

УДК 517.538.72, 534.26

МУЛЬТИПЛИЦИРОВАНИЕ СПЕКТРОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ЧЕРНО-БЕЛЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПЛОСКИХ ФРАКТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

Г. В. Арзамасцева, М. Г. Евтихов, Ф. В. Лисовский, Е.Г. Мансветова

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова
РАН, 141120, Московская область, Фрязино, пл. академика Введенского, 1

Статья поступила в редакцию 13 сентября 2018 г.

Аннотация. Выполнено экспериментальное исследование возможности мультиплицирования спектров пространственных частот плоских черно-белых изображений фрактальных объектов за счет предварительной трансформации их в разреженные. Результаты экспериментов сопоставлены с данными, полученными численным методом с использованием Фурье-преобразования изображений.

Ключевые слова: аппроксимация, двумерное преобразование Фурье, дифракционная картина, мультиплицирование спектров, пространственные частоты, разреженный фрактал, сеточная функция, фрактал L-системы.

Abstract. An experimental study of the possibility of spatial frequencies spectra multiplication for the black and white images of flat fractal objects by using their preliminary transformation into rarefied ones is carried out. The multiplication algorithm, based on well-known method of sampling with a comb function, is illustrated for L-system based geometrical fractal with definite production rules and with seed set (axiom) in a form of unit black square. Realisation of used procedure within the frames of chosen fixed production rules bases on the substitution of initial axiom by unit white square centred with black square with side equals $1/q$, where q is any positive number greater than one. For any integer positive odd number multiplication factor of spectra equals q^2 .

A first step for the experimental determination of spatial frequencies spectra of objects by observation of the diffraction pattern forming in the Fraunhofer zone is the creation of black-and-white raster pictures of the selected fractals on the computer

using specially designed software. Then the resulting pictures were printed onto a transparent film with imagesetter having resolution of 1333 points / cm and the spot size about of 7.5 μm .

Forming after the passage of the light beam through the transparent film with fractal picture diffraction patterns were compared with the fast Fourier transform data of digitized images, obtained by a uniform grid function approximation with sufficiently large (up to 4096x4096) number of nodes in order to ensure adequate approximation of the smallest image details.

It was shown that a good accordance the experimental results with digital calculations data is achieved for $p > 2$, where parameter p equals to the ratio of the smallest element of the fractal image to the approximating grid function period.

Key words: approximation, 2D Fourier transform, diffraction pattern, spectra multiplication, spatial frequencies, sparse fractal, grid function, L-system fractal.

1. Введение

Задача о мультиплицировании спектров пространственных частот плоских объектов родственна задаче о мультиплицировании изображений, успешное решение которой позволило реализовать технологию изготовления интегральных схем с однократной экспозицией [1,2], что привело к бурному развитию микроэлектроники. Необходимость решения первой задачи возникала значительно реже, например, в системах многоканальной обработки и передачи данных. Наиболее известный к настоящему времени метод мультиплицирования спектров пространственных частот основан на использовании дискретизации двумерной функции с помощью квадратной решетки дельта функций, называемой также двумерной гребенчатой функцией; см. например, [3,4].

Сходная идея была использована в описанном нами численном методе [5], когда с помощью компьютера выполнялись все необходимые операции: создание черно-белых растровых изображений двумерных объектов, их оцифровка с использованием однородной сеточной функции периода d с

большим числом узлов (до 4096×4096), обеспечивающим адекватное отображение наименьших деталей с габаритным размером l_{\min} , прореживание оцифрованного изображения до выбранной степени, расчет спектра пространственных частот разреженного объекта с помощью быстрого преобразования Фурье и получение итогового растрового изображения в виде квадратной решетки изображений спектров исходного объекта. Для отображения интенсивности спектральных составляющих на плоскости использовалась линейная шкала с различными уровнями серого¹.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы для различных значений параметра $p = l_{\min} / d$, определяемого отношением габаритного размера наименьшего элемента к периоду сетки, и различной степени прореживания объектов сравнить получаемые численным методом для фракталов высоких поколений спектры с наблюдаемыми в экспериментах при фраунгоферовой дифракции света на изображениях фракталов, переносимых на прозрачную пленку с помощью фотонаборного автомата высокого разрешения. Ранее подобное сравнение спектров было выполнено для многих «непрореженных» объектов, таких как фрактал Вичека, ковер Серпинского, снежинки Коха и др. В экспериментах использовался работающий на длине волны 0,63 мкм гелий-неоновый лазер, пучок света от которого с помощью системы из конфокальных линз коллимировался и расширялся до диаметра, превышающего поперечные размеры изображения фрактального объекта. Изображение дифракционной картины в плоскости дифракции можно было визуально наблюдать на экране, либо подвергать необходимой обработке с помощью сопряженного с компьютером цифрового фотоаппарата [9].

2. Объекты исследования и полученные результаты

Основным объектом исследования являлся подробно описанный в [5] фрактал L-системы [10,11] с затравочным множеством (аксиомой) в виде

¹ Численный метод расчета спектров пространственных частот плоских объектов был впервые применен нами при исследовании фракталоподобных доменных структур в магнитных пленках [6], а позже был опробован также и на многих геометрических фракталах; см. напр. [7-8].

единичного черного квадрата (далее – фрактал 1L). Если этот квадрат на комплексной плоскости (с направлением вещественной и мнимой осей вниз и направо соответственно) поместить в начало координат так, как показано на рис. 1а, то процесс конструирования этого фрактала может быть представлен в виде рекуррентных соотношений

$$Z^{(n+1)} = Z^{(n)} \cup \left(iZ^{(n)} + (1+i)2^n \right) \cup \left(-iZ^{(n)} + (1+i)2^n \right), \quad (1)$$

где $Z^{(0)}$ – затравочное множество (единичный черный квадрат), а символ \cup означает объединение множеств. Изображения предфракталов первого и третьего поколения представлены на рис. 1б и 1в.

