

УДК 621.396.67

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ  
В НЕЛИНЕЙНОМ РЕЗОНАТОРЕ НА ОСНОВЕ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО КРИСТАЛЛА**

**С. Е. Банков, М. Д. Дупленкова, Е. В. Фролова  
ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН**

Получена 30 августа 2013 г.

**Аннотация.** Исследуется эффект генерации второй гармоники в нелинейном резонаторе, сформированном внутри электромагнитного кристалла, который выполнен в виде периодической решетки металлических цилиндров с нелинейными емкостями, расположенными в плоском волноводе. Рассматривается математическая модель структуры, которая основана на совместном решении линейной граничной задачи для электромагнитного поля и нелинейной задачи для токов и напряжений на нелинейных элементах. Изучены резонаторы с односторонним и двусторонним возбуждением. Показано, что в резонаторе с односторонним возбуждением возможно почти полное преобразование энергии волны основной в энергию волны удвоенной частоты.

**Ключевые слова:** электромагнитный кристалл, нелинейный электромагнитный кристалл, генерация второй гармоники, собственные колебания, резонансные частоты.

**Abstract.** Effect of second harmonic generation in non-linear resonator inside electromagnetic crystal formed by an array of metal cylinders with non-linear capacitors located in parallel plate waveguide is investigated. Mathematical model of the structure based on the simultaneous solution of electromagnetic boundary problem and non-linear problem for voltages and currents in non-linear elements is considered. Resonators with single and double-sided excitation are studied. It is shown that in resonator with single-sided excitation energy of wave with dominant

frequency may be almost completely transformed in energy of wave with doubled frequency.

**Keywords:** electromagnetic crystal, nonlinear electromagnetic crystal, second harmonic generation, natural oscillations, resonance frequencies.

## 1. Постановка задачи

Данная работа посвящена исследованию взаимодействия электромагнитных волн в нелинейных периодических структурах СВЧ диапазона, получивших название электромагнитных кристаллов (ЭМК). Она является продолжением работ [1 – 5], в которых исследовались ЭМК, образованные решеткой металлических цилиндров, расположенных внутри плоского волновода (ПВ), под которым понимаются два идеально проводящих параллельных друг другу экрана. Цилиндры имеют зазоры, в которые включены нелинейные емкостные элементы.

В работе [1] построена модель нелинейного ЭМК конечной длины по одной координате в виде системы нелинейных уравнений, а в работе [2] получено приближенное решение системы для полубесконечного ЭМК. В работе [3] представлены результаты численного и аналитического исследования нелинейного ЭМК в режиме пространственного синхронизма двух прямых волн, распространяющихся внутри структуры на основной и удвоенной частотах. В работах [4] и [5] исследуется режим пространственного синхронизма прямой и обратной волн, которые распространяются соответственно на основной и удвоенной частотах.

Режим пространственного синхронизма является частным случаем режима накопления слабых нелинейных взаимодействий, которые возникают на отдельных элементах ЭМК. Если слабые эффекты суммируются, как это имеет место в режиме накопления, то интегральный эффект может существенно менять общую физическую картину. Поэтому режимы накопления

представляют наибольший интерес при исследовании нелинейных взаимодействий в ЭМК.

Наряду с пространственным синхронизмом можно выделить резонансный режим, в котором слабые эффекты суммируются, а результат их сложения порождает новый комплекс резонансных явлений. Пространственный синхронизм в ЭМК возможен в регулярной структуре. Для его возникновения достаточно выполнить определенные соотношения между параметрами ЭМК. Резонанс в регулярном ЭМК невозможен, так в нем отсутствуют условия для накопления электромагнитной энергии. Для создания таких условий необходимо нарушить регулярность ЭМК, то есть целенаправленно изменить его структуру.

В литературе по фотонным кристаллам и ЭМК известен подход к созданию высокодобротных резонаторов, основанный на введении дефектов в регулярную периодическую структуру, которая находится в полосе запираания [6]. В качестве дефекта может использоваться любой элемент, имеющий электромагнитные свойства отличные от свойств элементов регулярного ЭМК. Важным фактором является также число и расположение дефектов, которые задают форму и размеры резонатора.

В работе [7] исследован один из наиболее простых способов формирования резонатора, при котором изменяется одновременно бесконечный ряд элементов ЭМК. В этом случае резонатор имеет плоско – слоистую структуру. При этом элементы, составляющие дефект выполняются в виде металлических цилиндров с сосредоточенными емкостями. Они формируют резонансную область, в которой происходит накопление энергии. Элементы регулярного ЭМК выполняются в виде однородных металлических цилиндров. Если число рядов регулярного ЭМК конечно, то добротность резонатора также конечна, а ряды металлических цилиндров формируют области связи резонатора с внешней средой.

Важным фактором для реализации такого типа нелинейного взаимодействия, как генерация кратных гармоник является особая структура

спектра собственных колебаний, в котором должны существовать собственные колебания с резонансными частотами  $f_r$ , совпадающими с частотами кратными основной частоте  $f$ , на которой возбуждается ЭМК. Спектр колебаний линейного резонатора в ЭМК исследовался в указанной работе [7]. В ней было показано, что в структурах этого типа возможно создание спектра колебаний, отвечающего сформулированному выше условию. Данный результат позволяет рассчитывать на то, что в резонаторах такого типа возможна реализация сильного эффекта генерации кратных гармоник, при котором существенная доля энергии возбуждающего сигнала будет преобразована в сигнал на кратной частоте. Отметим, что в данной работе мы будем рассматривать только наиболее сильный эффект генерации второй гармоники.

Существенным отличием рассматриваемой в данной работе структуры от исследованной в работе [7] является нелинейность емкостей, формирующей резонансную область. Данный фактор обуславливает необходимость совместного решения граничной электродинамической задачи и нелинейной задачи для токов и напряжений на емкостях. Схема решения и полученные с его помощью результаты представлены ниже.

## 2. Модель нелинейного резонатора в ЭМК

Исследуемая структура показана на рис. 1. Она, как отмечалось выше, состоит из решетки металлических цилиндров. Число цилиндров по оси  $Oy$  бесконечно и ограничено по оси  $Ox$ . Внутренняя по оси  $Ox$  область формируется цилиндрами с нелинейными емкостями  $C_m$ ,  $n = 1, \dots, M_r$ , где  $M_r$  - число слоев в резонансной области. Области справа и слева от резонансной области имеют  $M_{c1}$  и  $M_{c2}$  слоев цилиндров без конденсаторов. Они выполняют роль областей связи резонатора с внешней схемой.

