УДК 621.396

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРОСТОГО СПОСОБА ОЦЕНКИ ОШИБКИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

А. В. Кокошкин, В. А. Коротков, К. В. Коротков, Е. П. Новичихин

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Фрязинский филиал

Статья поступила в редакцию 18 августа 2016 г.

Аннотация. В данной работе описано применение простого метода оценки ошибки интерполяции. Этот метод формально не требует исследовать свойства интерполированного сигнала и не имеет явных ограничений при использовании любого метода интерполяции. Естественным ограничением предлагаемого метода является требование такого шага измерений, который обеспечивает адекватное описания свойств исследуемого сигнала.

Ключевые слова: интерполяция, оценка ошибок.

Abstract. Experimental data processing often requires to calculate the value of the signal is measured points – to interpolate measured data. This is useful, for example, to analyze the experimental data, the graphical representation of the results obtained, calculating signal characteristics. Interpolation is almost always accompanied by errors, the knowledge of which can be used to select the interpolation method, the subsequent measurement planning, determining the coordinates measured at the same points.

Typically, a priori information for constructing functional data model is insufficient. Or to build a functional model is fundamentally impossible. Therefore, using standard techniques of interpolation error estimation [1,2] is very difficult. The task of interpolation of an arbitrary function is not the purpose of our work. The aim of this work is to demonstrate the capabilities of a simple method for estimating the error of interpolation of the experimental data to select the interpolation method, the coordinates of the measuring points, the analysis of the measured data.

The proposed method is based on the following idea. Let the measured values at the points well enough describe the properties of the signal. In order to evaluate the interpolation error, we will evaluate the difference in values between the two interpolations consistently held, with the second interpolation uses as a nodal point values from the first interpolation.

This work describes the use of a simple method of interpolation error estimate. This method does not require formal study the properties of the interpolated signal and has no obvious limitations when using any interpolation method. The natural limitation of this method is the requirement of such a measurement step that provides an adequate description of the properties of the test signal.

Key words: interpolation, error estimate.

Введение

При обработке экспериментальных данных часто требуется вычислить значения сигнала вне измеренных точек – произвести интерполяцию измеренных данных. Это бывает необходимо для анализа экспериментальных данных, графического представления полученных результатов, вычисления характеристик сигнала и так далее. Интерполяция практически всегда сопровождается ошибками, знание которых можно применить для выбора метода интерполяции, планирования последующих измерений, определения координат измеряемых при этом точек. Как правило, априорной информации для построения функциональной модели данных недостаточно. Или построение такой функциональной модели принципиально невозможно. Поэтому использование стандартных способов оценки ошибки интерполяции [1,2] весьма затруднительно. Задача интерполяции произвольной функции не является целью нашей работы.

Целью данной работы является продемонстрировать возможности простого способа оценки ошибки интерполяции экспериментальных данных для выбора метода интерполяции, координат точек измерения, анализа измеренных данных.

В дальнейшем мы предполагаем, что шаг между измерениями достаточен для адекватного описания свойств сигнала. Поскольку, если это не так, то задача интерполяции становится бессмысленной. Мы полагаем, что при обработке экспериментальных результатов, необходимо опираться в первую очередь именно на экспериментальные результаты, а не на некоторые часто умозрительные построения.

Описание используемого метода

Пусть нам необходимо сделать оценку ошибки интерполяции в точке $x_k + \Delta_k$.

1. Вычислим величину $m = \Delta_k / (x_{k+1} - x_k)$. С помощью неё определим $\Delta_i = m(x_{i+1} - x_i)$, где $i = 1...n-1$.

2. Интерполируем сигнал по измеренным точкам $x_1...x_n$. Вычисляем значения в точках, отстоящих от измеренных на заданную величину $\Delta x_1...\Delta x_{n-1}$. В случае равноотстоящих узлов величина $\Delta_i = \Delta_k$ и не зависит от i.

3. Используя эти вычисленные интерполированные значения сигнала как новые измеренные, интерполируем и получаем значение сигнала в точке x_{k+1}.

4. Вычисляем разницу между измеренным ранее значением сигнала в точке x_{k+1} и вычисленным с помощью такой интерполяции, которую и будем считать оценкой ошибки интерполяции в точке $x_k + \Delta_k$.

Данный метод основывается на следующей идее.

Пусть измеренные значения в точках $x_1 ... x_n$ достаточно хорошо описывают свойства сигнала. Для того, чтобы оценить ошибки интерполяции, мы оценим разницу в значениях между последовательно проведёнными двумя интерполяциями, причём вторая интерполяция использует в качестве узловых точек значения, полученные первой интерполяцией.

Принципиальным на наш взгляд для вычисления любых интерполяционных значений является то, что анализируемые экспериментальные данные должны достаточно хорошо описывать сигнал. Например, на рис.1 приведены такие экспериментальные данные, которые не дают достаточной информации о сигнале.

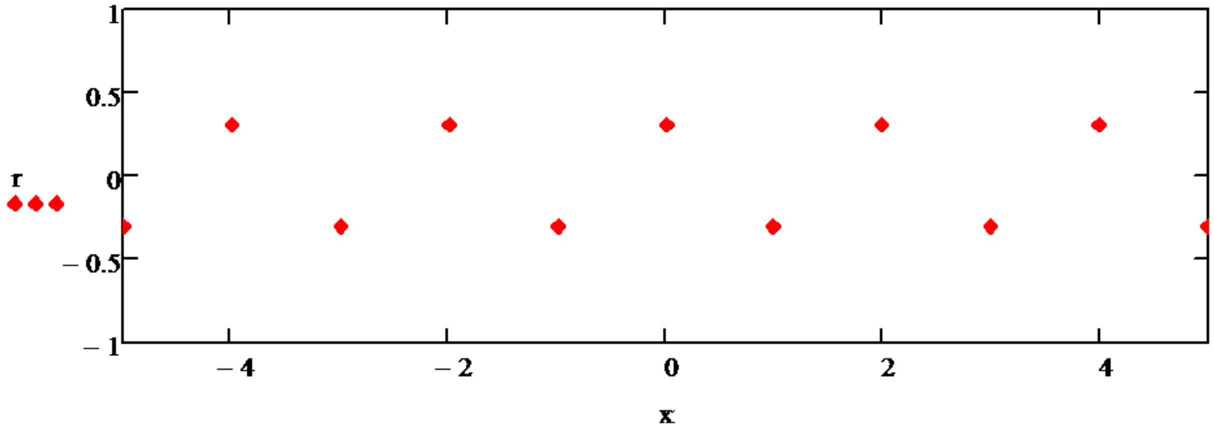

Рис.1. Пример экспериментальных данных недостаточно описывающих сигнал.

