

УДК 537.874; 537.624

## ВЛИЯНИЕ ОБМЕННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ДИНАМИЧЕСКОГО РАЗМАГНИЧИВАНИЯ НА ДИСПЕРСИЮ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ ДЭЙМОНА-ЭШБАХА

### ЧАСТЬ 2. ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ

В. И. Щеглов

Институт радиотехники и электроники им В.А.Котельникова РАН,  
125009, Москва, ул. Моховая, 11-7

Статья поступила в редакцию 6 августа 2019 г.

**Аннотация.** Рассмотрено распространение поверхностной магнитостатической волны в классической геометрии задачи Дэймона-Эшбаха, представляющей собой ферритовую пластину, намагниченную внешним полем в ее плоскости. Рассмотрение выполнено с учетом динамического размагничивания и неоднородного обменного взаимодействия. Получен тензор магнитной проницаемости с учетом периодического характера распространяющейся волны. Отмечен смешанный симметрично-антисимметричный характер тензора проницаемости, обусловленный учетом динамического размагничивания. Определены условия частотной расходимости компонент тензора, дополненные к влиянию постоянного поля также действием неоднородного обмена. Рассмотрена общая постановка задачи о распространении поверхностной магнитостатической волны. Отмечено, что равенство нулю ротора от динамического магнитного поля волны позволяет ввести потенциал этого поля, а равенство нулю дивергенции от магнитной индукции той же волны позволяет для потенциала получить уравнение Уокера, являющееся аналогом уравнения Лапласа для магнитной среды. Отмечено наличие смешанной второй производной по координатам в уравнении Уокера, обусловленное влиянием размагничивания и обмена. Показано, что смешанный характер производной приводит к двойственности поперечного волнового числа. Для геометрии задачи Дэймона-Эшбаха записаны уравнения для потенциала в магнитной пластине и окружающих ее с обеих сторон двух свободных полупространствах. Приведены граничные условия на поверхностях

между материалом пластины и свободным пространством. В результате решения поставленной граничной задачи методом разделения переменных получено дисперсионное соотношение для поверхностной волны, распространяющейся в плоскости пластины перпендикулярно направлению постоянного поля. Подробно рассмотрен двойственный характер поперечного волнового числа, обусловленный смешанной производной в уравнении Уокера. Получены аналитические выражения для обоих значений волнового числа, обусловленные только размагничиванием в отсутствие обмена. Показано, что получение обеих компонент волнового числа при наличии обменного взаимодействия требует решения алгебраического уравнения восьмой степени, осуществимого только численным методом. Приведена общая схема получения закона дисперсии как функциональной зависимости частоты волны от ее продольного волнового числа. Предложен алгоритм расчета, состоящий в пошаговом задании продольного волнового числа с нахождением значения частоты на каждом шаге методом поиска нуля. Приведены схемы алгоритмов получения обеих частей дисперсионного соотношения, а также действительной и мнимой частей соотношения в целом. Отмечено, что приведенный алгоритм позволяет получить функциональную зависимость частоты распространяющейся волны от продольного волнового числа, что и составляет искомый закон дисперсии. Приведены результаты расчета дисперсии поверхностной магнитостатической волны на основе полученного дисперсионного соотношения. В качестве точки для сравнения приведена классическая дисперсионная зависимость для обменной волны в безграничном пространстве и ее обобщение для тонкой пластины. На основе полученного дисперсионного соотношения построены дисперсионные кривые с учетом как размагничивания, так и обмена. Исследования выполнены в интервале продольного волнового числа от нуля до  $4 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ , что превышает традиционно реализуемый диапазон в экспериментах по дипольным магнитостатическим волнам примерно на два порядка. Выполнено сравнение полученных кривых с таковыми для классической задачи Дэймона-Эшбаха, а также для классической обменной волны в безграничной среде и тонкой пластине. Показано, что

