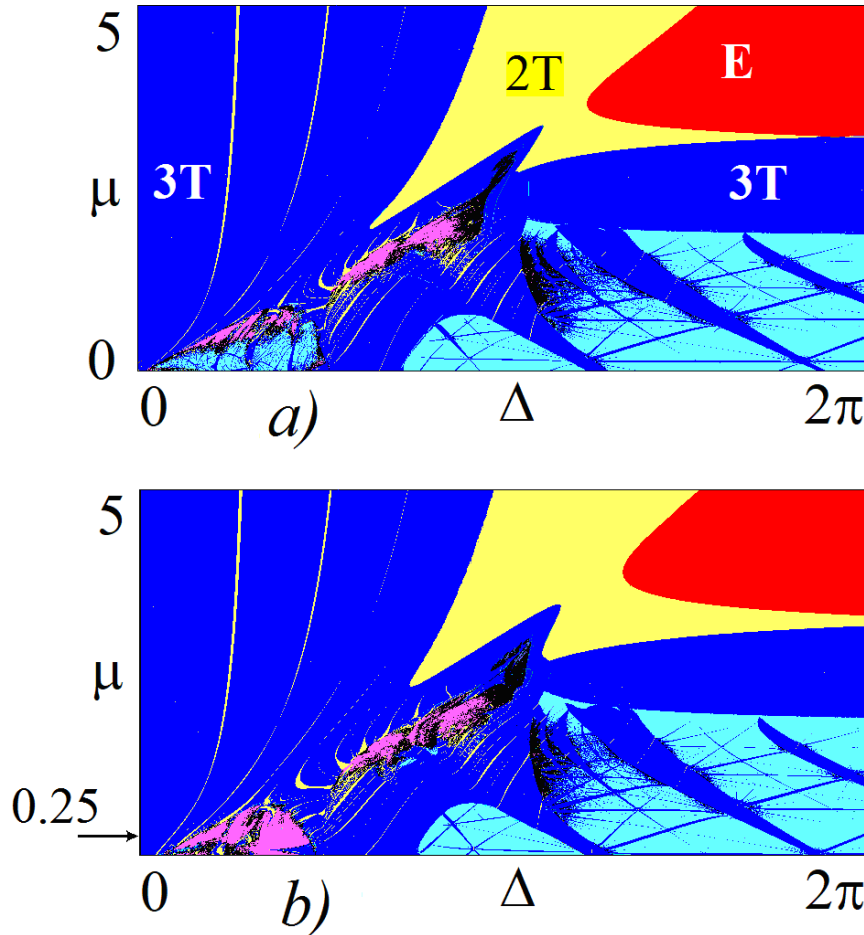


Рис. 4. Карты ляпуновских показателей в системе с диссипативной связью с добавкой реактивной; а) $\gamma = 2.75$, б) $\gamma = 4$.

Заметные изменения происходят только в области частотных расстройок $\Delta < \pi$ при малой диссипативной связи. При $\gamma = 2.75$ в этом случае область пятичастотных режимов исчезает, и ее вытесняют четырехчастотные режимы, рис. 4а. При увеличении параметра реактивной связи до $\gamma = 4$ доминируют уже трехчастотные режимы и гиперхаос, рис. 4б. Подчеркнем, что для чисто диссипативной связи гиперхаос в этой области не наблюдается.

Проиллюстрируем колебательные режимы в этой области. На рис. 5 показаны соответствующие графики ляпуновских показателей в зависимости от

расстройки Δ для значений параметров связи $\mu = 0.25$ (отмечено стрелкой на карте рис. 4b) и $\gamma = 4$. При малой расстройке Δ наблюдается трехчастотный режим 3Т с $\Lambda_{1,2} = 0$, отвечающий основному языку на карте. С ростом расстройки он в узкой области параметра превращается в двухчастотный 2Т с $\Lambda_1 = 0$, который затем разрушается с образованием хаоса С с $\Lambda_1 > 0$. Хаос также быстро превращается в гиперхаос Н с $\Lambda_{1,2} > 0$. Далее области гиперхаоса доминируют.