На рис.1 видно, что изображены значения периодического сигнала. Однако о форме и амплитуде можно только догадываться.

При уменьшении шага в 2 раза данные рис.2 дополнятся новыми точками и будут выглядеть следующим образом (рис.2).

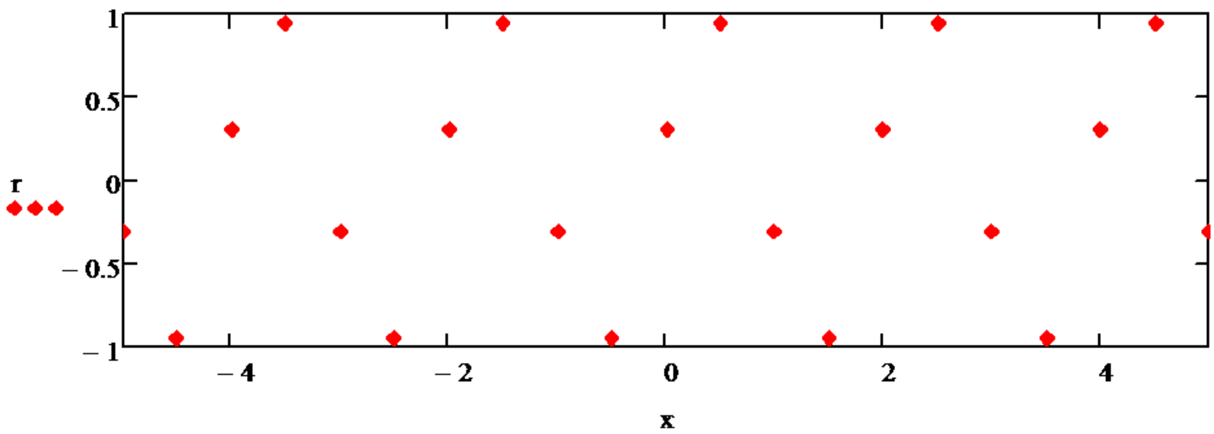

Рис.2. Пример экспериментальных данных недостаточно описывающих сигнал.

На рис.2, в отличие от рис.1, экспериментальных точек больше и уже можно строить предположения о возможной форме сигнала и его амплитуде. Однако уверенности в правильности этого не будет. Уменьшим шаг еще в 2 раза. Получим результат, представленный на рис.3.

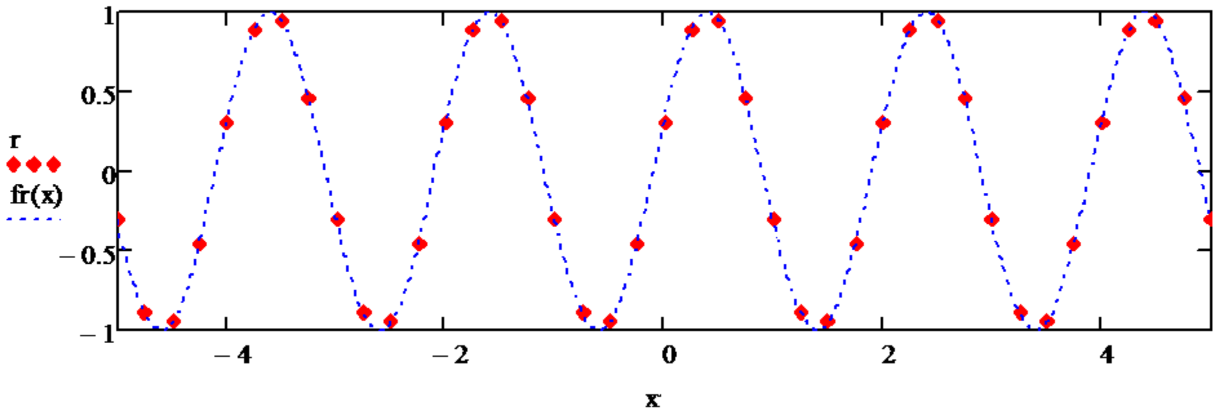

Рис.3. Пример экспериментальных данных удовлетворительно описывающих сигнал.

На рис.3 видно, что измеренные данные хорошо описываются синусоидой. В данной работе рассматривается интерполирование только таких экспериментальных данных, т.е. с помощью которых возможно адекватно описать исследуемый сигнал.

Далее мы рассмотрим применение метода оценки ошибки интерполяции на примерах двух тестовых сигналов. Пример сигнала в виде ломаной кривой демонстрирует возможность работать с сигналами, функциональное представление которых имеет разрывы в производных. Кроме этого такой пример показывает возможность использования метода оценки ошибки сигнала для выбора вида интерполяции. Второй тестовый сигнал в виде функции Гаусса позволяет продемонстрировать работу в случае плавно меняющихся сигналов.

Тестовые сигналы

В качестве примеров интерполируемых сигналов в диапазоне $-5 \le x \le 5$ используем:

- ломаную кривую, приведённую на рис.4;

- функцию Гаусса:

$$f(x) = \exp\left[-x^2/\sigma^2\right]. \quad (1)$$

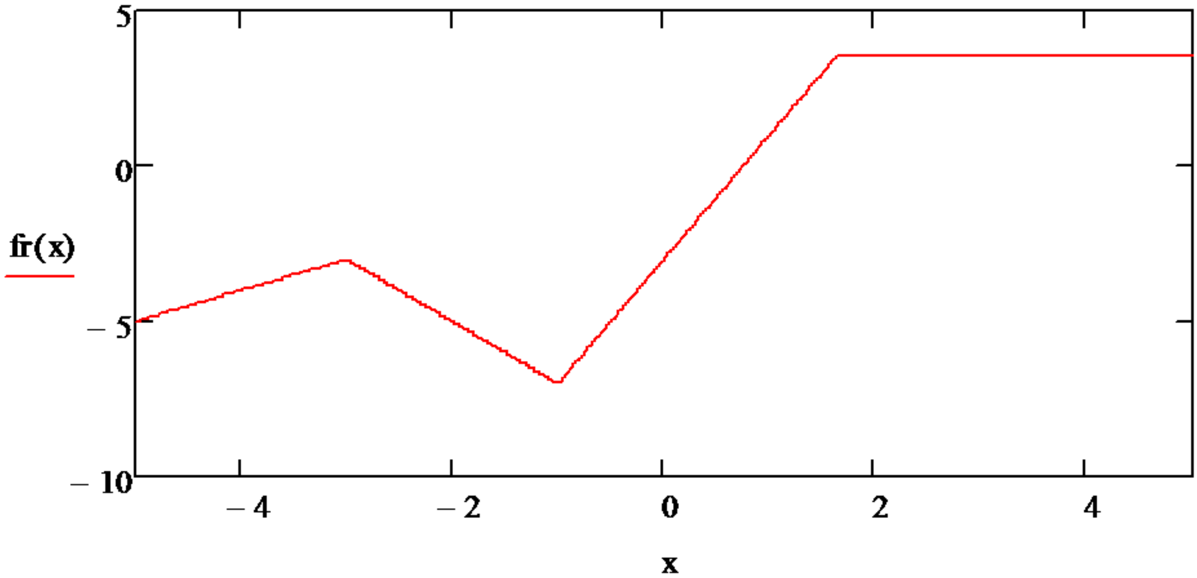

Рис.4. График тестового сигнала в виде набора отрезков прямых.