учет размагничивания приводит к повышению дисперсионных кривых в области волновых чисел, величина которых превышает обратную величину толщины пластины. Показано, что обменное взаимодействие приводит к квадратичному росту дисперсионных кривых, существенно превышающему дисперсионные кривые для поверхностных волн, полученные в рамках классической задачи Дэймона-Эшбаха. На основе полученного дисперсионного соотношения с учетом размагничивания и обмена, рассмотрена зависимость закона дисперсии для поверхностной волны от толщины пластины. Отмечено, что дисперсионные кривые при любой толщине, по мере роста волнового числа, также возрастают по закону, близкому к квадратичному. При этом в области значений волнового числа, меньших обратной толщины пластины, крутизна дисперсионных зависимостей по мере уменьшения толщины возрастает. В области значений волнового числа, больших обратной толщины пластины, крутизна дисперсионных кривых по мере уменьшения толщины асимптотически стремится к величине, свойственной закону дисперсии в отсутствие размагничивания. На основе полученного дисперсионного соотношения с учетом размагничивания и обмена, рассмотрена зависимость закона дисперсии для поверхностной волны от величины константы обменного взаимодействия. Рассмотрение выполнено при толщине пластины равной 1 мкм, что обеспечивало начало заметного влияния размагничивания примерно на середине исследуемого диапазона волнового числа (то есть около  $2 \cdot 10^4$  см<sup>-1</sup>). В качестве эталона принято значение константы обмена, свойственное железиттриевому гранату. Получены дисперсионные кривые при разной величине константы обменного взаимодействия в интервале от одного до ста эталонных значений. Показано, что при величине константы порядка единицы от эталонного значения, дисперсионная кривая, хотя и проходит несколько выше классической, соответствующей задаче Дэймона-Эшбаха, но квадратичный характер дисперсии заметно не проявляется. Показано, что для заметного проявления квадратичности необходимо превышение константы обмена не менее чем на порядок по сравнению с эталоном. При этом превышение константы над эталоном на два порядка приводит к полному пре-

обладанию квадратичного закона над классическим. Отмечена связанная с численным характером решения задачи техническая причина ограничения интервала продольного волнового числа величиной  $4 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ . Выявлены ее особенности и указаны пути их преодоления. В качестве важнейшей задачи для дальнейшего рассмотрения отмечена необходимость расширения исследуемого диапазона продольного волнового числа не менее чем на два порядка.

**Ключевые слова:** магнитостатическая волна, размагничивающее поле, обменное взаимодействие, дисперсия волн, наноразмеры.

**Abstract.** The propagation of magnetostatic wave in classic geometry of Damon-Eshbach task which is established as ferrite plate magnetized by external field in its plane is investigated. The investigation is made in connection with dynamic demagnetization and nonuniform exchange interaction. It is found the tensor of magnetic permeability in consideration with the periodic character of propagating wave. It is found the mixed symmetrical-anti-symmetrical character of permeability tensor which is connected with the consideration of dynamic demagnetization. It is found the conditions of frequency divergence of tensor components which are supplemented to the influence of direct field also by the nonuniform exchange action. It is investigated the whole organization of task about propagation of magnetostatic surface wave. It is established that the equality to zero of curl from dynamic magnetic field of wave allows to introduce the potential of this field. Also the equality to zero of divergence from magnetic induction of the same wave allows to find the Walker equation which is analog with the Laplace equation for magnetic medium. It is found the existence of mixed second derivation by coordinated in Walker excitation which is brought by the influence of demagnetization and exchange. It is shown that the mixed character of derivation leads to the ambivalent character of transverse wave number. For the geometry of Damon-Eshbach task the equations for potential in magnetic plate and surrounding its form both sides free half-spaces. It is described the boundary conditions on the surfaces between the material of plate and free spaces. As a result from the decision of established boundary task by variation division method the dispersion relation for surface wave propagating in plate plane in direc-