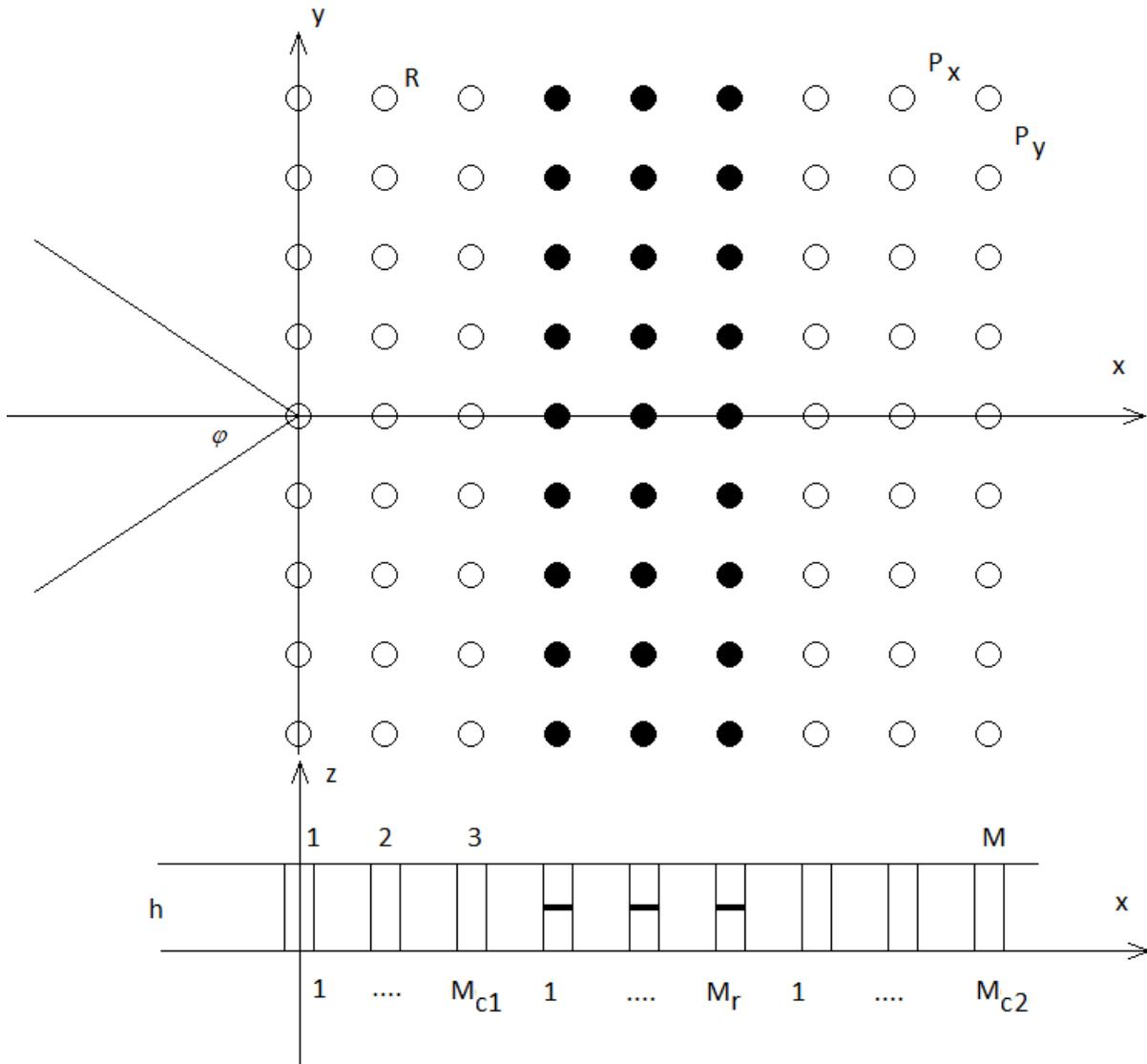


Рис. 1. Исследуемая структура

Для простоты построения математической модели мы будем считать, что в эти цилиндры также включены конденсаторы, но их емкости стремятся к бесконечности, а сопротивления стремятся к нулю. Общее число элементов ЭМК по оси  $Ox$  равно  $M$ .

Роль внешней схемы выполняет ПВ высотой  $h$ , в котором располагается решетка цилиндров радиуса  $R$ . В ПВ распространяется основная  $T$ -волна, не имеющая частоты отсечки. Наряду с ней при определенных условиях в ПВ могут распространяться высшие типы волн. Мы предполагаем, что условия для их распространения отсутствуют как на основной, так и на удвоенной частотах.  $T$ -волны в нашем случае являются источником возбуждения ЭМК. Пусть для

определенности возбуждающая плоская волна набегаёт на ЭМК слева (см. рис. 1). При этом она может распространяться в плоскости XOY под углом  $\varphi$  относительно оси Ox. Угол  $\varphi$  имеет смысл угла падения.

Реакция исследуемой структуры на возбуждающее воздействие также имеет вид плоских T - волн ПВ, бегущих от резонатора. Волны в области  $x < 0$  являются отраженными волнами, а волны в области  $x > 0$  прошедшими. Их амплитуды связаны с амплитудой падающей волны через коэффициенты отражения  $R_n$  и прохождения  $T_n$ , где  $n$  - номер гармоники основной частоты. Наличие отраженных и прошедших волн на гармониках основной частоты - следствие нелинейности структуры.

В резонаторе без тепловых потерь коэффициенты отражения и прохождения удовлетворяют условию энергетического баланса:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |R_n|^2 + |T_n|^2 = 1. \quad (1)$$

Модель представленной выше структуры мало отличается от модели полученной в работе [1]. Поэтому мы не будем подробно рассматривать вывод уравнений, к которым сводится граничная задача для электромагнитного поля, а приведем основные соотношения без вывода:

$$\vec{L}_V(\vec{J}_\mu) = \hat{Y}_V \vec{U}_V + \vec{J}_{0V}, \quad (2)$$

$$\hat{Y}_V = b_V \hat{Z}_V^{-1},$$

$$\vec{J}_{0V} = a_V \hat{Z}_V^{-1} \vec{E}_{iV},$$

где

$$a_V = \frac{2\pi R}{iW_0} \frac{H_1^{(2)}(k_V R) J_0(k_V R)}{H_0^{(2)}(k_V R)}, \quad (3)$$

$$b_V = -\frac{2\pi R}{iW_0 h} \frac{H_1^{(2)}(k_V R)}{H_0^{(2)}(k_V R)},$$

$$Z_{\nu,n,p} = \left( 1 - \frac{a_{\nu} k_{\nu} W_0}{4} \Psi_{\nu} \right) \delta_{n,p} + \frac{a_{\nu} k_{\nu} W_0}{4} \frac{2i}{P_y} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-|n-p|\gamma_{q,\nu} P_x)}{\gamma_{q,\nu}} (1 - \delta_{n,p}), \quad (4)$$

$$n, p = 0, 1, \dots, M-1,$$

$$\Psi_{\nu} = 1 - \frac{2i}{\pi} \ln\left(\frac{k_{\nu}}{\xi}\right) - \frac{2i}{P_y} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\gamma_{q,\nu}} - \frac{1}{\mu_{q,\nu}} \right),$$

$$\gamma_{q,\nu} = \sqrt{\beta_{q,\nu}^2 - k_{\nu}^2}, \quad \mu_{q,\nu} = \sqrt{\beta_{q,\nu}^2 + \xi^2},$$

$$\beta_{q,\nu} = \beta_{0,\nu} + \frac{2\pi q}{P_y},$$

$$\beta_{0,\nu} = \nu\beta_0, \quad \nu = -N_{\nu}, \dots, N_{\nu},$$

где  $\delta_{n,p}$  - символ Кронекера,  $W_0$  - волновое сопротивление среды внутри ПВ,  $k_{\nu}$  - волновое число свободного пространства на частоте  $f_{\nu} = \nu f$ ,  $h$  - высота ПВ,  $P_{x,y}$  - периоды решетки ЭМК,  $N_{\nu}$  - номер максимальной гармоники основной частоты, учитываемой в решении,  $\nu$  - номер гармоники основной частоты,  $J_0(x)$  - функция Бесселя нулевого порядка,  $H_{0,1}^{(2)}(x)$  - функции Ганкеля второго рода нулевого и первого порядков. Индексы  $p, n$  описывают положение элемента ЭМК по оси  $Ox$ . Вектора  $\vec{J}$  и  $\vec{U}$  имеют размерность равную  $M$ . Их элементами соответственно являются токи, текущие по цилиндрам ЭМК и напряжения на нелинейных емкостях. Вектор  $\vec{E}_i$  имеет такую же размерность, а его элементами являются напряженности компоненты поля  $E_z$  падающей волны в центрах цилиндров ЭМК. При выводе соотношений (2) – (4) принято во внимание, что в силу периодичности ЭМК по оси  $Oy$  все электродинамические параметры имеют экспоненциальную зависимость от индекса  $m$ :

$$\exp(-i\beta_{0,v}mP_y).$$

Индекс  $m$  описывает положение центра элемента ЭМК по оси  $Oy$ . Волновое число  $\beta_0$  задается падающей волной, поле которой описывается следующим образом:

$$E_{zi} = e_i \exp(-i\beta_0 y - i\kappa_0 x), \quad (4)$$

$$\kappa_0 = \sqrt{k^2 - \beta_0^2},$$

$e_i$  - амплитуда электрического поля падающей волны. Полезно также ввести напряжение падающей волны  $U_i = e_i h$ .

В уравнении (2) под  $\bar{L}_v(\bar{J}_\mu)$  понимается нелинейный оператор, связывающий гармоники тока с гармониками напряжения на нелинейных емкостях. В общем случае он имеет следующий вид:

$$J_{n,v} = \frac{i\omega_v}{T} \int_0^T C_n(V_n(t)) V_n(t) \exp(-i\omega_v t) dt, \quad (5)$$

$$V_n(t) = \sum_{\mu=-N_v}^{N_v} u_{n,\mu} \exp(i\omega_\mu t),$$

где  $C_n$ ,  $n = 1, \dots, M$  - емкости конденсаторов, зависящие в общем случае от напряжения. Целесообразно также ввести конденсаторы в резонансной области  $C_{rn}$ ,  $n = 1, \dots, M_r$ .

Благодаря оператору  $\bar{L}_v(\bar{J}_\mu)$  система уравнений (2) становится нелинейной системой, которую в общем случае можно решить только численными методами. В данной работе для ее решения использовался метод последовательных приближений. В качестве нулевого приближения бралось решение линейной задачи при  $V_n(t) = 0$ .

Зависимость емкости от напряжения бралась нами в следующем виде:

$$C(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{u}{V}}}. \quad (6)$$

Соотношение (6) соответствует зависимости емкости от напряжения СВЧ полупроводникового диода [8],  $V$  - напряжение пробоя диода. При анализе рассматриваемой структуры мы предполагали, что на конденсаторы может подаваться постоянное напряжение смещение  $U_0$ , задающее рабочую точку диода.

Отличие модели представленной выше от модели из работы [1] только в том, что теперь мы предполагаем, что конденсаторы, включенные в разные элементы ЭМК имеют разные емкости.

### 3. Резонатор с двумя входами

Все представленные ниже численные результаты получены для резонатора, имеющего три активных слоя ( $M_r = 3$ ). Он исследовался в двух вариантах: с одним и двумя входами. Число входов определяется параметрами двух областей связи:  $M_{c1}$  и  $M_{c2}$ . Увеличивая один из указанных параметров, например,  $M_{c2}$ , можно уменьшить связь с правой стороны резонатора до нуля. В этом случае резонатор взаимодействует только с ПВ при  $x < 0$ , что с точки зрения теории цепей СВЧ эквивалентно наличию у него одного входа. В этом случае его можно рассматривать как двухполюсник. Коэффициенты прохождения  $T_n$  тогда равны нулю.