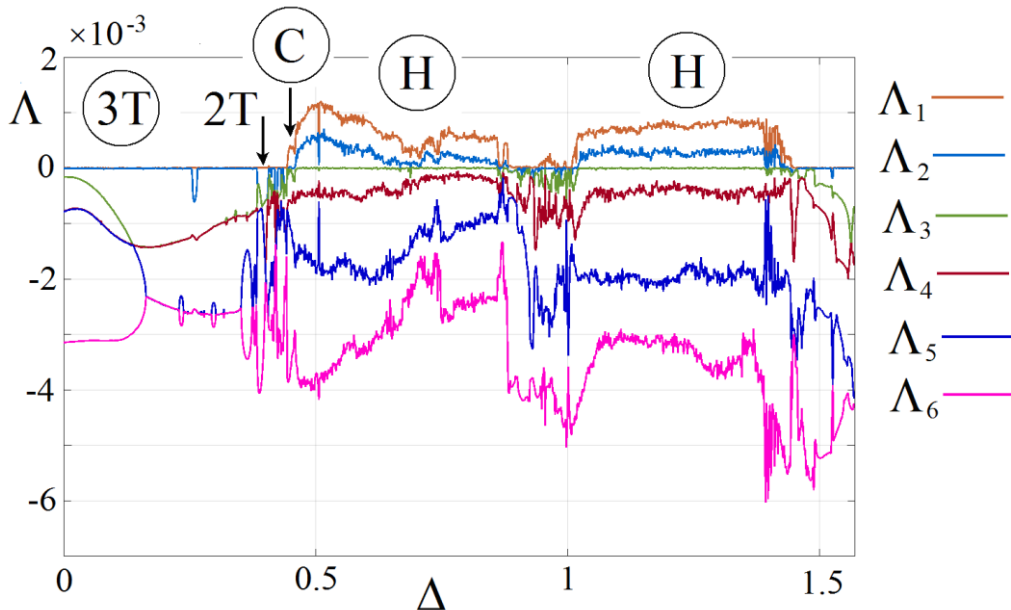


Рис. 5. Графики ляпуновских показателей Λ_n в зависимости от частотной расстройки Δ для системы с комбинированной связью, $\mu = 0.25$, $\gamma = 4$.

Обратимся теперь к плоскости (Δ, γ) для фиксированной диссипативной связи: *a)* $\mu = 0.5$ и *b)* $\mu = 2$, показанной на рис. 6. Можно видеть, что в первом случае изменения наблюдаются уже при не очень большой добавке альтернативного вида связи. Пятичастотные режимы на рис. 6a исчезают, вместо них наблюдаются трех- и четырехчастотные. Характерный момент состоит в том, что языки трехчастотных торов, в отличие от рис. 1b, имеют не острия на оси $\gamma = 0$, а занимают определенные интервалы по расстройке Δ . Отметим, что для двух осцилляторов ван дер Поля с реактивной связью с добавкой диссипативной наблюдается аналогичное поведение, но для языков периодических режимов [38]. Таким образом, можно отметить, что это характерная черта автоколебательных систем с комбинированной связью.

При увеличении добавки диссипативной связи на рис. 6*b* языки трехчастотных режимов сливаются, так что трехчастотный режим при $\mu > 2$ доминирует практически для всех значений Δ и γ .