tion perpendicular to constant field is found. In details it is investigated the double character of transversal wave number which is connected with the mixed derivation in Walker equation. It is found the analytical expressions for both meanings of wave number which determined only the demagnetization without the exchange. It is shown that the founding of both components of wave number when exchange interaction is present require with the decision of eight degree algebraic equation which may be decided only by numerical method. It is described the general scheme of dispersion law founding as a functional dependence of wave frequency from the its longitudinal wave number. It is proposed the algorithm of calculation which consist of step by step assignment of longitudinal wave number with the determination of frequency value on each step by zero searching method. It is described the schemes of calculation algorithms of both paths of dispersion relation and also the real and imaginary paths of relation as a whole. It is demonstrated that described algorithm allows to found the functional dependence of wave propagating frequency from the longitudinal wave number which is the unknown dispersion law. It is described the results of calculation magnetostatic surfaces wave dispersion on the basis of received dispersion relation. As a point for comparison it is described the classic dispersion dependence for exchange wave in infinite space and its generalization for the case of thin plate. On the basis of founded dispersion relation are constructed the dispersion curves with the consideration of demagnetization and exchange interaction. The investigations are performed in the interval of longitudinal wave number from zero to  $4 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1}$ , which is more than traditionally realized range in experiments of dipole magnetostatic waves about of two orders. It is made the comparison of founded curves with the same for classic Damon-Eshbach task and also for classic exchange wave in infinite space and thin plate. It is shown that the consideration with demagnetization direct to the increasing of dispersion curves in the region of wave numbers having values more the inverse value of plate thickness. It is shown that the exchange interaction leads to the quadratic exchange of dispersion curves which is more increased from dispersion curves for surface waves founded in frames of classic Damon-Eshbach task. On the basis of founded dispersion relation with the consideration

of demagnetization and exchange it is investigated the dependence of dispersion law for surface wave from the plate thickness. It is found that the dispersion curves for any thickness when the wave number is increased also increase by the law near to quadratic. In this case in region near the wave number values which are less from inverse value of plate thickness the steepness of dispersion curves increases when the thickness is decreases. In the region of wave number which are more than inverse value of plate thickness the steepness of dispersion curves when the thickness is decreases asymptotically try to attain the value which is determined by dispersion law when the demagnetization is absent. On the basis of founded dispersion relation with the consideration of demagnetization and exchange it is investigated the dependence of dispersion law for surface wave from the constant of exchange interaction. The investigation is made when the thickness of plate is equal to 1 micrometer. This choice ensures the visible influence of demagnetization about the middle of investigated range of wave number (so as  $2 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1}$ ). As the standard it was established the value of exchange constant equal to the same in yttrium iron garnet. It is found the dispersion curves having different values of exchange constant in the region from unit to hundred standard values. It is shown that when constant value exchanged from unit near the standard value the dispersion curve positioned less higher from classic Damon-Eshbach curve but its quadratic character is in visible not maintained. It is founded that for visible manifestation of quadratic character it is necessary the increasing of exchange constant more than one order in comparison with standard value. In this case the exceeding of constant above standard to two orders brings to the whole predomination of quadratic law over the classic. It is mentioned the connected with numerical character of task decision technical reason of limitation of longitudinal wave number by the value of  $4 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1}$ . It is founded its reasons and proposed the way of its overcoming. As a most important task for further investigation it is established the necessity of expansion of investigated region of longitudinal wave number no less than two orders of value.

**Key words:** magnetostatic wave, demagnetizing field, exchange interaction, wave dispersion, nanoscale.

## Введение

Сегодняшняя тенденция к уменьшению размеров устройств обработки информации, использующих волновые процессы в ферритах, требует обращения к нанометровому диапазону длин магнитостатических волн [1-4]. В этом плане на смену довольно длинных (десятки и сотни микрон) дипольных волн [5-8] ожидается пришествие коротких (десятки и единицы нанометров) волн обменного характера [9, 10], в том числе терагерцового диапазона, возбуждаемых импульсами фемтосекундной длительности [11-13].

В работе [14] показано, что в свойствах таких волн решающее значение приобретают динамические поля размагничивания, а также неоднородное обменное взаимодействие. Влияние размагничивания становится особенно заметным в пленках толщиной в единицы и доли микрона для волн, длиной меньше нескольких микрон. Для более коротких волн (десятки и сотни нанометров) важнейшее значение, наряду с размагничиванием, приобретает неоднородное обменное взаимодействие.

Работа [14] ограничивает рассмотрение влиянием размагничивания без обмена, что делает ее результаты корректно применимыми только для волн, длина которых превышает единицы микрон.