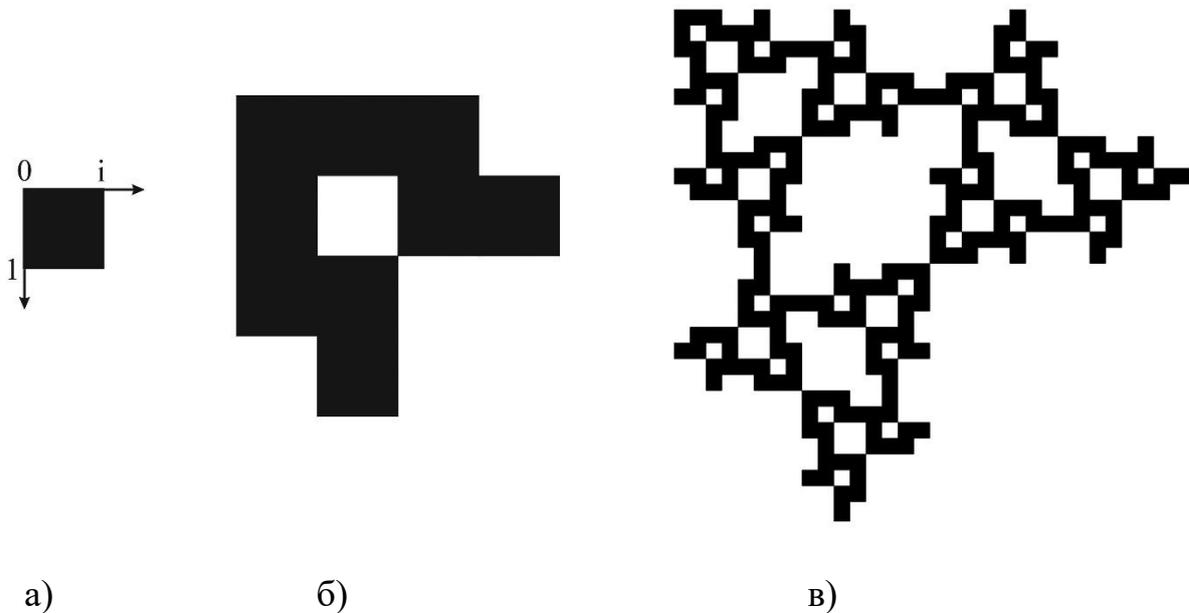


Рис. 1. Аксиома (а) и предфракталы 1-го поколения (б) и 3-го поколения (в) для фрактала 1L.

Мультипликация спектров пространственных частот фракталов 1L любого поколения становится возможной, если при сохранении правил конструирования (1) исходную аксиому (см. рис. 1а) заменить единичным белым квадратом с расположенным в центре черным квадратом со стороной $1/q$, где q – любое положительное число, большее единицы. Замена аксиомы приводит к прореживанию фрактала множества. Чем больше q , тем более

разреженным получается итоговый объект. На рис. 2б и 2в показаны «разреженные» фракталы 1-го и 3-го поколения соответственно при $q=3$.

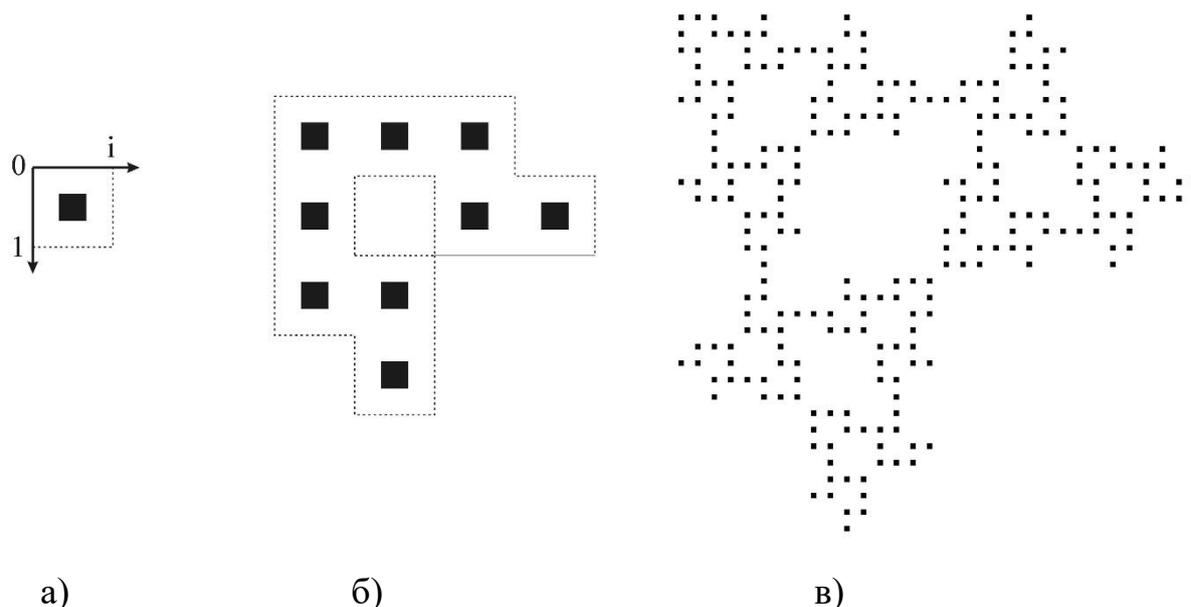


Рис. 2. Аксиома (а) и разреженные предфракталы 1-го поколения (б) и 3-го поколения (в) при $q=3$ для фрактала 1L.

Идеальное мультиплицирование будет иметь место при $q \rightarrow \infty$, когда центральные черные квадраты разреженного фрактала могут быть аппроксимированы дельта функциями (подробнее см в [5]). В реальной ситуации спектры пространственных частот изображений разреженных предфракталов имеют довольно сложную, зависящую от значений параметров p и q конфигурацию, в которой можно выделить центральную часть, представляющую из себя квадратную решетку из копий спектра исходного фрактала 1L), и периферийную, образуемую удаленными от центральной части группами сателлитов, расположенными симметрично на исходящих из центра под прямым углом друг к другу четырех лучах.

Наличие особенностей в спектре пространственных частот плоских фракталов обнаружили авторы работы [12], где они для обозначения центральной и периферийной частей использовали термины «фрактальная часть» и «решеточная часть» и связали появление последней с тем, что в двумерном множестве элементов, образующих фрактал, можно выделить

одномерные дифракционные решетки, состоящие из одинаково ориентированных элементов.