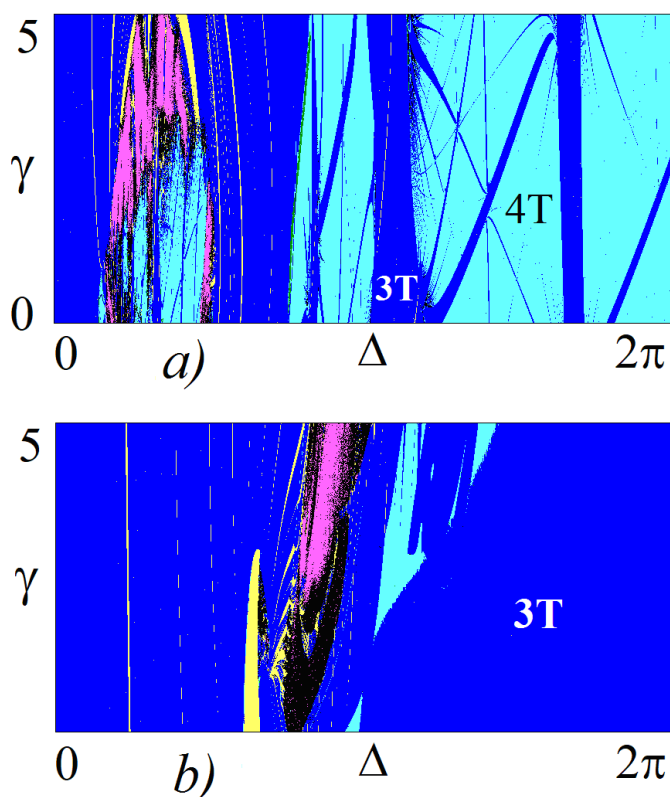


Рис. 6. Карты ляпуновских показателей в системе с реактивной связью с добавкой диссипативной; *a*) $\mu = 0.5$, *b*) $\mu = 2$.

4. Активная связь

Рассмотрим далее случай активной (отталкивающей) связи. Он описывается уравнениями (4), в которых следует положить $\gamma = 0$ и использовать отрицательные значения параметра связи $\mu < 0$. Соответствующая карта показана на рис. 7. Прежде всего, отмечаем, что по сравнению со случаем диссипативной связи рис. 1*a* за счет активного взаимодействия исчезает область устойчивого равновесия E. Далее, основной язык синхронизации с вершиной в точке нулевой расстройки $\Delta = 0$ отвечает теперь двухчастотной 2Т, а не трехчастотной квазипериодичности.

При больших значениях Δ наблюдается характерная трехчастотная область, отмеченная как 3Т на рис. 7, и которая вытесняет четырехчастотные

режимы. В эту область теперь встроена система резонансных языков двухчастотных режимов, перекрытие которых приводит к хаосу. Также отметим более типичный в случае активной связи режим гиперхаоса Н.

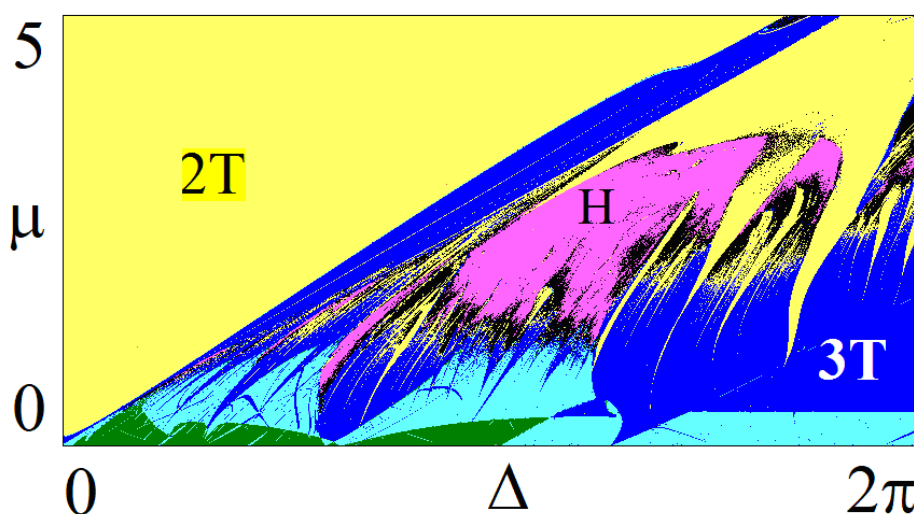


Рис. 7. Карта ляпуновских показателей в системе с активной связью.