В работе [15] выполнен учет неоднородного обменного взаимодействия, позволяющий рассматривать волны длиной до единиц нанометров. Рассмотрение, как и в предыдущей работе [14], выполнено на основе классической задачи о распространении поверхностной волны типа Дэймона-Эшбаха в ферритовой пластине, намагниченной вдоль ее плоскости [5, 16-19]. Показано, что компонента волнового вектора, перпендикулярная направлению распространения волны, имеет комплексный характер, так что поперечное волновое число содержит действительную и мнимую части, отличающиеся друг от друга принципиально различной пространственной зависимостью от перпендикулярной координаты (экспонента и синус). Для обеих (действительной и мнимой) компонент поперечного волнового числа получена система уравнений восьмой степени, решение которой выполнено методом поиска нуля. Показано, что введение

обменного взаимодействия приводит к существенному увеличению волнового числа, в первую очередь, его мнимой части, причем такое увеличение проявляется тем сильнее, чем константа обменного взаимодействия больше.

Настоящая работа является непосредственным продолжением работы [15], направленным на получение дисперсионного соотношения для поверхностной волны типа Дэймона-Эшбаха с учетом как размагничивания, так и неоднородного обмена. Расчет дисперсионного соотношения в большей части аналогичен выполненному в работе [14] для случая размагничивания без обмена, однако учет обменного взаимодействия накладывает ряд особенностей, поэтому, в основном, следуя [14], все же приведем его здесь достаточно подробно.

### 1. Геометрия задачи

Главной задачей настоящей, второй части работы [15], является получение дисперсионного соотношения для поверхностной волны Дэймона-Эшбаха с учетом динамического размагничивания и неоднородного обменного взаимодействия. Будем использовать ту же геометрию задачи, что и в работе [15]. Схема геометрии приведена на рис.1.

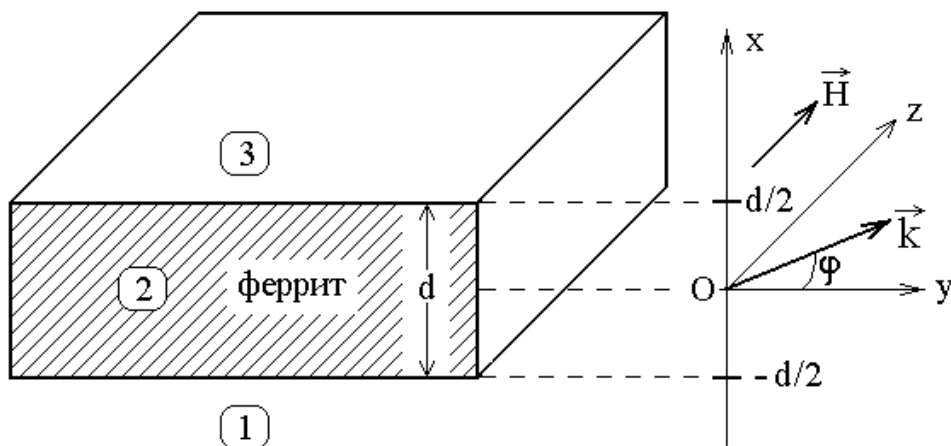


Рис.1. Геометрия задачи.

Структура представляет собой безграничную ферритовую пластину 2 толщиной  $d$ , по обе стороны от которой находятся свободные полупростран-



ства 1 и 3. Система координат  $Oxuz$  выбрана таким образом, что ее плоскость  $Ouz$  параллельна плоскостям ферритовой пластины, а ось  $Ox$  – перпендикулярна. При этом ось  $Oz$  ориентирована вдоль направления внешнего поля. Начало координат  $O$  находится посередине между поверхностными плоскостями пластины, координаты которых равны  $\pm d/2$ . Подобно работе [15], ограничимся рассмотрением волны, распространяющейся вдоль оси  $Oy$ , так что полагаем  $\varphi = 0$ . При численных расчетах будем, в основном, использовать параметры железиттриевого граната (ЖИГ), приведенные в подписях к рисункам.