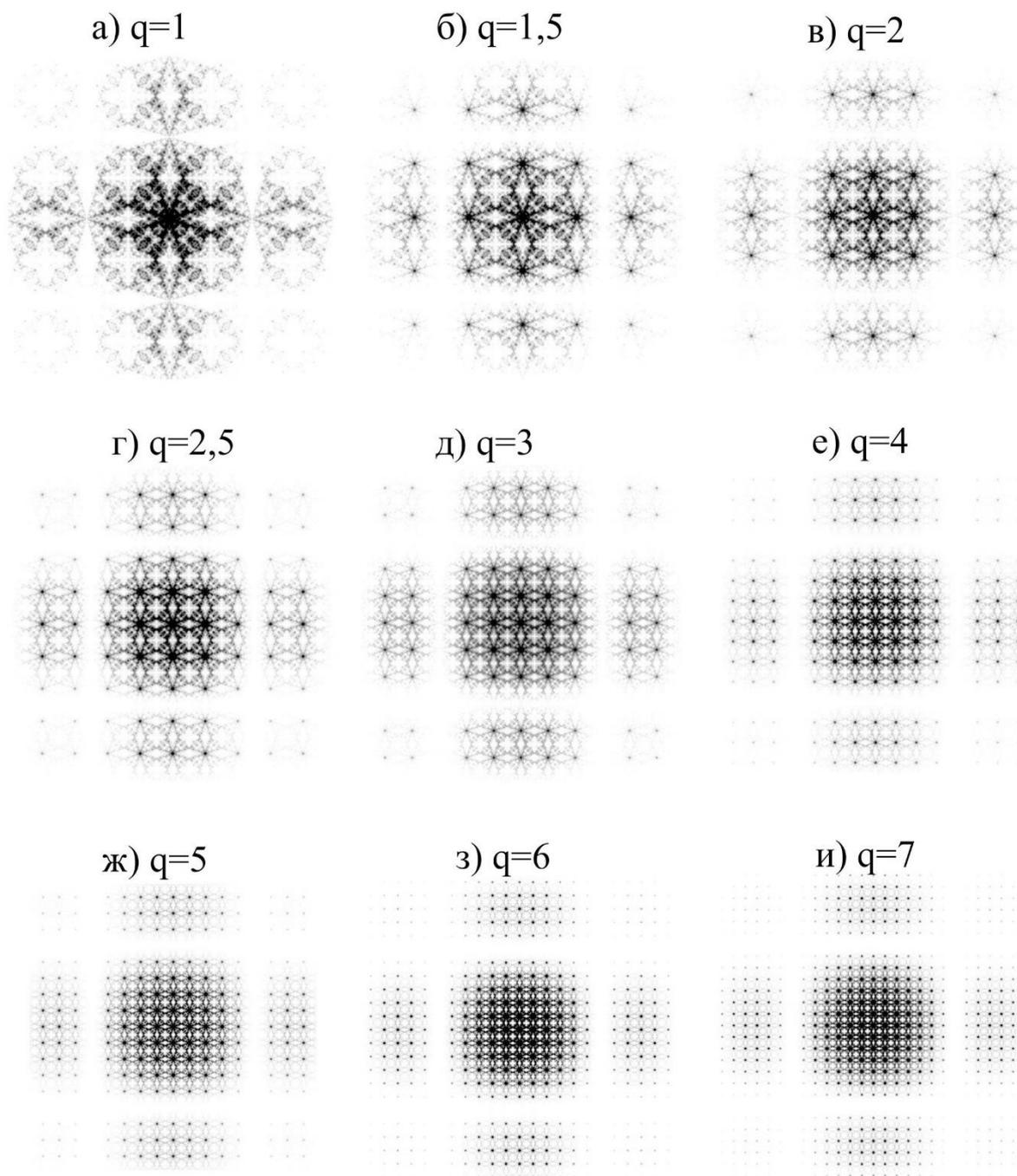


Рис. 3. Результаты численного метода мультипликации спектра пространственных частот разреженного предфрактала 1L 9-го поколения при различных значениях p и q .

Рассчитанные численным методом спектры пространственных частот изображений 9-го поколения разреженного 1L предфрактала при $q = 1 \div 7$ приведены на рис. 3 для $p=8$ (а–е) и $p=6$ (ж–и); увеличенные центральные части спектров изображены на рис. 4. Случай $q = 1$ соответствует спектру исходного

фрактала. С ростом q спектр непрерывно изменяется, число копий растет и в центре, и на периферии, а сами копии уменьшаются в размерах.