Использование метода оценки ошибки интерполяции для выбора метода интерполяции

В качестве примеров методов интерполяции рассмотрим линейную интерполяцию и интерполяцию кубическим сплайном [1,2].

На рис.5 приведены графики функции рис.4 с результатами линейной интерполяции и измеренные значения с шагом d=1.

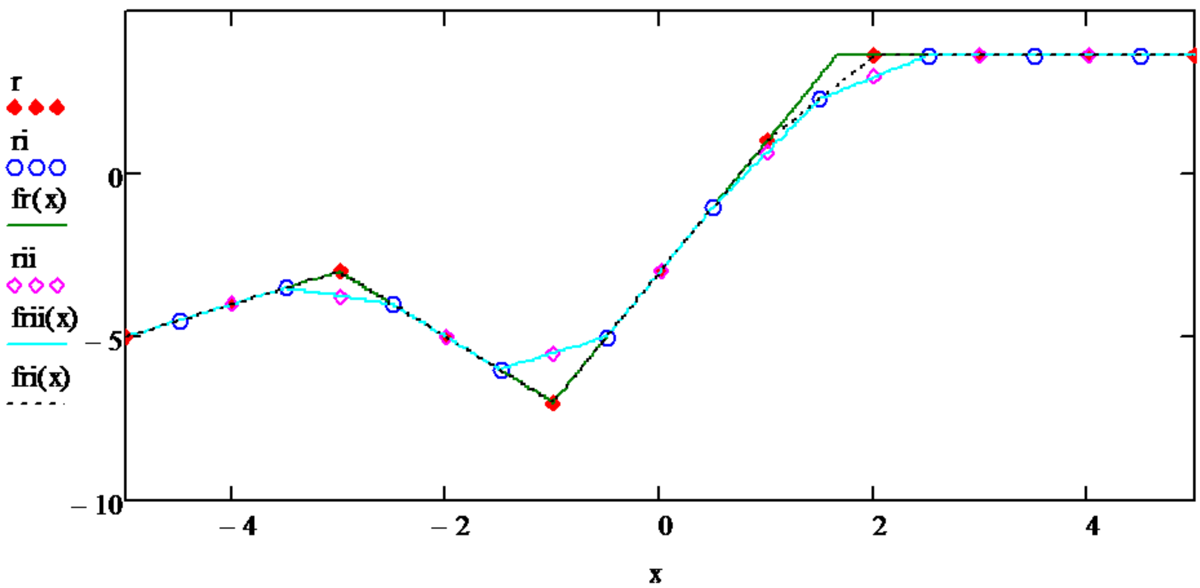

Рис.5. Графики функции (рис.1) (зелёная линия) с результатами линейной интерполяции и измеренные значения с шагом d=1. Чёрный пунктир – 1 интерполяция по измеренным узловым точкам (красные ромбы). Голубая линия – 2 интерполяция по вычисленным точкам (синие окружности). Фиолетовые ромбы – результаты 2 интерполяции в измеренных точках. Узловые точки для 2 интерполяции отстоят от узловых точек 1 интерполяции на m d, где m=0,5.

Если величину m изменить, то изменятся и отклонения интерполированных значений (фиолетовые ромбы) в измеренных узлах (красные ромбы). На рис.6 приведены такие же графики, как и на рис.5, но при m=0.2.

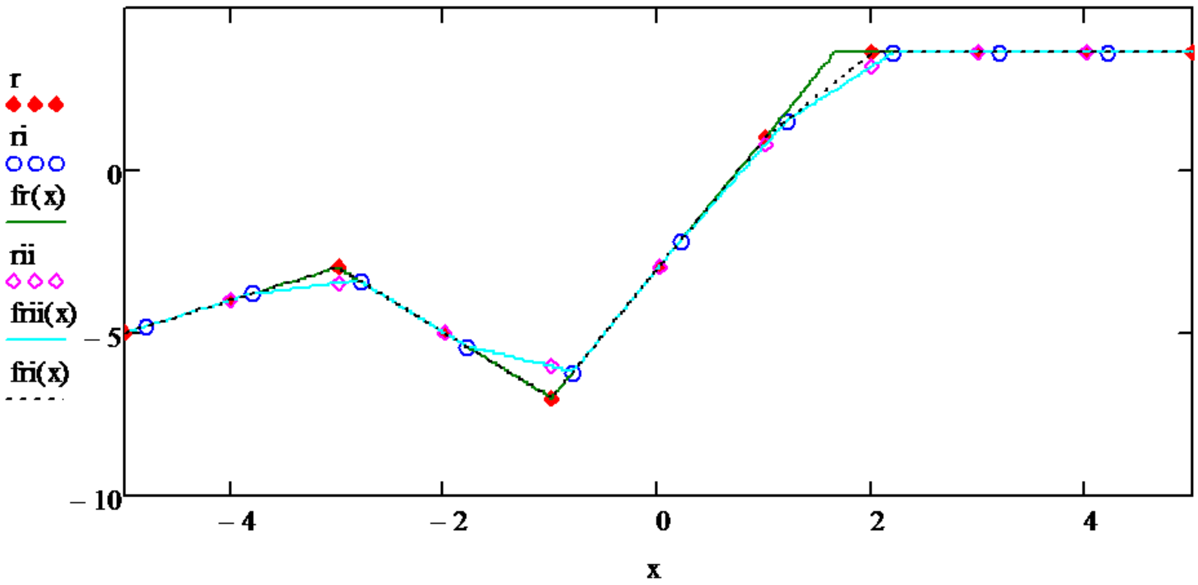

Рис.6. Графики функции (рис.1) (зелёная линия) с результатами линейной интерполяции и измеренные значения с шагом d=1. Чёрный пунктир – 1 интерполяция по измеренным узловым точкам (красные ромбы). Голубая линия – 2 интерполяция по вычисленным точкам (синие окружности). Фиолетовые ромбы – результаты 2 интерполяции в измеренных точках. Узловые точки для 2 интерполяции отстоят от узловых точек 1 интерполяции на m d, где m=0,2.