Если оба параметра  $M_{c1}$  и  $M_{c2}$  таковы, что взаимодействие резонатора идет как с ПВ при  $x < 0$ , так и с ПВ при  $x > 0$ , то его можно рассматривать как СВЧ четырехполюсник с двумя входами.

Ряд параметров во всех численных экспериментах оставался неизменным. Перечислим их:  $P_y = 10$ ,  $h = 8$ ,  $U_{01} = -5$  В,  $U_{03} = 0$  В,  $C_0 = 0.2$  пФ,

$M_r = 3$ ,  $V = 9$  В. Напомним, что  $U_{0n}$ ,  $n = 1, \dots, M_r$  - напряжения смещения на конденсаторах в резонансной области. Они задают среднее значение емкости. Резонатор с двумя входами имеет  $M_{c1} = M_{c2} = 1$ . У резонатора с одним входом  $M_{c2} = 3$ . Все геометрические размеры здесь и далее приводятся в миллиметрах.

В ходе численных расчетов исследовалось влияние на структуру переменных параметров: напряжения падающей волны  $U_i$ , угла падения  $\varphi$ , расстройки резонансных частот  $\Delta f$ , добротности резонатора  $Q$ . Расстройка  $\Delta f$  определяется следующим образом:

$$\Delta f = 2f_{r1} - f_{r2}. \quad (7)$$

Видно, что при  $\Delta f = 0$  имеются оптимальные условия для генерации второй гармоники, если резонатор возбуждается сигналом с частотой  $f = f_{r1}$ .

Для количественной оценки эффективности генерации второй гармоники удобно ввести коэффициенты  $K_{1,2}$ :

$$K_1 = |R_1|^2 + |T_1|^2, \quad (8)$$

$$K_2 = |R_2|^2 + |T_2|^2.$$

Отметим, что все параметры  $R_n, T_n$  пренебрежимо малы при  $n > 2$ . В этом случае коэффициент  $K_2$  показывает какая часть энергии падающей волны преобразовалась в энергию волн на второй гармонике основной частоты, а коэффициент  $K_1$  равен части энергии падающей волны, которая осталась на основной частоте.

Рассмотрим влияние на функционирование структуры интенсивности падающей волны. Исследуемый резонатор настроен в режим синхронизма с  $\Delta f = 0$  для угла падения  $\varphi = 30^\circ$ . Структура имеет следующие переменные параметры:  $U_{02} = -7.5$  В,  $P_x = 10$ ,  $R = 0.3$ .

На рис. 2 показана частотная зависимость коэффициентов  $K_{1,2}$ . Кривые 1 - 3 соответствуют  $K_1$ , а кривые 1' - 3' соответствуют  $K_2$ . Они получены для  $\varphi = 30^0$  и  $U_i = 0.005, 0.008, 0.013$  В.

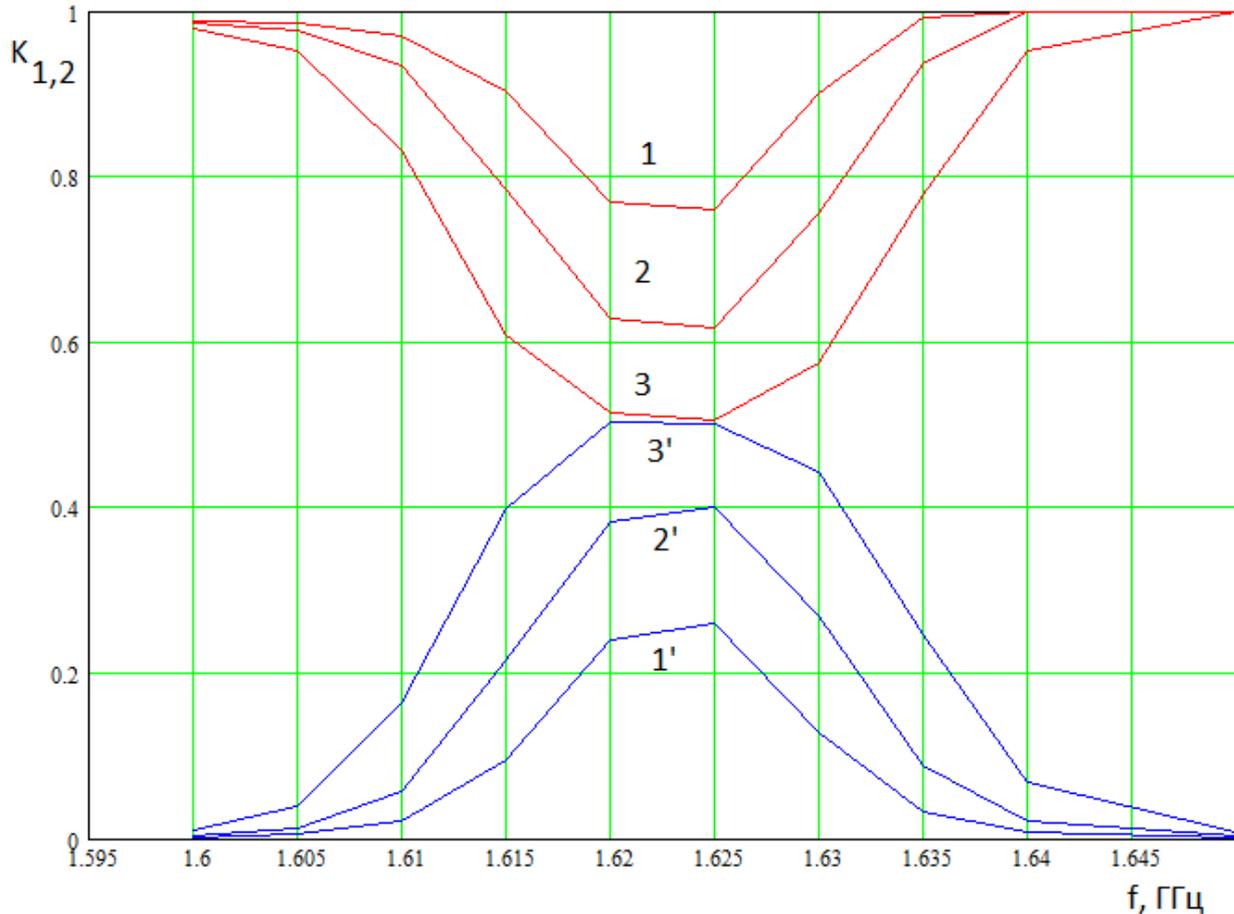


Рис. 2. Частотная зависимость коэффициентов  $K_{1,2}$  при  $\varphi = 30^0$

Видно, что частотная зависимость коэффициентов  $K_{1,2}$  имеет типичный резонансный характер. Центральная частота находится вблизи 1.625 ГГц. Сумма параметров  $K_{1,2}$  равна единице, что следует из уравнения энергетического баланса (1).

При увеличении мощности падающей волны наблюдается рост коэффициента  $K_2$  и уменьшение  $K_1$ . На центральной частоте параметр  $K_2$  растет до величины 0.5. Исследовать поведение структуры при дальнейшем увеличении напряжения  $U_i$  с помощью модели описанной выше оказалось

невозможным, так как после достижения значения  $K_2 = 0.5$  итерационная процедура решения системы нелинейных уравнений расходится.

Расходимость итерационных методов общего вида при описании нелинейных систем в режимах накопления является типичной ситуацией, которая описана, например, в работе [3]. Для преодоления этой сложности необходимо разработать специализированную модель, в которой путем специальных аналитических преобразований учитываются особенности пространственного синхронизма или возбуждения высокодобротных колебаний. Такая модель была разработана нами. С ее помощью возможно исследовать резонаторы, возбуждаемые волнами произвольной интенсивности. Однако ее описание выходит за рамки данной работы.

Таким образом, в рамках прямого численного решения системы нелинейных уравнений вопрос о возможности реализации структур с  $K_2 > 0.5$  остается открытым. Забегая несколько вперед, мы отметим, что аналитическая модель позволяет положительно ответить на поставленный выше вопрос: создание таких структур возможно, однако, превышение параметра  $K_2$  над уровнем 0.5 незначительно. На рис. 3 показана частотная зависимость коэффициента  $K_2$ , полученная для резонатора, настроенного в синхронизма при  $\varphi = 0^0$ . Кривые 1 - 3 получены при  $U_i = 0.021, 0.025, 0.029$  при  $U_{02} = -7.34\text{В}$ ,  $P_x = 10$ ,  $R = 0.3$ .

Видно, что кривые 2 и 3 продолжены выше уровня 0.5 с помощью упомянутой выше аналитической модели. Однако, даже в максимуме они не превышают значения 0.53.

В кривых на рис.2,3 обращает на себя внимание то, что с ростом напряжения падающей волны растет не только интенсивность генерации второй гармоники, но и ширина кривой. Обычно расширение резонансной кривой связывают со снижением добротности резонатора. В нашем случае

такое предположение некорректно, так как связь резонатора с внешней схемой фиксирована. Она не зависит от напряжения  $U_i$ .