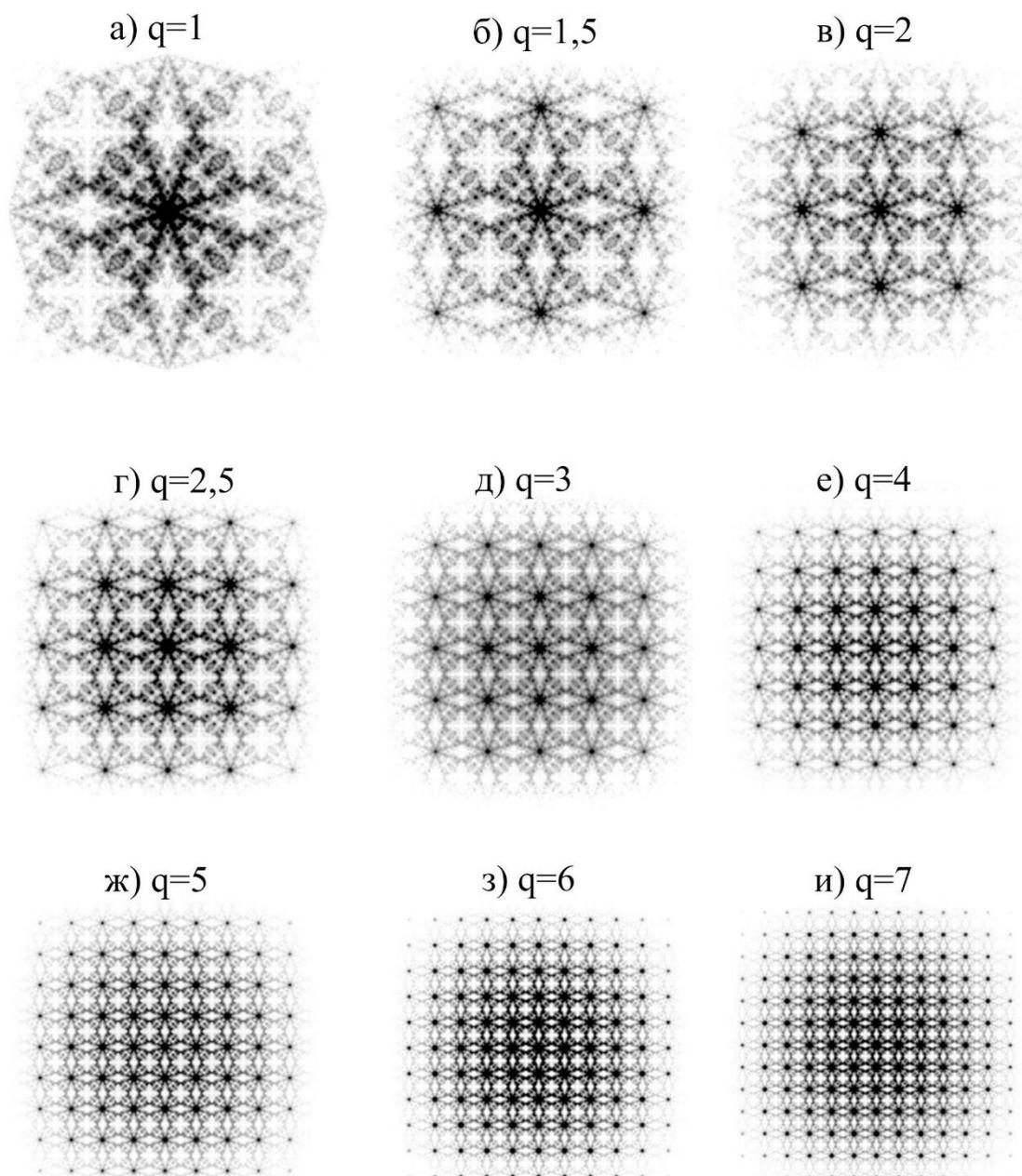


Рис. 4. Центральные (фрактальные) части спектров пространственных частот разреженного предфрактала 1L 9-го поколения при различных значениях p и q .

Ранее выполненные нами исследования показали [9], что даже для исходных (неразрезанных) фракталов степень соответствия полученных численным методом спектров пространственных частот наблюдаемым методом дифракции сильно зависит от параметра p , особенно при малых значениях последнего. Тем не менее, даже при $p = 1$ использование численных методов

применительно к исходным и разреженным фракталам приводит к достаточно хорошему отображению центральной части спектров, хотя решеточная полностью отсутствует (см. рис. 5).

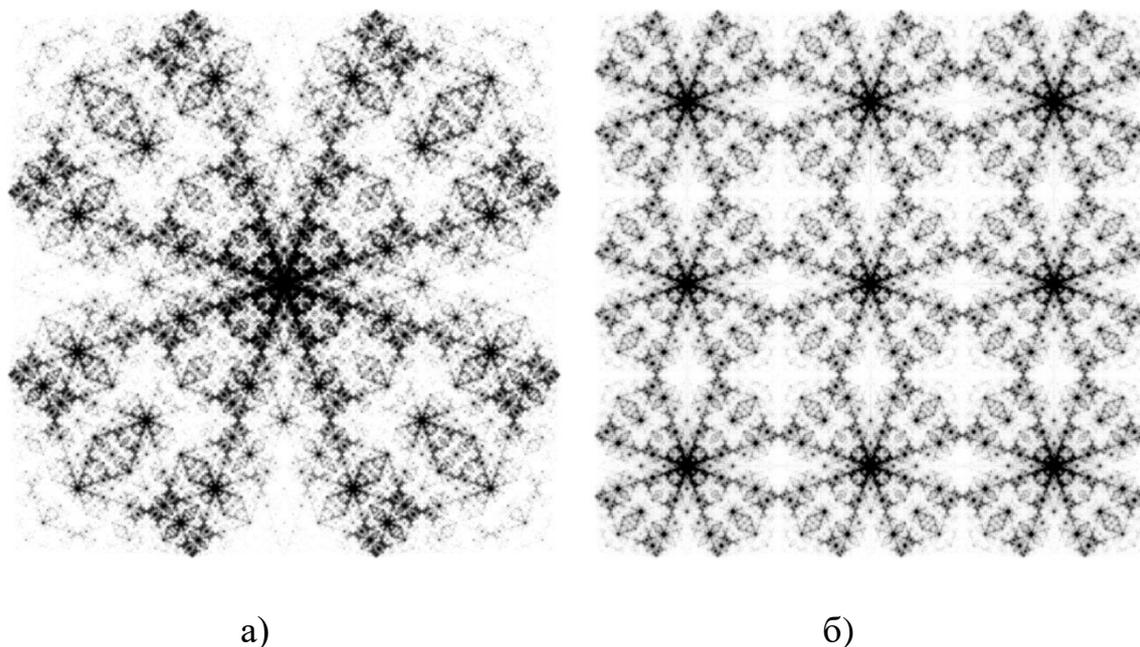


Рис. 5. Полученные численным методом спектры пространственных частот исходного (а) и разреженного (б) фрактала 1L 9-го поколения при $p = 1$ и $q = 3$

Решеточная часть спектра появляется при $p \geq 2$, причем область ее существования увеличивается при уменьшении размера ячейки сеточной функции. Сравнение полученных численным методом спектров при больших значениях p с экспериментальными показывает, что они совпадают с высокой степенью точности. Этот результат не зависит от номера поколения предфрактала; но для высоких поколений при использовании численного метода на спектрах более четко проявляются детали фрактальной части. В качестве примера на рис. 6 для $p = 8$ в двух разных масштабах приведены фотографии крупного плана центральной части полученных численным методом спектров (а,в) и экспериментальных (б,г), свидетельствующие о хорошем совпадении получаемых результатов.

При тщательном изучении экспериментальных дифракционных картин для «разреженных» фракталов было обнаружено, что они практически всегда имеют отличия от получаемых численным методом. По-видимому, причина

этих отличий заключается в том, что экспонирование пленки в фотонаборном автомате при создании изображений осуществлялось лазером, плотность энергии в поперечном сечении пучка которого распределяется по закону Гаусса, что приводит к уменьшению эффективного размера черного квадрата (внутри белого) для «разреженных» фракталов, то есть, к увеличению q .