Эту зависимость разницы между значениями второй интерполяции и измеренными значениями от положения узловых точек второй интерполяции можно использовать в качестве оценки ошибки первой интерполяции в узловой точке второй интерполяции. На рис.7. представлены график ошибок первой интерполяции и график оценки этих ошибок. Все ошибки и их оценки приводятся по модулю.

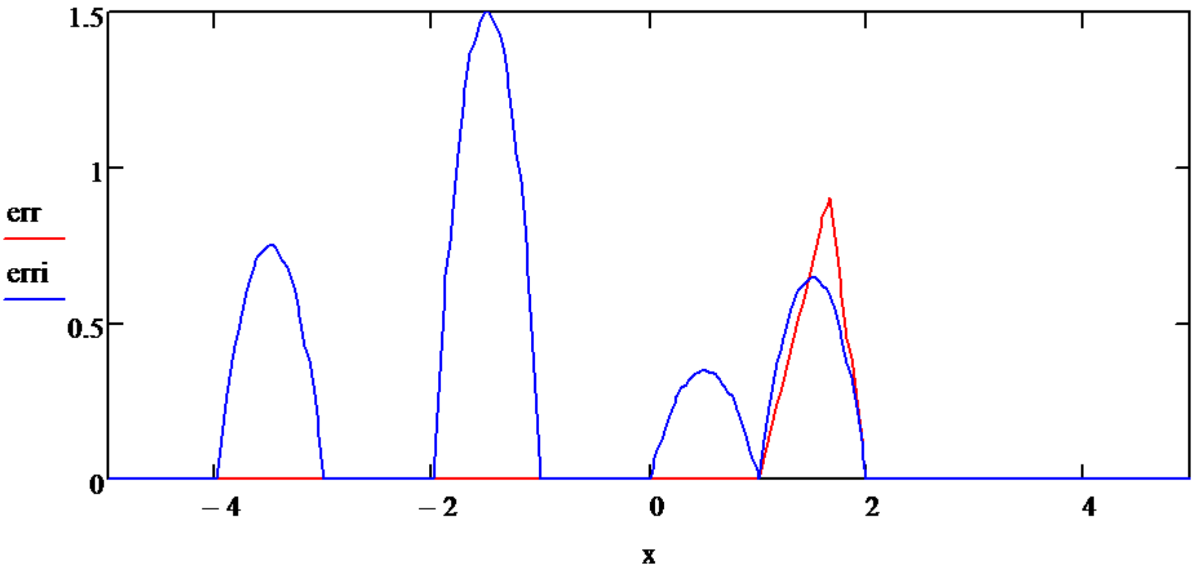

Рис.7. График ошибок 1 интерполяции – красная линия и график оценки ошибок – синяя линия. d=1.

На рис.7 видно, что метод позволил определить области, где линейная интерполяция имеет ошибку равную 0 и отметил области, где могут быть проблемы при интерполяции. Эти области прилегают к местам излома графика сигнала рис.1. Уменьшим шаг. На рис.8 приведены график ошибок первой интерполяции и график оценки этих ошибок при d=0,25.

На рис.8 видно, что области, где линейная интерполяция имеет ошибку равную 0 и области, где могут быть проблемы при интерполяции определены точнее. Причём оценка ошибки интерполяции близка к ошибке интерполяции, там, где она не 0 (и на рис.7 и на рис.8). Нулевые ошибки линейной интерполяции при совпадении узлов и мест излома метод оценки ошибки и не мог определить, поскольку этот метод использует только значения экспериментальных данных и не использует априорную информацию.

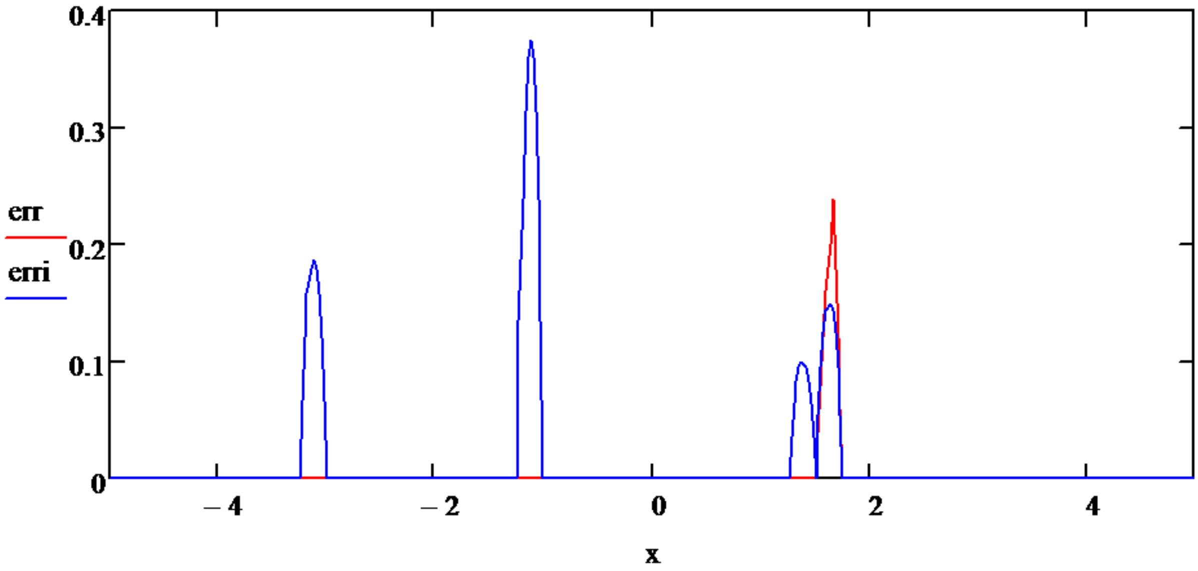

Рис.8. График ошибок 1 интерполяции – красная линия и график оценки ошибок – синяя линия. d=0,25.

Рассмотрим теперь результаты интерполирования кубическим сплайном [1,2]. На рис.9 приведены графики функции рис.1 с результатами интерполирования кубическим сплайном и измеренные значения с шагом d=1.