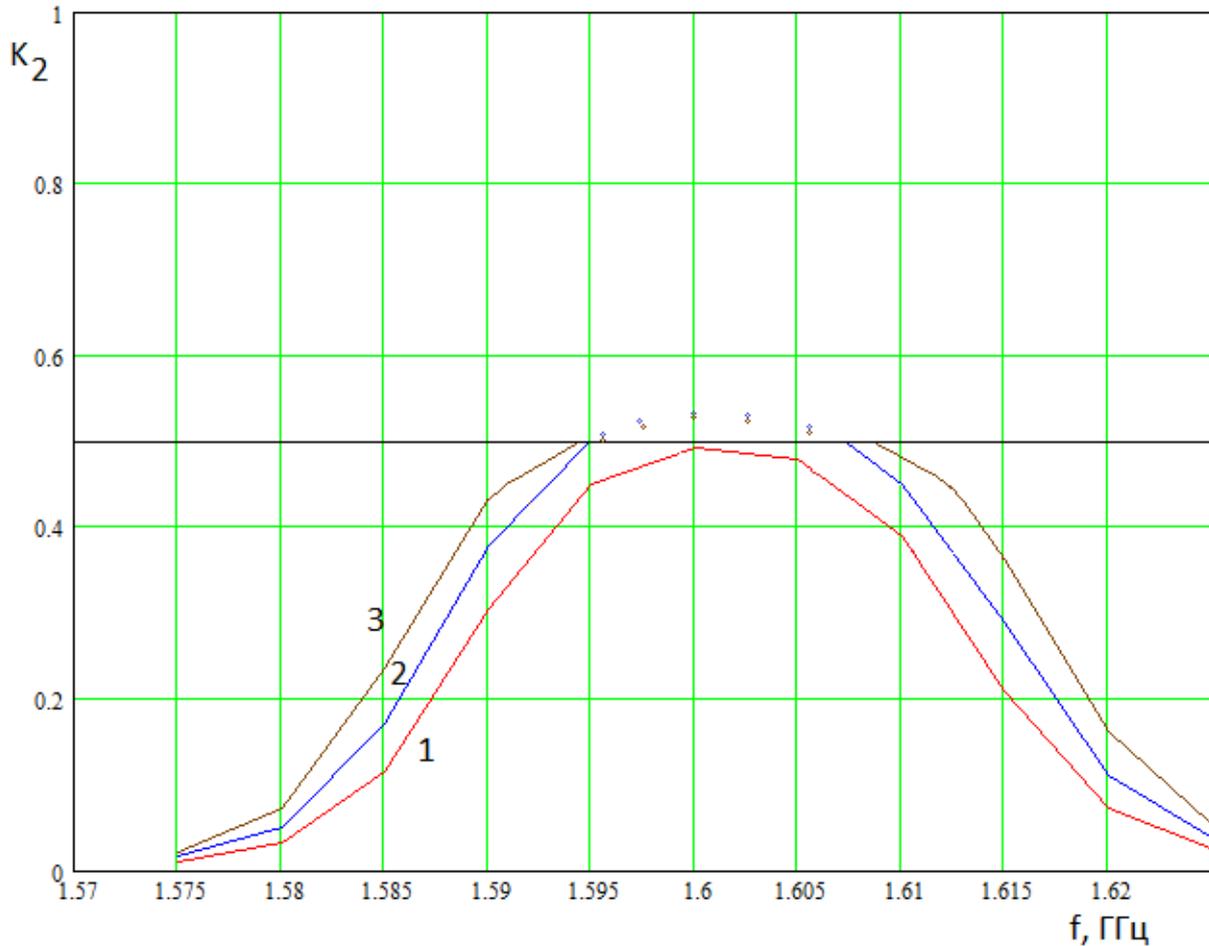


Рис. 3. Частотная зависимость коэффициента  $K_2$  при  $\varphi = 0^0$

Таким образом кривая расширяется без снижения добротности. Можно предположить, что причина данного эффекта связана с другим явлением. Точно условия синхронизма соблюдаются в линейном режиме в котором параметр  $\Delta f$  практически равен нулю. Однако, в нелинейном режиме колебания резонатора связываются друг с другом за счет нелинейности емкостей. Данная связь эквивалентна тому, что в контур вносится дополнительная реактивность, которая смещает резонансные частоты таким образом, что параметр  $\Delta f$  уже не равен нулю. Расхождение резонансных частот приводит к расширению кривых.

Таким образом, в рассматриваемой структуре при увеличении интенсивности падающей волны действуют два противоречивых фактора. С

одной стороны, генерация второй гармоники увеличивается из-за роста напряжения волны, а с другой стороны, она уменьшается из-за нарушения условия синхронизма. В таких случаях всегда следует ожидать экстремальной зависимости рассматриваемого параметра, в данном случае  $K_2$ . Абсолютное его значение в точке максимума, как видно из рис. 3 близко к 0.5.

Частотная зависимость коэффициента  $K_1$  при настройке на нулевой угол падения мало отличается от представленной на рис. 2. Это видно из рис. 4, на котором показаны зависимости  $K_1$  и  $K_2$  от частоты. Кривые 1,2 соответствуют  $K_1$ , а кривые 1',2' параметру  $K_2$ . Они получены при  $U_i = 0.021, 0.025$  соответственно. На кривой 2 видно срезанное основание, а на кривой 2' срезанная вершина. Это означает, что в этой области параметров завершить расчет не удалось из-за расходимости решения.

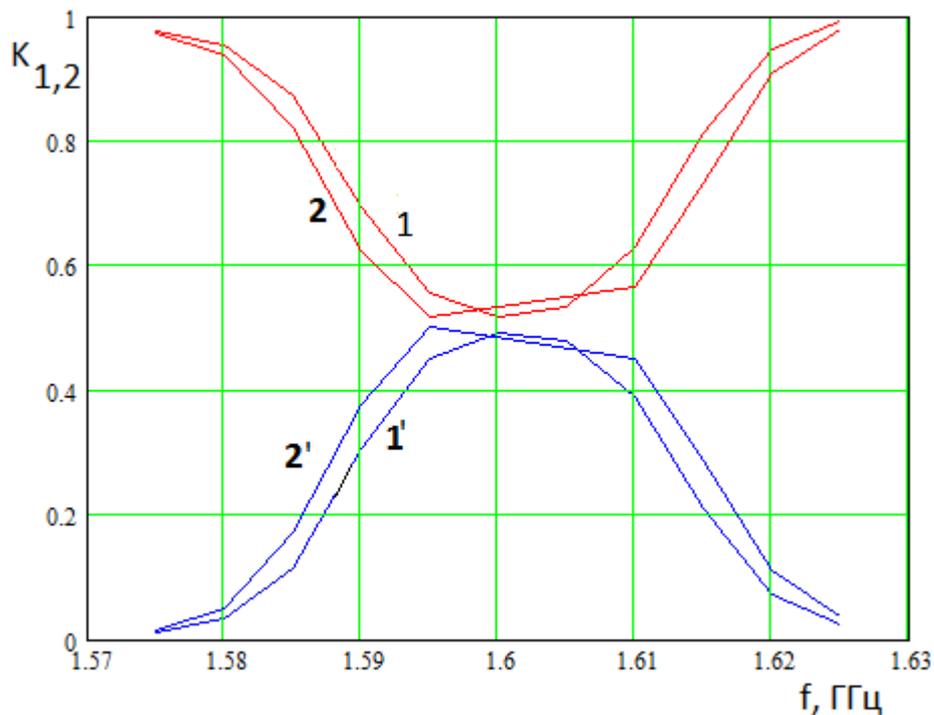


Рис.4. Частотная зависимость коэффициентов  $K_{1,2}$  при  $\varphi = 0^0$

Рассмотрим далее зависимость параметров  $K_{1,2}$  от угла падения  $\varphi$ .