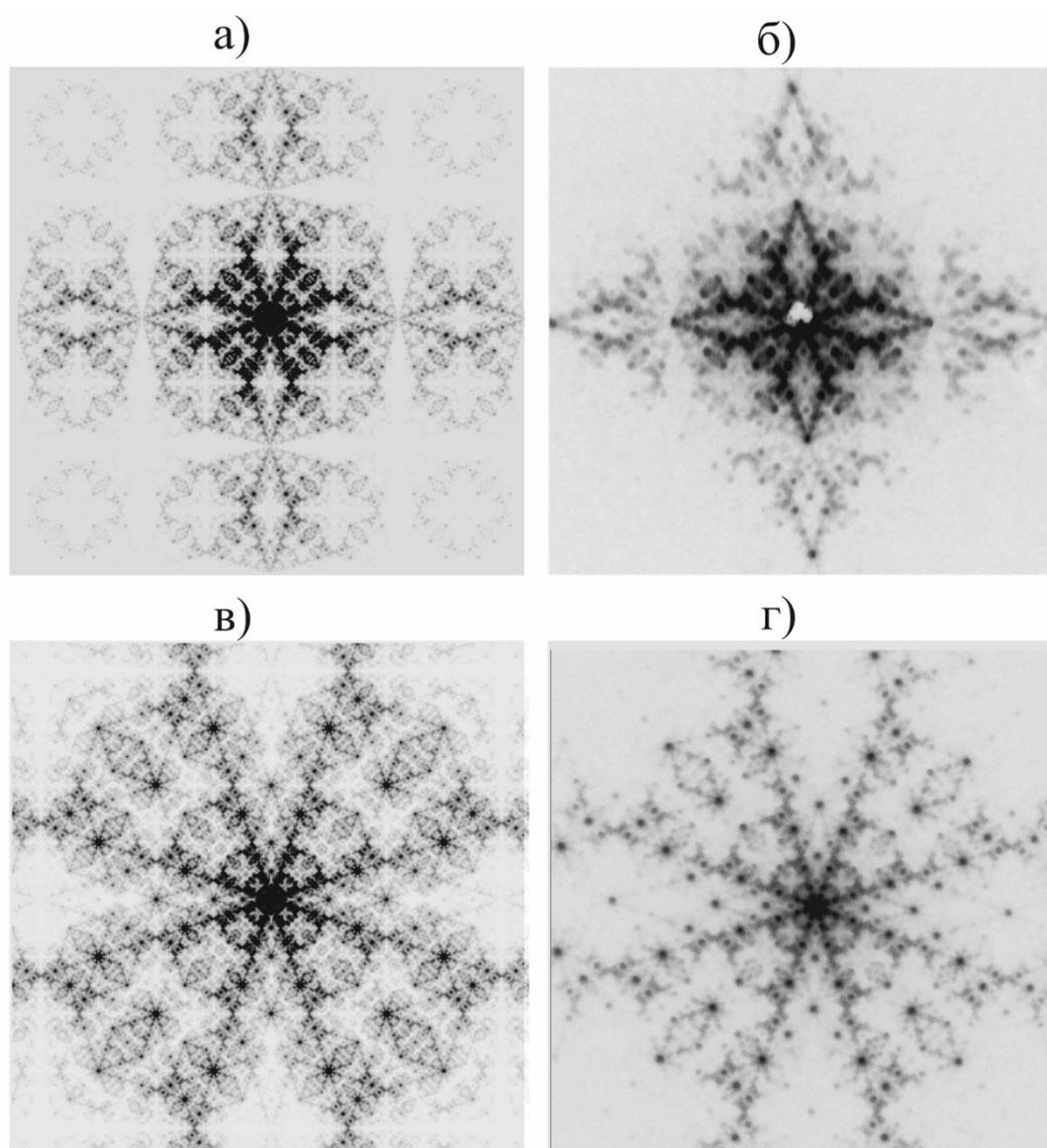


Рис. 6. Центральные части полученных численным методом (а,в) и экспериментальных (б,г) спектров пространственных частот в двух разных масштабах для фрактала 1L 9-го поколения при $p = 8$.