Заключение

В работе рассмотрены режимы двух связанных радиофизических генераторов квазипериодических колебаний с реактивной, комбинированной и активной связью. С целью упрощения исследования введена дискретная версия исследуемой системы. Показано, что наблюдаемые режимы существенно зависят от типа связи. Для чисто реактивной связи по сравнению с диссипативной отсутствует режим устойчивого равновесия, а области двухчастотных режимов имеют очень малый размер. Однако сохраняются резонансные трехчастотные языки, хотя они и меняют форму.

Для диссипативной связи с добавкой реактивной указанные режимы при большой связи сохраняются. При малой связи исчезают пятичастотные режимы, их вытесняют сначала четырехчастотные, а затем трехчастотные, хаотические и гиперхаотические. Для реактивной связи с добавкой диссипативной языки трехчастотных торков имеют не острия, а занимают определенные интервалы на оси частотной расстройки. При большой добавке диссипативной связи доминируют трехчастотные режимы.

Для активной (отталкивающей) связи также отсутствует устойчивое равновесие. Становится характерной трехчастотная область со встроенной системой языков резонансных двухчастотных режимов, перекрытие которых приводит к хаосу. Также становится типичным гиперхаос.

Финансирование: Работа выполнена по государственному заданию Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

Литература

1. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. – Москва: ЛИБРОКОМ, 2010.
2. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: a universal concept in nonlinear science. – Cambridge University Press, 2001.
3. Balanov A.G., Janson N.B., Postnov D.E., Sosnovtseva O. Synchronization: from simple to complex. – Springer, 2009.
4. Кузнецов А.П. и др. Синхронизация в задачах. – Саратов: Издательский центр «Наука», 2010.
5. Cveticanin L. On the Van der Pol oscillator: An overview // Applied Mechanics and Materials. – 2013. – Т. 430. – С. 3-13.
6. Rand R.H., Holmes P.J. Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 1980. – Т. 15. – №. 4-5. – С. 387-399.
7. Storti D.W., Rand R.H. Dynamics of two strongly coupled van der Pol oscillators // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 1982. – Т. 17. – №. 3. – С. 143-152.
8. Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1990. – Т. 41. – №. 3. – С. 403-449.
9. Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J. Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2004. – Т. 189. – №. 1-2. – С. 8-30.

10. Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Turukina L.V. Coupled van der Pol-Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 2009. – Т. 238. – №. 14. – С. 1203-1215.
11. Dixit S., Sharma A., Shrimali M.D. The dynamics of two coupled Van der Pol oscillators with attractive and repulsive coupling // *Physics Letters A*. – 2019. – Т. 383. – №. 32. – С. 125930.
12. Astakhov S. et al. The role of asymmetrical and repulsive coupling in the dynamics of two coupled van der Pol oscillators // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. – 2016. – Т. 26. – №. 2. – С. 023102.
13. Ramamoorthy R. et al. Impact of repulsive coupling in exhibiting distinct collective dynamical states // *The European Physical Journal Special Topics*. – 2022. – Т. 231. – №. 22-23. – С. 4117-4122.
14. Mirzaei S. et al. Synchronization in repulsively coupled oscillators // *Physical Review E*. – 2023. – Т. 107. – №. 1. – С. 014201.
15. Sathiyadevi K. et al. Distinct collective states due to trade-off between attractive and repulsive couplings // *Physical Review E*. – 2018. – Т. 97. – №. 3. – С. 032207.
16. Majhi S., Chowdhury S.N., Ghosh D. Perspective on attractive-repulsive interactions in dynamical networks: Progress and future // *Europhysics Letters*. – 2020. – Т. 132. – №. 2. – С. 20001.
17. Chen Y. et al. Dynamics of chaotic systems with attractive and repulsive couplings // *Physical Review E*. – 2009. – Т. 80. – №. 4. – С. 046206.
18. Dolmatova A.V., Goldobin D.S., Pikovsky A. Synchronization of coupled active rotators by common noise // *Physical Review E*. – 2017. – Т. 96. – №. 6. – С. 062204.
19. Levnajić Z. Emergent multistability and frustration in phase-repulsive networks of oscillators // *Physical Review E*. – 2011. – Т. 84. – №. 1. – С. 016231.
20. Balázs G. et al. Synchronization of hyperexcitable systems with phase-repulsive coupling // *Physical Review E*. – 2001. – Т. 64. – №. 4. – С. 041912.
21. Matsumoto T. Chaos in electronic circuits // *Proceedings of the IEEE*. – 1987. – Т. 75. – №. 8. – С. 1033-1057.

22. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // *Physical Review E*. – 2006. – Т. 73. – №. 5. – С. 056202.
23. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Physical Review E*. – 2007. – Т. 76. – №. 4. – С. 046216.
24. Anishchenko V.S., Nikolaev S.M. Generator of quasi-periodic oscillations featuring two-dimensional torus doubling bifurcations // *Technical physics letters*. – 2005. – Т. 31. – С. 853-855.
25. Kuznetsov A.P. et al. Generators of quasiperiodic oscillations with three-dimensional phase space // *The European Physical Journal Special Topics*. – 2013. – Т. 222. – №. 10. – С. 2391-2398.
26. Datta S., Bhattacharjee J.K., Mukherjee D.K. Fixed Attracting Closed Surfaces in Three and Higher Dimensional Dynamical Systems // *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*. – 2024. – Т. 13. – №. 2. – С. 247-267.
27. Kuznetsov A.P. et al. Dynamics of coupled generators of quasiperiodic oscillations: Different types of synchronization and other phenomena // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 2019. – Т. 398. – С. 1-12.
28. Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Щеголева Н.А. Синхронизация связанных генераторов квазипериодических колебаний при разрушении инвариантной кривой // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. – 2021. – Т. 29. – №. 1. – С. 136-159.
29. Stankevich N.V. et al. Three-dimensional torus breakdown and chaos with two zero Lyapunov exponents in coupled radio-physical generators // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. – 2020. – Т. 15. – №. 11. – С. 111001.
30. Кузнецов А.П., Станкевич Н.В. Автономные системы с квазипериодической динамикой. Примеры и свойства: Обзор // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. – 2015. – Т. 23. – №. 3. – С. 71-93.

31. Kuznetsov A.P., Sedova Y.V., Stankevich N.V. Discrete Rössler Oscillators: Maps and Their Ensembles // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2023. – Т. 33. – №. 15. – С. 2330037.
32. Kuznetsov A.P., Sedova Y.V. The simplest map with three-frequency quasi-periodicity and quasi-periodic bifurcations // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2016. – Т. 26. – №. 8. – С. 1630019.
33. Кузнецов А.П., Седова Ю.В. Высокоразмерное дискретное отображение на базе связанных квазипериодических генераторов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. – 2022. – Т. 22. – №. 4. – С. 328-337.
34. Morozov A.D. Quasi-conservative systems: cycles, resonances and chaos. – World Scientific, 1998.
35. Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В., Тюрюкина Л.В. Бифуркации отображений. – Саратов: Издательский центр «Наука», 2012.
36. Broer H., Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: the Arnol'd resonance web // Bulletin of the belgian mathematical society-Simon stevin. – 2008. – Т. 15. – №. 5. – С. 769-787.
37. Vitolo R., Broer H., Simó C. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // Regular and chaotic dynamics. – 2011. – Т. 16. – С. 154-184.
38. Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В. Связанные осцилляторы ван дер Поля и ван дер Поля-Дуффинга: Фазовая динамика и компьютерное моделирование // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2008. – Т. 16. – №. 4. – С. 101-136.

Для цитирования:

Кузнецов А.П., Седова Ю.В. Связанные квазипериодические генераторы с разными типами связи (дискретная модель) // Журнал радиоэлектроники. – 2024. – №. 10. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.10.2>