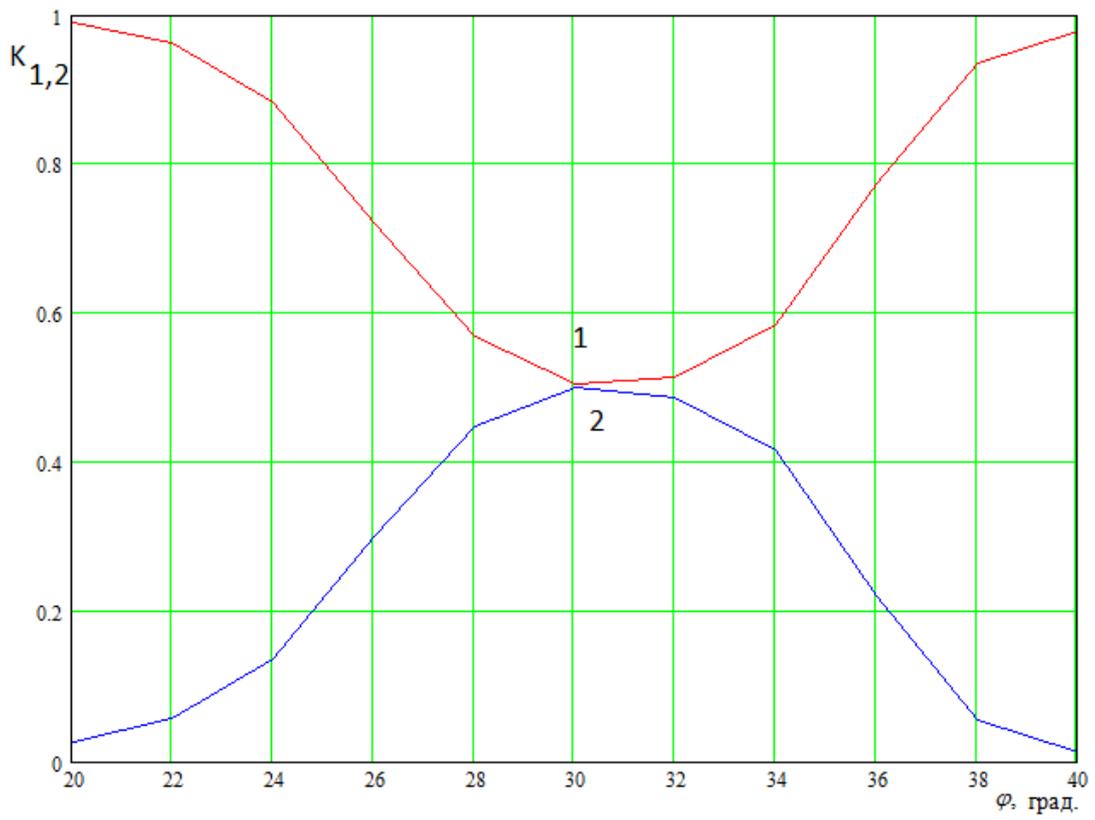


Рис. 5. Зависимость коэффициентов  $K_{1,2}$  от угла падения

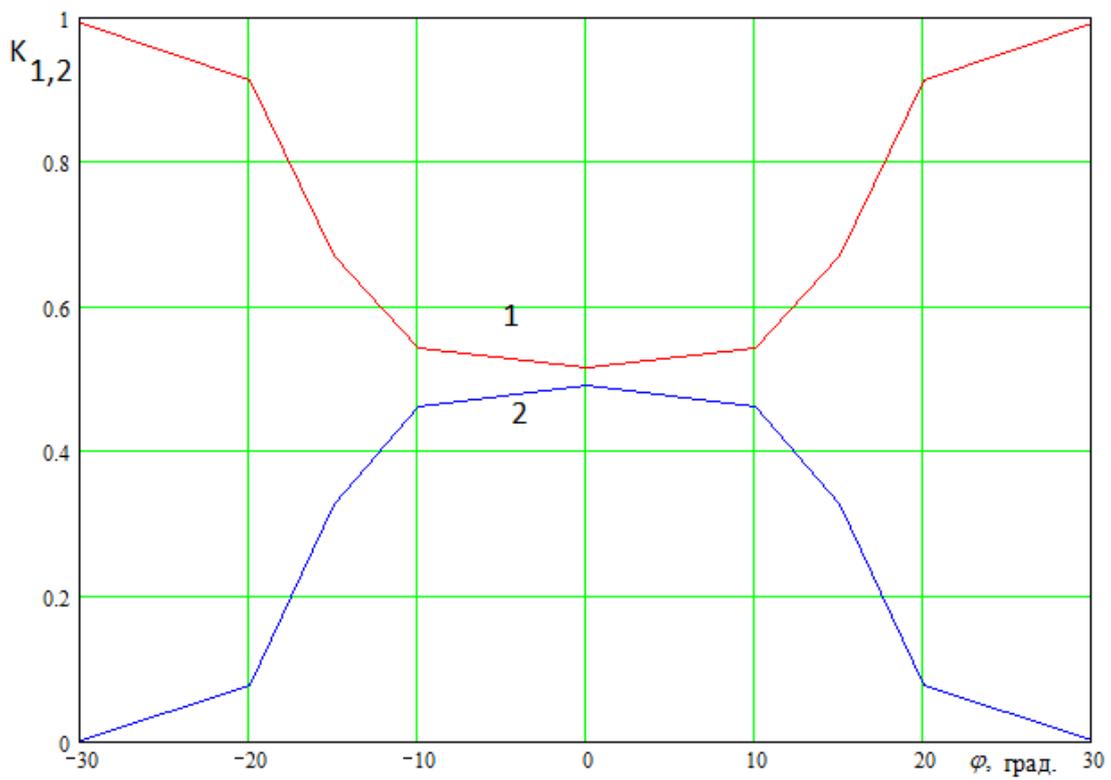


Рис. 6. Зависимость коэффициентов  $K_{1,2}$  от угла падения

На рис. 5 показаны такие зависимости при настройке резонатора на угол  $30^0$ , а на рис. 6 при настройке на нулевой угол падения. Параметры структуры, обеспечивающие синхронизм при указанных выше углах, остались без изменения. Они приведены выше.

Видно, что кривые на рис. 5 значительно уже кривых на рис. 6. Более сильное влияние угла падения при настройке на угол отличный от нуля объясняется тем, что зависимость коэффициентов  $K_{1,2}$  от угла  $\varphi$  должна быть четной. Этот вывод следует из симметрии структуры относительно оси  $Ox$ . Поэтому в окрестности точки  $\varphi = 0$  первые производные функций  $K_{1,2}(\varphi)$  равны нулю и отклонение угла падения меняет указанные функции лишь во втором порядке малости. Наоборот, при  $\varphi \neq 0$  влияние угла на функции  $K_{1,2}(\varphi)$  идет уже в первом порядке малости.

Интересно исследовать влияние на эффект генерации второй гармоники точности выполнения условия синхронизма. С этой целью будем менять напряжение на втором конденсаторе  $U_{02}$ . При этом одновременно изменяем угол падения  $\varphi$  таким образом, чтобы частота  $f_{r2}$  оставалась постоянной, а варьировалась только частота  $f_{r1}$ . При этом расстройка  $\Delta f$  будет меняться благодаря изменению частоты  $f_{r1}$ . Первый рассмотренный случай соответствует смещению вверх частоты  $f_{r2}$  относительно удвоенной частоты  $f_{r1}$ .

Частотная зависимость параметров  $K_{1,2}$  показана на рис. 7. Кривая 1 соответствует  $K_1$ , а кривая 2 коэффициенту  $K_2$ . Они получены при следующих параметрах:  $\Delta f = 23$  МГц,  $U_{02} = -7.4$  В,  $\varphi = 25^0$ ,  $f_{r1} = 1.636$  ГГц.

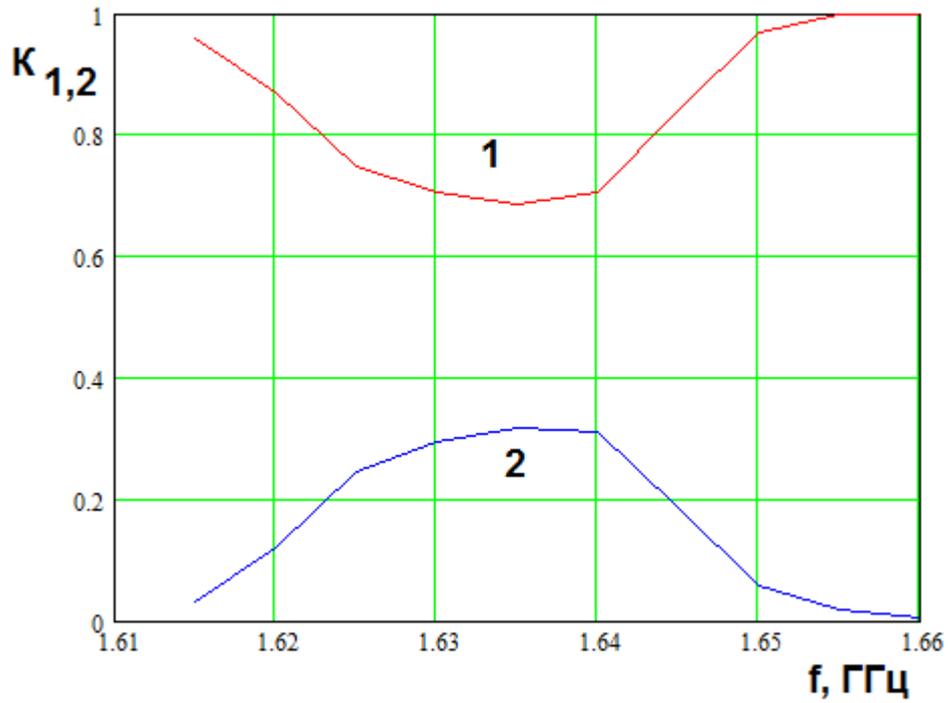


Рис. 7. Частотная зависимость коэффициентов  $K_{1,2}$  при расстройке резонансных частот