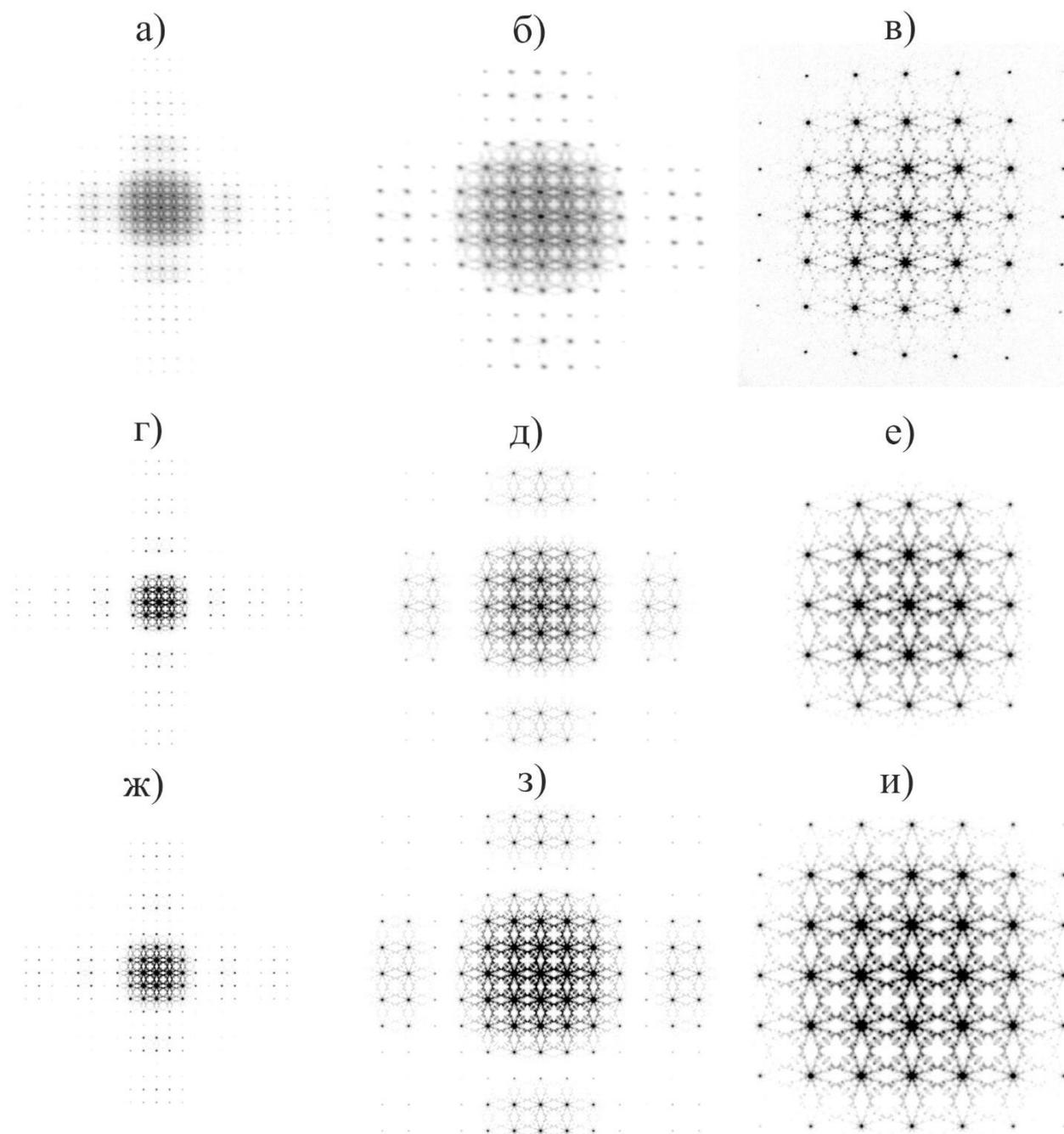


Рис. 7. Экспериментальные при $q = 3$ (а,б,в) и полученные численным методом при $p=8$ для $q = 3$ (г,д,е) и при $q = 3.67$ (г,д,е) спектры пространственных частот в трех разных масштабах для фрактала 1L 9-го поколения.

На рис.7(а,б,в) в трех разных масштабах приведены экспериментальные спектры пространственных частот для «разреженного» фрактала 1L с $q = 3$ и полученные численным методом спектры (рис.7,г,д,е). Эти спектры имели отличия, которые были устранены при вычислениях с эмпирически подобранным значением $q = 3.67$ (см. рис.7,ж,з,и). Экспериментальный спектр

для разреженного фрактала 1L 7-го поколения при $q=5$ (рис.8,а,б) прекрасно соответствовал вычисленному при $q=6$ и $p=8$ (см. рис.8,в,г).

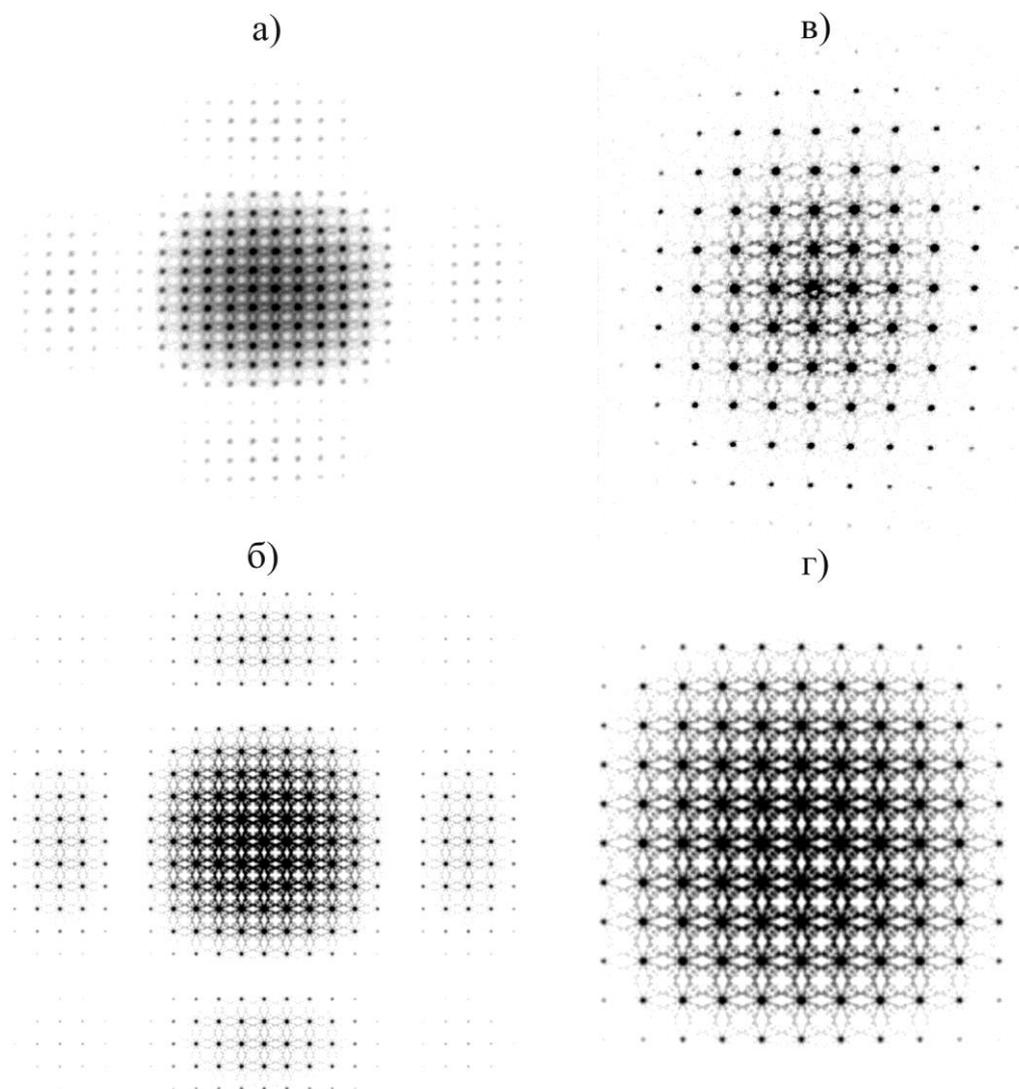


Рис. 8. Экспериментальные при $q = 5$ (а,б) и полученные численным методом при $p = 8$ и $q = 6q$ (в,г) спектры пространственных частот в двух разных масштабах для фрактала 1L 7-го поколения.