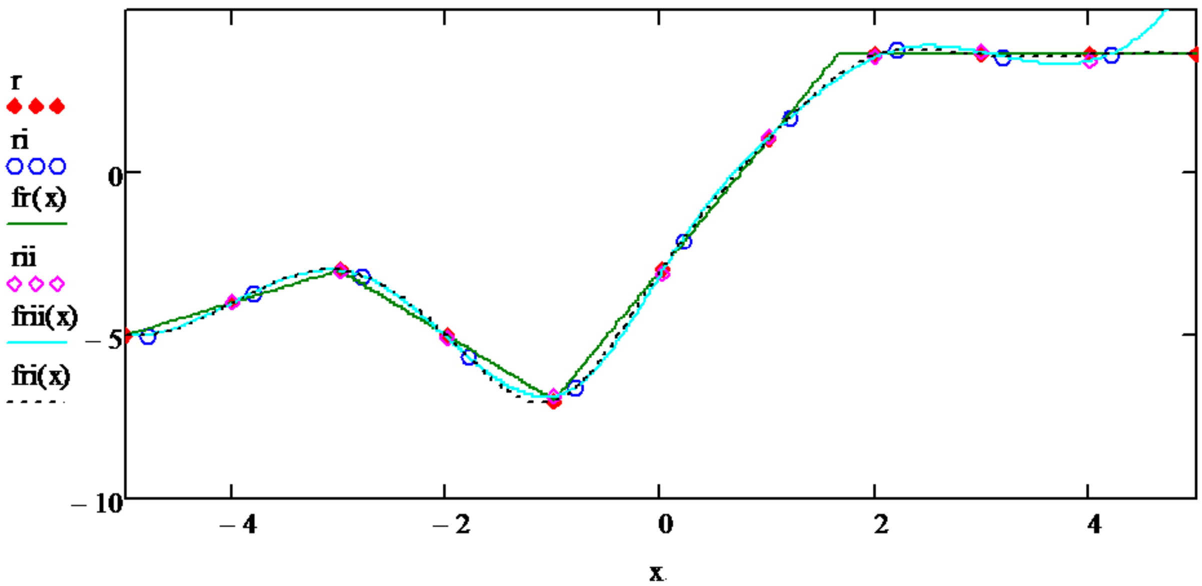

Рис.9. Графики функции (рис.1) (зелёная линия) с результатами интерполирования кубическим сплайном и измеренные значения с шагом d=1. Чёрный пунктир – 1 интерполяция по измеренным узловым точкам

(красные ромбы). Голубая линия – 2 интерполяция по вычисленным точкам (синие окружности). Фиолетовые ромбы – результаты 2 интерполяции в измеренных точках. Узловые точки для 2 интерполяции отстоят от узловых точек 1 интерполяции на m d, где m=0.2.

На рис.10. представлены график ошибок 1 интерполяции и график оценки этих ошибок.

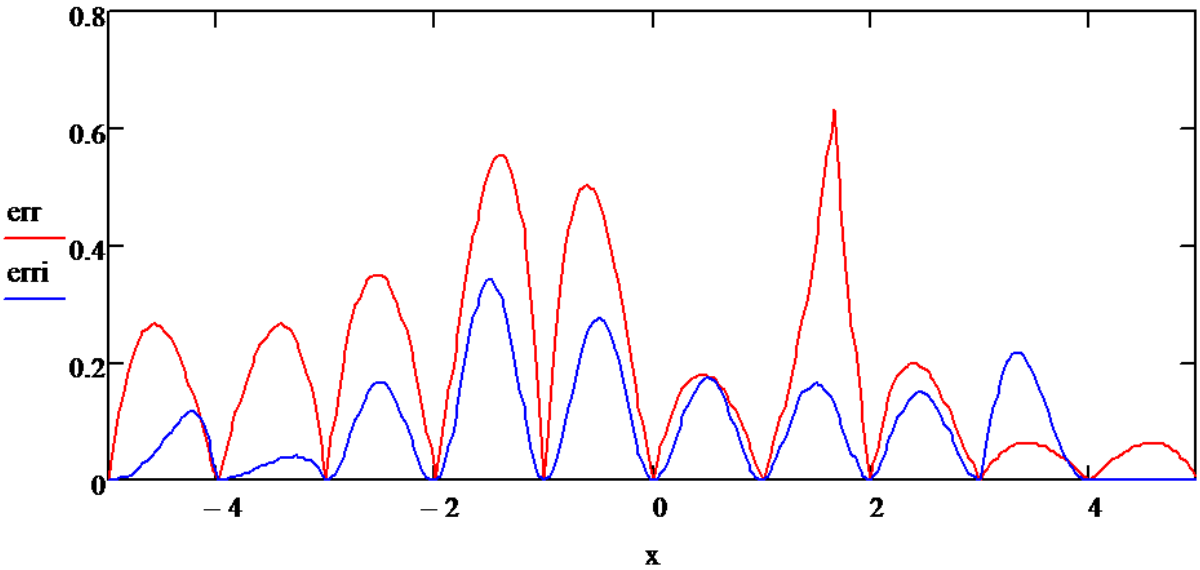

Рис.10. График ошибок 1 интерполяции – красная линия и график оценки ошибок – синяя линия. d=1.

На рис.10 видно, что как оценка ошибки, так и ошибка интерполирования достаточно равномерно распределена по всему интервалу от -5 до 5. Однако если мы уменьшим шаг d в 4 раза, то вид графика ошибок интерполирования изменится (рис.11).

На рис.11 видно, что с уменьшением шага d уменьшилась и величина ошибок интерполяции. Распределение оценки ошибок и самих ошибок интерполяции в целом как и ранее соответствует друг другу. Кроме этого при d=0.25 ошибки сплайн интерполяции стали концентрироваться в районах мест излома, как и оценка этих ошибок.