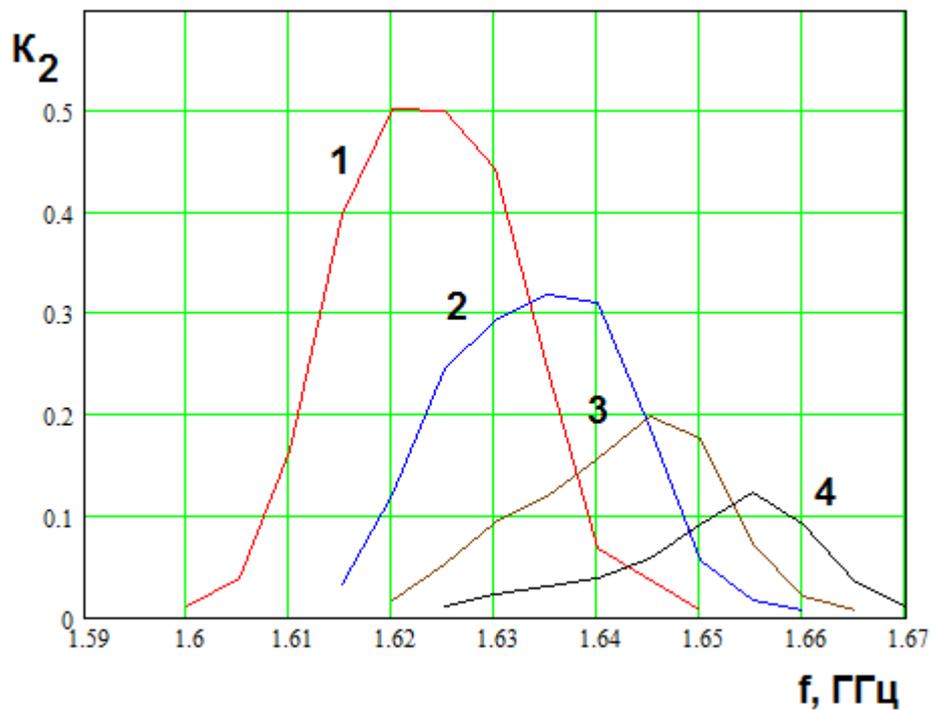


Рис. 8. Частотная зависимость коэффициента  $K_2$  при смещении частоты  $f_{r2}$  вверх

На рис. 8 показана частотная зависимость коэффициента  $K_2$ . Кривые 1 - 4 соответствуют  $\Delta f = 0,23,40,56$  МГц,  $U_{02} = -7.5, -7.4, -7.3, -7.2$  В,  $\varphi = 30, 25, 15, 0^0$ ,  $f_{r1} = 1.625, 1.636, 1.647, 1.657$  ГГц. Видно, что при увеличении расстройки  $\Delta f$  эффективность генерации второй гармоники падает. При этом кривая частотной зависимости параметра  $K_2$  расширяется. Максимум коэффициент  $K_2$  достигает в окрестности частоты  $f_{r1}$ .

Аналогично ведут себя коэффициенты  $K_{1,2}$  при смещении частоты  $f_{r2}$  вниз относительно удвоенной частоты  $f_{r1}$ . На рис. 9 показана частотная зависимость параметра  $K_2$ . Кривые 1 - 4 соответствуют  $\Delta f = 0,14,31,41$  МГц. Они получены для  $U_{02} = -7.5, -7.39, -7.19, -7.06$  В,  $\varphi = 30, 25, 15, 0^0$ ,  $f_{r2} = 3.250, 3.236, 3.22, 3.209$  ГГц,  $f_{r1} = 1.625$  ГГц.

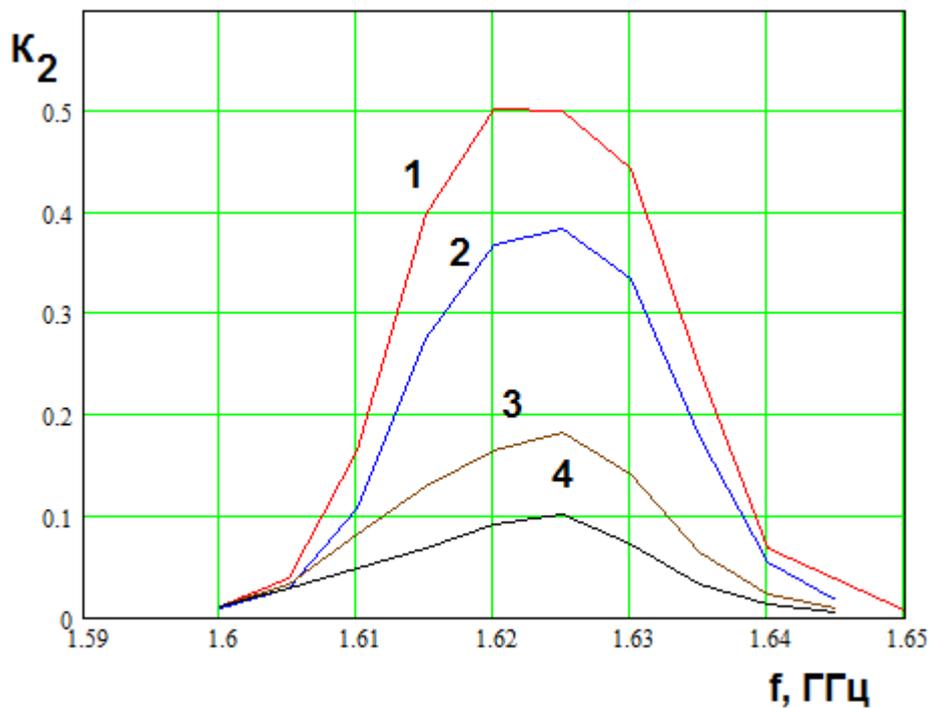


Рис. 9. Частотная зависимость коэффициента  $K_2$  при смещении частоты  $f_{r2}$

ВНИЗ

Важным параметром резонатора является его добротность. Рассмотрим как изменение добротности влияет на эффект генерации второй гармоники. В рассматриваемой структуре тепловые потери не учитываются. Поэтому резонатор имеет конечную добротность исключительно вследствие его связи с внешней схемой, то есть с волнами ПВ. Поэтому для изменения добротности необходимо изменить условия связи резонатора с ПВ. Связь определяется числом цилиндров в области связи и их радиусом  $R$ . Использование параметров  $M_{c1,2}$  для регулировки связи с внешней схемой неудобно, так как она очень сильно зависит от числа цилиндров. Для плавного изменения связи удобнее использовать радиус  $R$ .

Изменение радиуса цилиндров приводит к изменению частот  $f_{r1,2}$  и нарушению условия синхронизма. Поэтому одновременно с изменением радиуса  $R$  приходится менять такие параметры, как период  $P_x$  и напряжение  $U_{02}$ . Изменения указанных параметров проводились таким образом, чтобы частота  $f_{r1}$  оставалась постоянной и равной 1.625 ГГц и выполнялось равенство  $\Delta f = 0$ .

На рис. 10 показана частотная зависимость коэффициента  $K_2$ . Кривые 1 - 3 получены для  $P_x = 10, 11.55, 12.45$ ,  $R = 0.3, 0.5, 0.7$ ,  $U_{02} = -7.5, -6.95, -6.59$  В,  $\varphi = 30^\circ$ ,  $U_i = 0.013$  В. Видно, что изменение добротности, которая повышается с ростом радиуса  $R$ , приводит к ожидаемому сужению кривой. Однако, при этом в максимуме значение параметра  $K_2$  с ростом добротности не меняется и остается приблизительно равным 0.5.

Таким образом, из исследования резонатора с двумя входами можно сделать вывод о том, что в этой структуре имеется ограничение на эффективность генерации второй гармоники, препятствующее преобразованию более половины мощности сигнала основной частоты в сигнал удвоенной частоты.

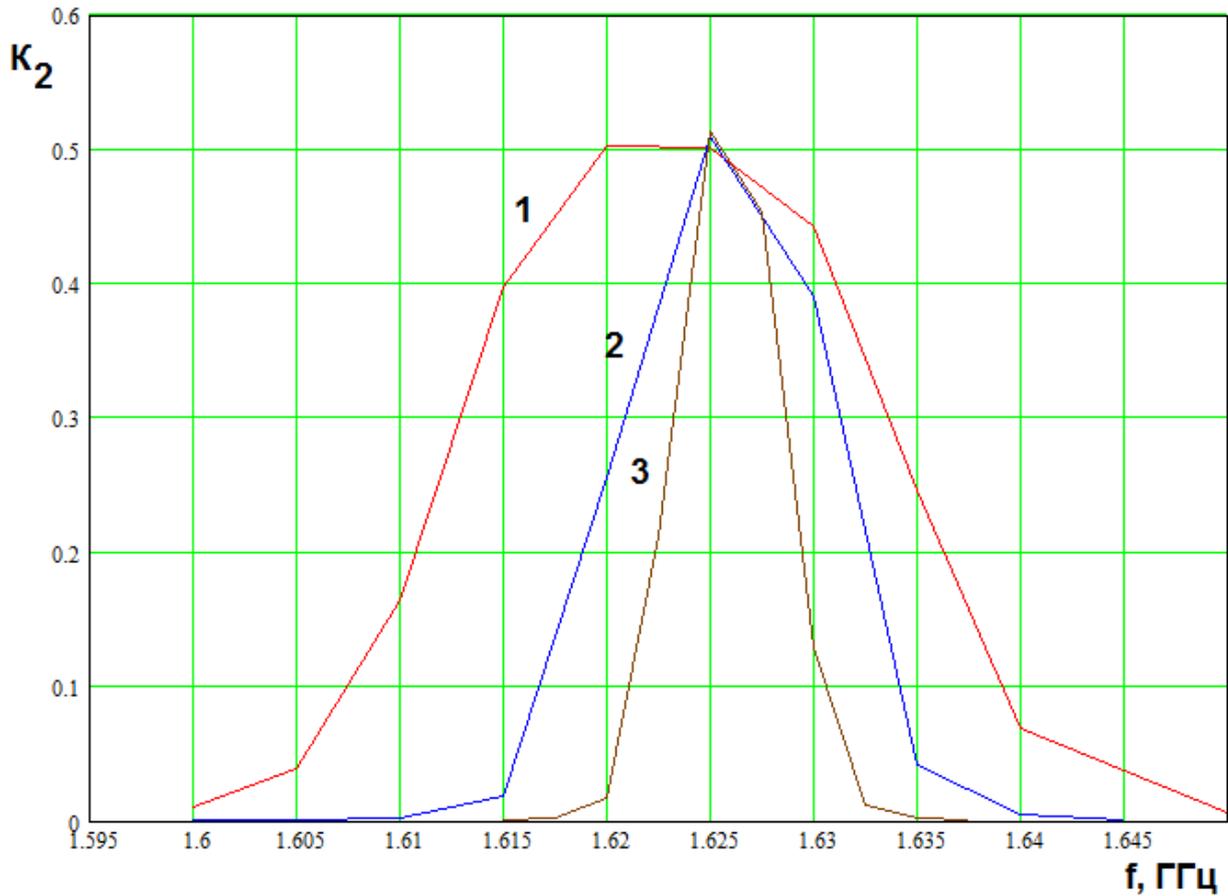


Рис. 10. Частотная зависимость коэффициента  $K_2$  при разной добротности резонатора