Был изучен и другой фрактал L-системы (далее – 2L), который также имеет аксиому в виде единичного черного квадрата, а процесс конструирования изображения на комплексной плоскости может быть представлен в виде рекуррентных соотношений [5,10,11]

$$Z^{(n+1)} = Z^{(n)} \cup \left(-Z^{(n)} + (2+i)2^n \right) \cup \left(-Z^{(n)} + (1+2i)2^n \right). \quad (2)$$

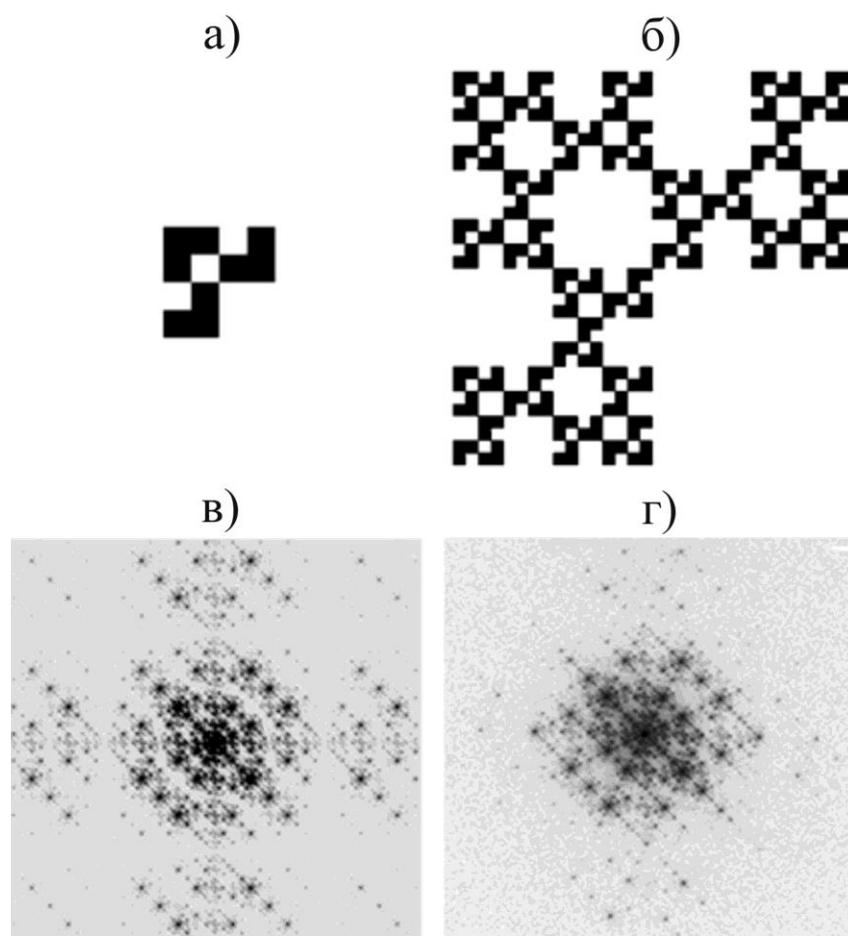


Рис. 9. Предфракталы 2L 1-го поколения (а), 3-го поколения и спектры пространственных частот, полученные для 9-го поколения численным методом при $p = 8$ (в) и в экспериментах (г).

Результаты для фрактала 2L отображены на Рис. 9 и Рис. 10. На первом из них, относящемся к исходному (неразрезанному) фракталу, показаны предфракталы 1-го поколения (а) и 3-го поколения (б), а также спектры пространственных частот, полученные для 9-го поколения численным методом при $p = 8$ (в) и в экспериментах (г).

На Рис.10 изображен разреженный 2L фрактал 3-го поколения (а) и в двух разных масштабах спектры пространственных частот: экспериментальные при $q = 3$ (б,в) и полученные численным методом при $q = 3.67$ и $p = 8$ (г,д) для 2L предфрактала 8-го поколения. Эмпирически подобранное нецелое значение q , как и в случае фрактала 1L, устраняло различие между рассчитанными и экспериментальными спектрами.