## 2. Общая структура компонент тензора магнитной проницаемости

Главной средой для распространения волны является пластина, обладающая магнитными свойствами, поэтому начнем рассмотрение с получения тензора магнитной проницаемости ее материала.

Следуя работе [15], будем полагать тензор магнитной проницаемости в виде:

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \nu_1 & 0 \\ -\nu_2 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

В работе [15] показано, что для частного случая распространения волны вдоль оси  $Oy$ , то есть при условии:

$$k_z = 0, \quad (2)$$

компоненты  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  тензора (1), а также необходимый далее параметр  $\nu$ , с учетом размагничивания и обмена и определяются выражениями (формулы (128)-(132) в работе [15]):

$$\mu_1 = \frac{\Omega_{1k}^2 - \beta \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_{0k}^2}; \quad (3)$$

$$\mu_2 = \frac{\Omega_{Ik}^2 - \beta \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_{Ok}^2}; \quad (4)$$

$$v_1 = \frac{-i\Omega + \beta \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_{Ok}^2}; \quad (5)$$

$$v_2 = \frac{-i\Omega - \beta \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_{Ok}^2}. \quad (6)$$

$$v = v_1 - v_2 = \frac{2\beta \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2}}{\Omega_{Ok}^2}. \quad (7)$$

В этих формулах использованы вспомогательные обозначения (формулы (126), (127), (119) в работе [15]):

$$\Omega_{Ok}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta); \quad (8)$$

$$\Omega_{Ik}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta + 1), \quad (9)$$

а также:

$$\Omega_{Hk} = \Omega_H + Q(k_x^2 + k_y^2), \quad (10)$$

где нормированные частоты определяются выражениями (формулы (23)-(25) в работе [15]):

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \quad (11)$$

$$\Omega_H = \frac{H_0}{4\pi M_0}; \quad (12)$$

$$Q = \frac{q}{4\pi}, \quad (13)$$

в которых  $M_0$  – намагниченность насыщения и  $q$  – константа обменного взаимодействия магнитной пластины.

Обозначение  $\beta$  в формулах (3)-(9) представляет собой нормированный параметр размагничивания, который будем считать определенным через продольное волновое число  $k_y$  формулой (21) в работе [14]:

$$\beta = \frac{\alpha_p}{2} \left\{ th \left[ d \left( k_y - \frac{\pi}{d} \right) \right] + 1 \right\}, \quad (14)$$

где  $\alpha_p$  – нормировочный коэффициент, такой что:  $0 \leq \alpha_p \leq 0,1$ .

В силу двойственности поперечного волнового числа  $k_x^{(\pm)}$ , компоненты тензора  $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$  также будут иметь двойственный характер. В разделах №11-№14 будет выполнен их подробный расчет сначала при  $k_x \rightarrow k_x^{(+)}$  (разделы №11, №12), а затем при  $k_x \rightarrow k_x^{(-)}$  (разделы №13, №14).

### 3. Общая постановка задачи о распространении поверхностной волны

Обратимся теперь к общей постановке задачи о распространении поверхностной волны в геометрии, представленной на рис.1.

Условия магнитостатики, имеющие вид:

$$rot \vec{H} = 0; \quad (15)$$

$$div \vec{B} = 0, \quad (16)$$

где:

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}, \quad (17)$$

позволяют ввести, подобно [20, 16-стр.51, форм.(2.123), 17-стр.31, форм.(2.29)], потенциал  $\psi$  для переменного поля такой, что:

$$\vec{h} = \text{grad}\psi = \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z} \right\}. \quad (18)$$

Подобно [14], запишем систему уравнений и граничных условий для потенциалов в трех областях, показанных на рис.1, а также на границах между ними.