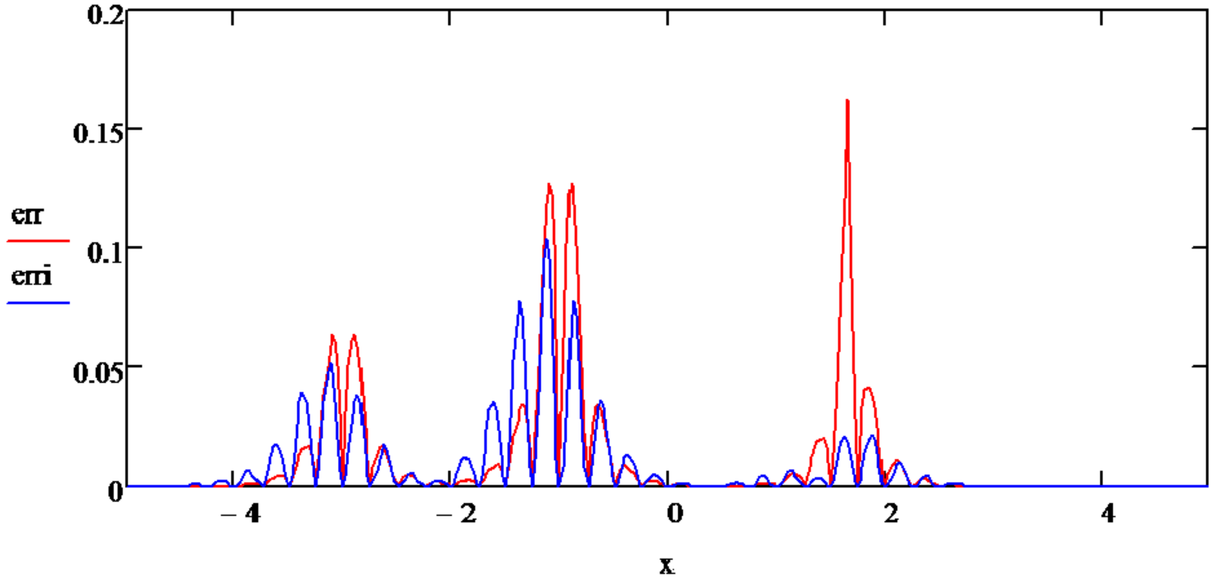

Рис.11. График ошибок 1 интерполяции – красная линия и график оценки ошибок – синяя линия. d=0.25.

Рассмотрим теперь интерполяцию сигнала в виде гладкой функции – функции Гаусса при $\sigma = 3$. На рис.12 приведены графики функции (1) с результатами линейной интерполяции и измеренные значения с шагом d=1.

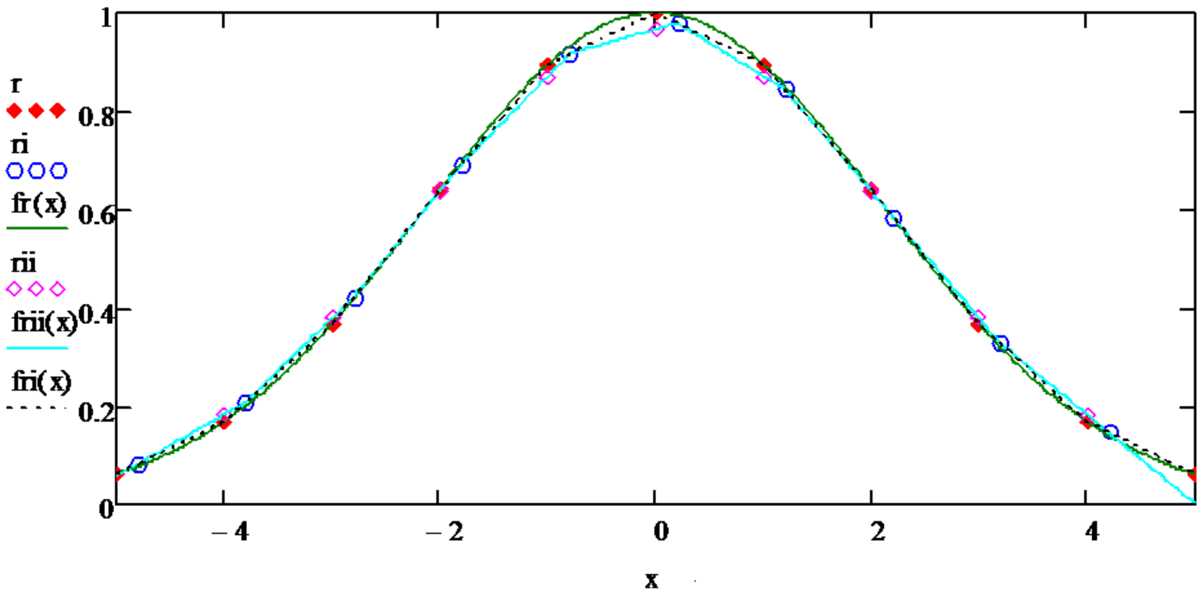

Рис.12. Графики функции (1) (зелёная линия) с результатами линейной интерполяции и измеренные значения с шагом d=1. Чёрный пунктир – 1 интерполяция по измеренным узловым точкам (красные ромбы). Голубая линия – 2 интерполяция по вычисленным точкам (синие окружности). Фиолетовые ромбы – результаты 2 интерполяции в измеренных точках.

Узловые точки для 2 интерполяции отстоят от узловых точек 1 интерполяции на m d, где m=0.2.

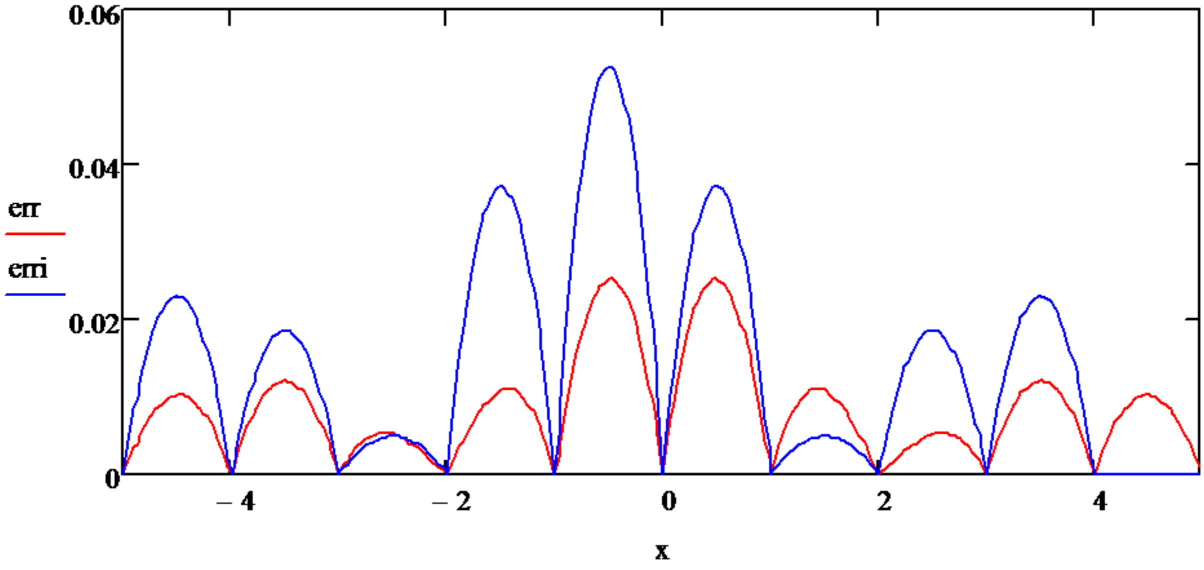

Рис.13. График ошибок 1 интерполяции – красная линия и график оценки ошибок – синяя линия. d=1.