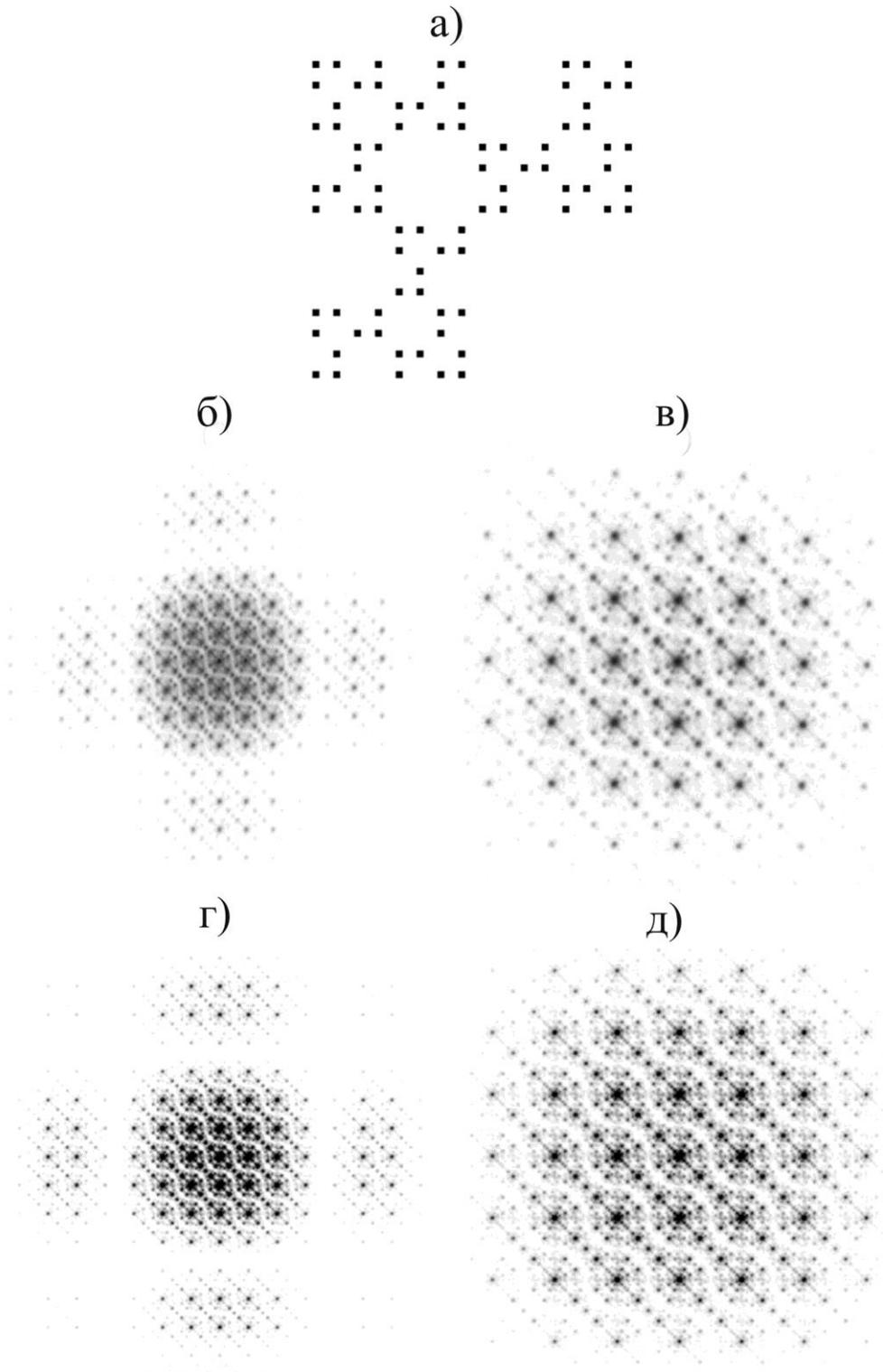


Рис. 10. Разреженный 2L предфрактал 3-го поколения (а) и экспериментальные при $q = 3$ (б,в) и полученные численным методом при $q = 3.67$ и $p = 8$ (г,д) спектры пространственных частот в двух разных масштабах для фрактала 8-го поколения.

3. Заключение

Выполненные исследования показали, что методом прореживания черных изображений плоских фракталов можно осуществлять качественное мультиплицирование пространственных спектров, используя быстрое преобразование Фурье, при отношении габаритного размера наименьшего элемента изображения к периоду аппроксимирующей сетки $p = l_{\min} / d$ более двух. Центральная часть спектра хорошо отображается даже при $p \geq 1$, а решетчатая часть спектра появляется при $p \geq 2$, причем область ее существования увеличивается при уменьшении размера ячейки сеточной функции, а расчетная дифракционная картина все более приближается к экспериментально наблюдаемой. Было обнаружено, что наблюдаемые в экспериментах по дифракции спектры «разреженных» фракталов всегда имеют незначительные отличия от получаемых численным методом, поскольку экспонирование пленки в фотонаборном автомате для создания изображений осуществляется лазером, плотность энергии в поперечном сечении пучка которого распределяется по закону Гаусса, что приводит к уменьшению эффективного размера черного квадрата (внутри белого) для «разреженных» фракталов, то есть, к увеличению q .

Литература

1. Grove A.S. Physics and technology of semiconductor devices. New York: John Wiley & Sons. 1967.
2. Lu S. Generating multiple images for integrated circuits by Fourier-transform holograms. // Proc. IEEE. 1968. V.56. №1. P. 116-117.
3. Goodman J.W. Introduction to Fourier optics. New York: McGraw Hill Book Co.1968.
4. Pratt W.K. Digital image processing. New York: John Wiley & Sons. 2007.
5. Арзамасцева Г.В., Евтихов М.Г., Лисовский Ф.В. Компьютерное моделирование мультиплицирования Фурье-спектров предфракталов L-

системы. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2012. Т.17. №12. С. 29-32.

6. Арзамасцева Г.В., Евтихов М.Г., Лисовский Ф.В., Лукашенко Л.И. Компьютерное моделирование дифракции света на фрактальных доменных структурах. // Тр. XIX Междунар. школы-семинара “Новые магнитные материалы микроэлектроники” 2004. Москва. С. 632-634.

7. Арзамасцева Г.В., Евтихов М.Г., Лисовский Ф.В., Мансветова Е.Г. Фурье-образы фрактальных объектов. // Изв. РАН, сер. физ., 2010, т. 74, № 10, С.1430-1432.

8. Арзамасцева Г.В., Евтихов М.Г., Лисовский Ф.В., Мансветова Е.Г. Компьютерное моделирование дифракции Фраунгофера на Н-фракталах и кривых Пеано. // Электромагнитные волны и электронные системы, 2012, т. 17, № 7, С. 48-58.

9. Арзамасцева Г.В., Евтихов М.Г., Лисовский Ф.В., Мансветова Е.Г. Дифракция света на фракталах: сопоставление данных экспериментов с получаемыми численными методами Фурье-образами изображений объектов. // РЭНСИТ, 2012, т. 9, № 2, С. 215-222.

10. Lindermayer A. Mathematical model for cellular interaction in development I. Filaments with one-sided inputs. // J. Theor. Biol., 1968, V. 18, № 3, P. 280-289.

11. Lindermayer A. Mathematical model for cellular interaction in development II. Simple and branching filaments with two-sided inputs. // J. Theor. Biol., 1968, V. 18, № 3, P. 300-315.

12. Uozumi J, Kimura H, Asakura T. Fraunhofer diffraction by Koch fractals. // J. Mod. Optics, 1990, V. 37, № 6, P. 1011-1031.

Для цитирования:

Г. В. Арзамасцева, М. Г. Евтихов, Ф. В. Лисовский, Е.Г. Мансветова. Мультиплицирование спектров пространственных частот черно-белых изображений плоских фрактальных объектов. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2018. № 9. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/sep18/18/text.pdf>
DOI 10.30898/1684-1719.2018.9.18