#### 4. Резонатор с одним входом

Рассмотрим далее резонатор с одним входом. Для этого увеличим параметр  $M_{c2}$ , сделав его равным трем. Будем исследовать зависимость генерации второй гармоники только от напряжения падающей волны, поскольку ее зависимость от других параметров аналогична рассмотренным в разд. 3. Резонатор с одним входом имел следующие параметры:  $M_{c1} = 1$ ,  $M_{c2} = 3$ ,  $P_x = 10$ ,  $U_{02} = -7.437$  В,  $\varphi = 30^\circ$ .

На рис. 11 показана частотная зависимость коэффициентов  $K_{1,2}$ . Кривая 1 соответствует параметру  $K_1$ , а кривая 2 -  $K_2$ . Они получены для напряжения падающей волны  $U_i = 0.006$  В.

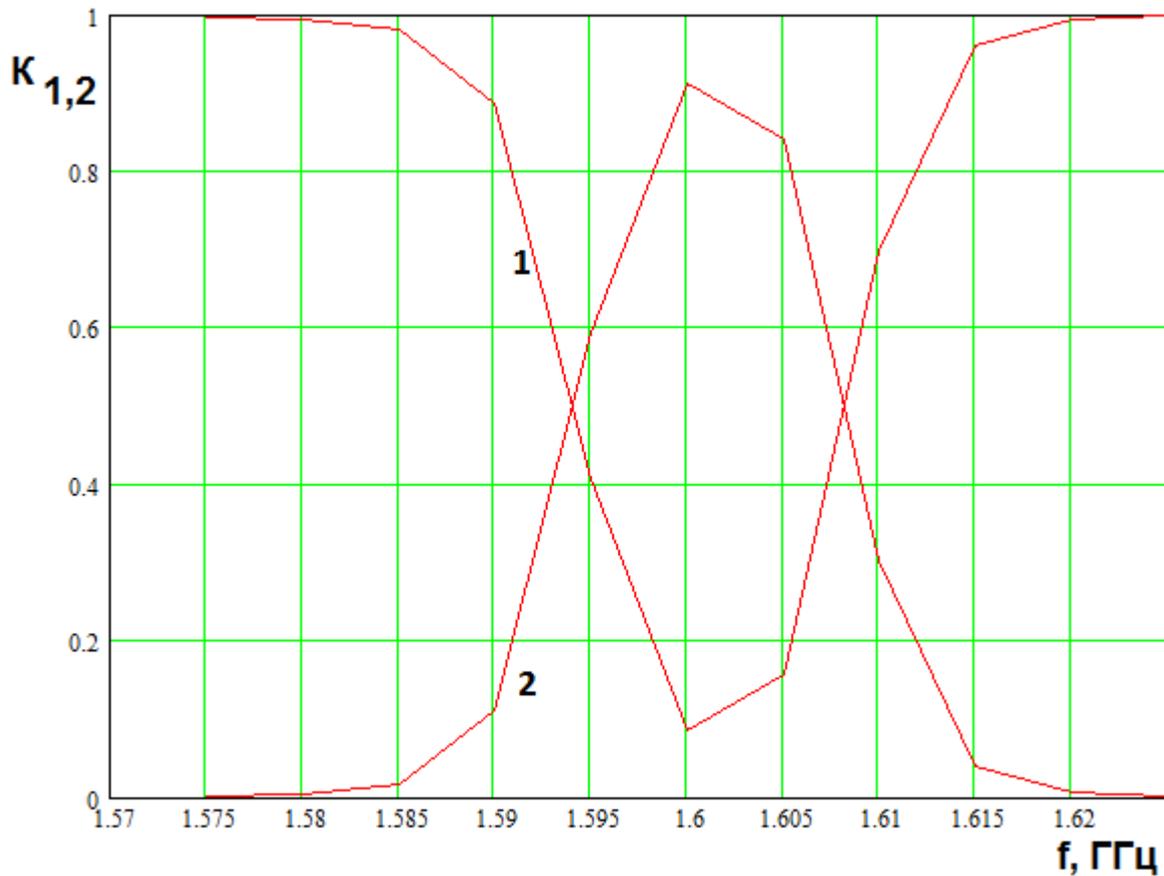


Рис. 11. Частотная зависимость коэффициентов  $K_{1,2}$  для резонатора с одним входом

Обращает на себя внимание то, что при напряжении падающей волны 0.006 максимальное значение коэффициента  $K_2$  не только существенно больше, чем у резонатора с двумя входами, но оно превышает значение 0.9. Таким образом, мы можем сделать вывод о том, что ограничение на эффективность генерации второй гармоники характерное для резонатора с двумя входами в одноходовом резонаторе снимается. В принципе в нем возможно полное преобразование энергии волны основной частоты в волну удвоенной частоты.

На рис. 12 показана частотная зависимость параметра  $K_2$ . Кривые 1 - 3 получены для  $U_i = 0.003, 0.006, 0.01$  В. остальные параметры остались неизменными.

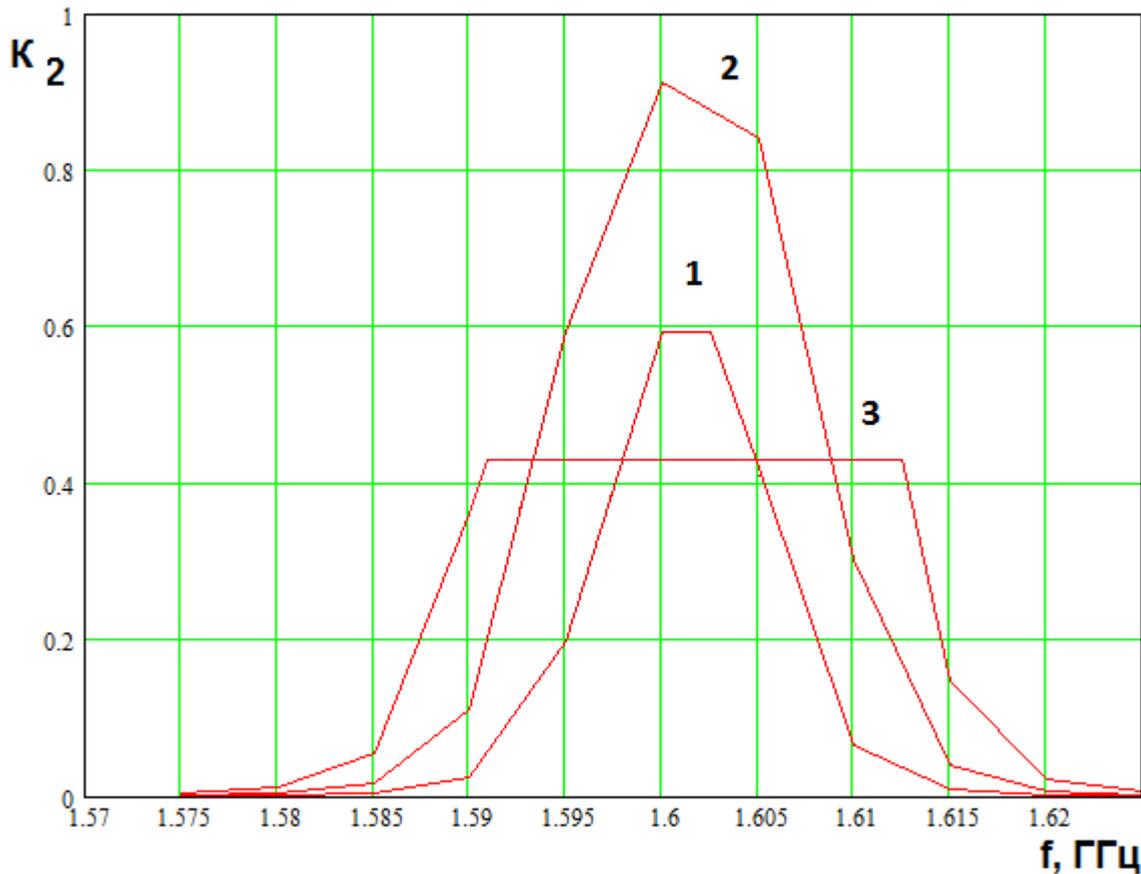


Рис. 12. Частотная зависимость коэффициента  $K_2$  для резонатора с одним входом

Срезанная вершина у кривой 3 говорит о том, что на этих частотах итерационный процесс для данной совокупности параметров разошелся. Аналогично резонатору с двумя входами мы наблюдаем расширение кривой частотной зависимости коэффициента  $K_2$  при увеличении напряжения падающей волны.