На рис.13 представлены графики ошибок интерполяции и оценки этих ошибок. Как и выше, на рис.10, 11 оценка ошибок на рис.13 по виду зависимости и амплитуде соответствует ошибкам интерполяции.

На рис.14 приведены графики ошибок интерполяции и оценки этих ошибок при d=0.25. Видно, что, несмотря на то, что амплитуда обоих графиков из-за уменьшения d уменьшилась, вид и соотношение амплитуд графиков практически сохранилась.

Аналогичные результаты получаются при интерполировании (1) с помощью кубического сплайна. В качестве примеров этого приведены на рис.15-17 результаты интерполяции сплайном аналогичные рис.12-14.

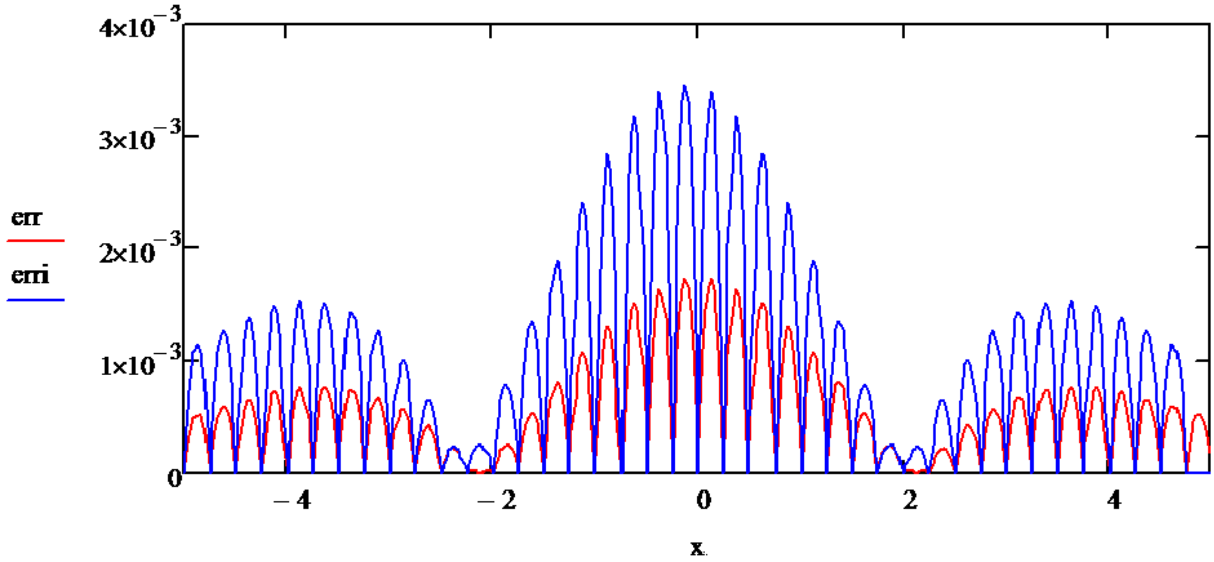

Рис.14. График ошибок 1 интерполяции – красная линия и график оценки ошибок – синяя линия. d=0.25.

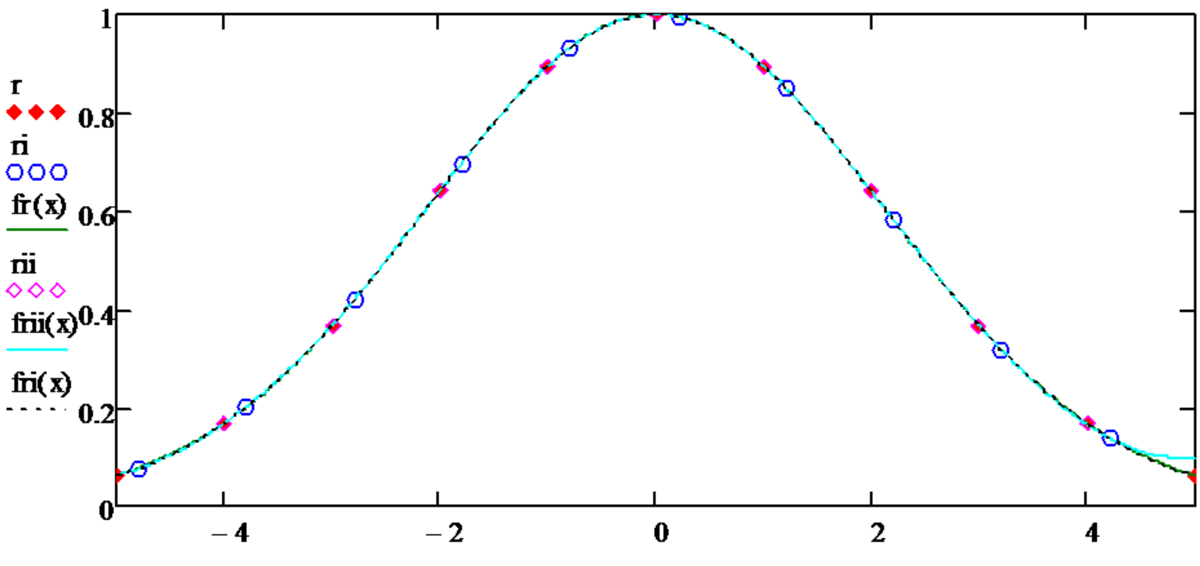

Рис.15. Графики функции (1) (зеленая линия) с результатами интерполяции кубическим сплайном и измеренные значения с шагом d=1. Черный пунктир – 1 интерполяция по измеренным узловым точкам (красные ромбы). Голубая линия – 2 интерполяция по вычисленным точкам (синие окружности). Фиолетовые ромбы – результаты 2 интерполяции в измеренных точках. Узловые точки для 2 интерполяции отстоят от узловых точек 1 интерполяции на m d, где m=0.2.