## 5. Качественная модель резонаторов с одним и двумя входами

Численное исследование генерации второй гармоники в резонаторах на основе ЭМК, результаты к которого представлены выше показало важное отличие между схемой с одним и двумя входами. Его можно качественно объяснить с помощью модели, которую мы обсудим в данном разделе. При

этом мы не ставим цель получить с ее помощью достоверные количественные результаты. Наша задача состоит в том, чтобы найти причину существенного отличия между двумя структурами.

На рис. 13 а,б показаны две эквивалентные схемы, с помощью которых мы можем качественно исследовать резонаторы с одним и двумя входами.

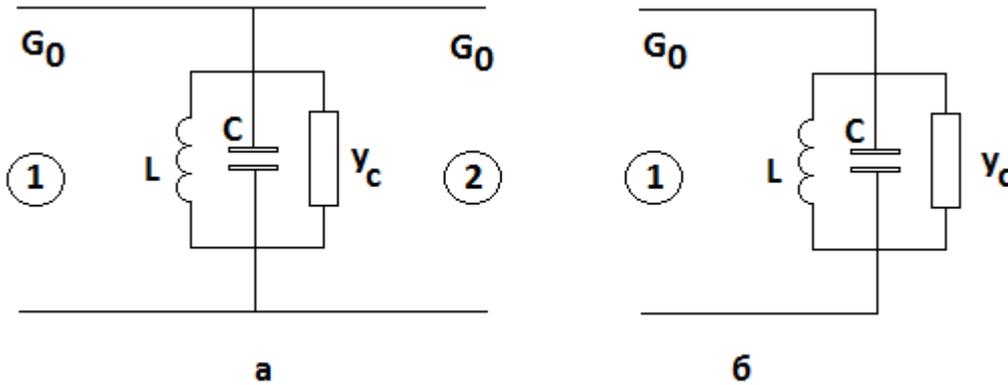


Рис. 13. Эквивалентные схемы резонаторов с двумя и одним входами на основной частоте

Схема на рис. 13 а соответствует резонатору с двумя входами, а схема на рис. 13 б с одним входом. Схемы имеют параллельный контур, который моделирует реальный резонатор с колебанием на частоте  $f_{r1}$ . Контур включены в линию передачи в характеристической проводимостью  $G_0$ . Она служит моделью ПВ. Контур в схеме на рис. 13 а включен в линию передачи в виде параллельной нагрузки. Таким образом, вся схема представляет собой СВЧ четырехполюсник с двумя входами. Контур в схеме на рис. 13 б включен в линию передачи в виде оконечной нагрузки, которая является СВЧ двухполюсником.

Контур содержит кроме  $L, C$  элементов, настроенных на частоту  $f_{r1}$  дополнительную проводимость  $y_c$ . Появление этой проводимости обусловлено нелинейным взаимодействием. Активная часть проводимости  $g_c$  отражает потери мощности сигнала основной частоты, который преобразуется в сигнал на удвоенной частоте. Мнимая часть проводимости  $b_c$  соответствует

реактивной проводимости вносимой в контур вследствие возбуждения колебаний в контуре на частоте  $f_{r2}$ .

Очевидно, что все элементы схем на рис. 13 а,б остаются неопределенными, так как их связь с параметрами реальной структуры неизвестна. Однако, мы можем исследовать зависимость выходных характеристик эквивалентных схем от их параметров и найти причину отличия между схемой с одним и двумя входами.

Не составляет труда найти элементы матрицы рассеяния эквивалентных схем. Для схемы на рис. 13 а это будут коэффициент отражения  $R_1$  и коэффициент прохождения  $T_1$ . Для схемы на рис. 13 б матрица рассеяния имеет один коэффициент отражения  $R_1$ . Индекс 1 показывает, что матрица рассеяния ищется на основной частоте.

Указанные выше параметры выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 R_1^{(1)} &= \frac{(ib + g_c) - G_0}{(ib + g_c) + G_0}, \\
 R_1^{(2)} &= -\frac{ib + g_c}{(ib + g_c) + 2G_0}, \\
 T_1^{(2)} &= \frac{2G_0}{(ib + g_c) + 2G_0},
 \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$b = b_c + \omega C - \frac{1}{\omega L},$$

$\omega$  - круговая частота. Верхний индекс в соотношениях (9) соответствует числу входов схемы.

С помощью параметров рассеяния (9) не составляет труда найти коэффициент  $K_1$ :

$$K_1^{(1)} = \frac{(G_0 - g_c)^2 + b^2}{(G_0 + g_c)^2 + b^2}, \tag{10}$$

$$K_1^{(2)} = \frac{(2G_0)^2 + g_c^2 + b^2}{(2G_0 + g_c)^2 + b^2}.$$

Чтобы найти наиболее интересный для нас коэффициент  $K_2$  воспользуемся законом сохранения энергии (1), полагая, что в структуре существуют сигналы только на основной и удвоенной частотах:

$$K_1^{(1)} = \frac{4G_0g_c}{(G_0 + g_c)^2 + b^2}, \quad (11)$$

$$K_1^{(2)} = \frac{4G_0g_c}{(2G_0 + g_c)^2 + b^2}.$$

При увеличении напряжения возбуждающего сигнала, как отмечалось выше, интенсивность нелинейного взаимодействия растет. Это находит отражение в росте проводимости  $g_c$ . Таким образом, мы можем исследовать зависимость коэффициента  $K_2$  от проводимости  $g_c$  и считать, что качественно она совпадает с зависимостью данного параметра от напряжения падающей волны.

Из формул (11) следует, что обе функции имеют максимум по аргументу  $g_c$ . Значение аргумента в точке максимума дает нам оптимальное значение проводимости:

$$g_{opt}^{(1)} = \sqrt{1 + \tilde{b}^2}, \quad (12)$$

$$g_{opt}^{(2)} = \sqrt{4 + \tilde{b}^2},$$

$$\tilde{b} = b / G_0.$$

При этом максимальные значения параметра  $K_2$  выражаются следующим образом:

$$K_{2m}^{(1)} = \frac{4\sqrt{1 + \tilde{b}^2}}{\left(1 + \sqrt{1 + \tilde{b}^2}\right)^2 + \tilde{b}^2}, \quad (13)$$

$$K_{2m}^{(2)} = \frac{4\sqrt{4 + \tilde{b}^2}}{\left(2 + \sqrt{4 + \tilde{b}^2}\right)^2 + \tilde{b}^2}.$$

Из соотношений видно, что абсолютного максимума коэффициенты  $K_{2m}^{(1,2)}$  достигают при  $\tilde{b} = 0$ . При этом

$$K_{2ma}^{(1)} = 1, K_{2ma}^{(2)} = 0.5. \quad (14)$$

Таким образом, качественная модель дала нам результат, совпадающий с численным решением. Следовательно, ограничения эффективности генерации второй гармоники в резонаторе с двумя входами не связаны с конкретной структурой ЭМК и ее параметрами. Они обусловлены только наличием двух входов. Можно сделать вывод, что второй вход является дополнительным источником потерь для колебания, резонирующего вблизи основной частоты. Эти потери не позволяют преобразовать в сигнал удвоенной частоты более половины мощности источника возбуждения.

Отметим, что данное ограничение, как следует из качественной модели, должно сниматься если резонатор с двумя входами возбуждать одновременно с двух сторон. В этом случае в силу симметрии он будет эквивалентен резонатору с одним входом.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект № 11-08-00215-а.

### Литература

1. Банков С.Е. Модель нелинейного электромагнитного кристалла // РЭ. 2011. Т.56. №3. С. 261.
2. Банков С.Е. Полубесконечный нелинейный электромагнитный кристалл // РЭ. 2011. Т.56. №5. С. 1-11.
3. Банков С.Е. Взаимодействие прямых волн в нелинейном электромагнитном кристалле // Журнал радиоэлектроники. 2011. №3.

<http://jre.cplire.ru/jre/mar11/1/text.html>.

4. Банков С.Е. Численное исследование взаимодействия прямой и обратной волн в нелинейном электромагнитном кристалле // Успехи современной радиоэлектроники. 2011. №5. С. 31-43.
5. Банков С.Е. Аналитическое исследование двухчастотного взаимодействия прямой и обратной волн в нелинейном электромагнитном кристалле // РЭ. 2011. Т.56. №8. С. 909-919.
6. Банков С.Е. Электромагнитные кристаллы. М.: Физматлит. 2010. 352 С.
7. Банков С.Е., Дупленкова М.Д., Фролова Е.В.
8. Гупта К., Гардж Р., Чадха Р. Машинное проектирование СВЧ устройств. М.: Радио и связь. 1987.