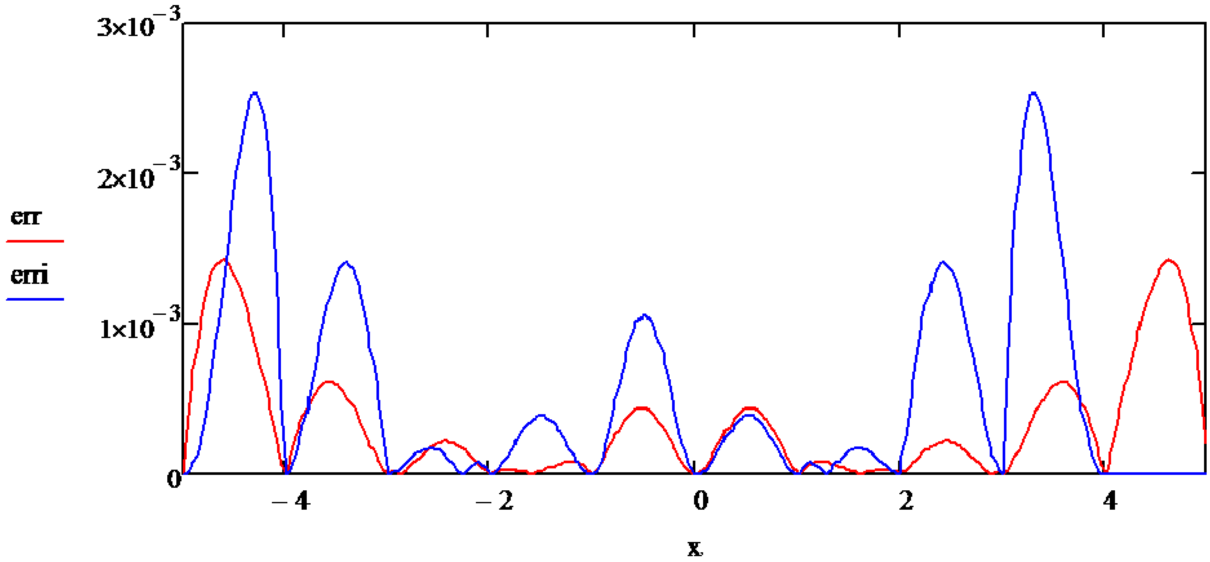

Рис.16. График ошибок 1 интерполяции – красная линия и график оценки ошибок – синяя линия. d=1.

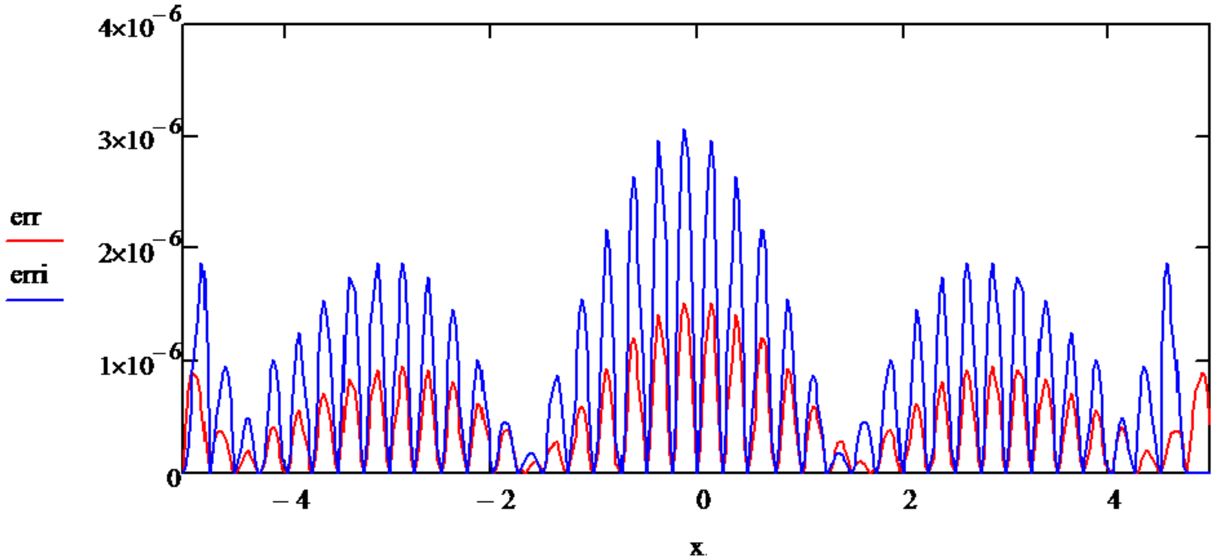

Рис.17. График ошибок 1 интерполяции – красная линия и график оценки ошибок – синяя линия. d=0.25.

Сравнение рис.12-14 с рис.15-17 позволяет сделать вывод с одной стороны о справедливости оценки ошибок интерполяции и для гладкой функции и с другой стороны о предпочтительности в этом случае интерполяции сплайном по сравнению с линейной интерполяцией.

Возможность вычисления оценки ошибки интерполяции в заданной точке позволяет получать и другие характеристики ошибок интерполяции. Например, оценить среднеквадратичную ошибку интерполяции, выявить области с увеличенными ошибками интерполяции, выбрать метод интерполяции более соответствующий измеренным значениям сигнала.

Заключение

Оценка ошибки интерполяции экспериментальных данных является актуальной и не простой задачей [3 - 7]. Часто для такой оценки используют данные, полученные с помощью математического моделирования, или используют данные измерений, которые принимают за эталон.

В данной работе описано применение простого метода оценки ошибки интерполяции. Этот метод формально не требует исследовать свойства интерполированного сигнала и не имеет явных ограничений при использовании любого метода интерполяции. Естественным ограничением метода является требование такого шага измерений, который обеспечивает адекватное описания свойств сигнала.

Литература

1. С. П. Шарый Курс вычислительных методов. // Институт вычислительных технологий СО РАН. Новосибирск. 2016.
2. Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер Машинные методы математических вычислений. // М: Изд-во «Мир», 1980.– 279с.
   Forsajt Dzh., Mal'kol'm M., Mouler K. Mashinnye metody matematicheskih vychislenij: per s angl.– M. Mir, 1980.– 279 s.
3. Д. М. Ермаков, Е. А. Шарков, А. П. Чернушич «Оценка точности интерполяционной схемы спутникового радиотепловидения». // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. – 2015. – Т. 12, № 2. – С. 77-88.

4. Е. В. Щерба «Анализ применимости методов интерполяции и экстраполяции для решения задачи восстановления изображения». // Компьютерная оптика, – 2009 – том 33. №3 – С. 336-339.
5. В. А. Зверев. Радиооптика. // М. «Советское радио» – 1975. – С. 304
6. А.П. Аксенов Математический анализ. (Ряды Фурье. Интеграл Фурье. Суммирование расходящихся рядов.) // Учебное пособие. СПб.: Изд-во «Нестор» – 1999. – С. 86
7. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев Методы теории целых функций в радиофизике теории связи и оптике. // М.: Государственное издательство физико-математической литературы – 1962. – С. 220