Уравнения:

область 1 – вне феррита (уравнение Пуассона):

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2} = 0. \quad (19)$$

область 2 – внутри феррита (уравнение Уокера):

$$\mu_1 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0. \quad (20)$$

область 3 – вне феррита (уравнение Пуассона):

$$\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial z^2} = 0. \quad (21)$$

Граничные условия:

$$\mu_1 \frac{\partial\psi_2}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial\psi_2}{\partial y} \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = \frac{\partial\psi_1}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (22)$$

$$\mu_1 \frac{\partial\psi_2}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial\psi_2}{\partial y} \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \frac{\partial\psi_3}{\partial x} \Big|_{x=\frac{d}{2}}; \quad (23)$$

$$\psi_2 \Big|_{x=-\frac{d}{2}} = \psi_1 \Big|_{x=-\frac{d}{2}}; \quad (24)$$

$$\psi_2 \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \psi_3 \Big|_{x=\frac{d}{2}}. \quad (25)$$

В этих выражениях параметры  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ , а также  $\nu$ , представляющие собой компоненты тензора магнитной проницаемости (1), определяются полученными в разделе №2 формулами (3)-(7).

#### 4. Решение общей задачи методом разделения переменных

Согласно методу разделения переменных, потенциалы могут быть представлены в виде:

$$\psi_1 = X_1 Y Z; \quad (26)$$

$$\psi_2 = X_2 Y Z; \quad (27)$$

$$\psi_3 = X_3 Y Z, \quad (28)$$

где  $X_{1,2,3}$  зависят только от  $x$ ,  $Y$  – только от  $y$  и  $Z$  – только от  $z$ .

**Замечание.** Следует заметить, что применение метода разделения переменных к уравнениям типа Пуассона (19) и (21) является классическим приемом решения подобных уравнений, подробно разобранном, например, в учебной монографии [20]. Некоторые особенности имеет лишь уравнение Уокера (20), содержащее смешанную производную по  $x$  и  $y$ , затрудняющую разделение переменных по классике. Метод решения уравнения такого типа, использованный в работе [14], подробно описан в монографии [19] на стр.73-75. Учитывая определенную ограниченность использованного в работе [14] приема, в той же монографии [19] на стр.75-84 приведена подробная методология более универсального и полного решения подобных уравнений.

Полное решение задачи для потенциалов во всех трех областях имеет вид (формулы (218)-(223) в работе [14]):

часть решения, зависящая только от  $x$ :

$$X_1 = A e^{k_x^e x}; \quad (29)$$

$$X_2 = A_2 e^{k_x^{(+)} x} + B_2 e^{k_x^{(-)} x}; \quad (30)$$

$$X_3 = B e^{-k_x^e x}; \quad (31)$$

часть решения, зависящая только от  $y$  и  $z$ , одинаковая во всех областях:

$$Y = e^{-i k_y y}; \quad (32)$$

$$Z = e^{-i k_z z}, \quad (33)$$

причем выполняется соотношение:

$$(k_x^e)^2 = k_y^2 + k_z^2. \quad (34)$$

Произвольные коэффициенты  $A$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $B$  можно определить путем подстановки решения (26)-(28) с учетом (29)-(34) в граничные условия (22)-(25). Требование нетривиальности решения получаемой при этом системы уравнений и даст искомое дисперсионное соотношение.

### 5. Вывод дисперсионного соотношения из решения и граничных условий

Итак, для вычисления дисперсионного соотношения все подготовительные действия выполнены. Решение исходной задачи представлено в виде потенциалов (26)-(28), явный вид которых определяется формулами (29)-(33). Для получения дисперсионного соотношения это решение следует подставить в граничные условия (22)-(25).

Такая подстановка приводит к системе уравнений для коэффициентов  $A$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $B$ :

$$-Ak_x^e e^{-\delta} + A_2 \varepsilon^{(+)} e^{-\rho^{(-)}} + B_2 \varepsilon^{(-)} e^{-\rho^{(-)}} = 0; \quad (35)$$

$$A_2 \varepsilon^{(+)} e^{\rho^{(+)}} + B_2 \varepsilon^{(-)} e^{\rho^{(-)}} + Bk_x^e e^{-\delta} = 0; \quad (36)$$

$$-Ae^{-\delta} + A_2 e^{-\rho^{(+)}} + B_2 e^{-\rho^{(-)}} = 0; \quad (37)$$

$$A_2 e^{\rho^{(+)}} + B_2 e^{\rho^{(-)}} - B e^{-\delta} = 0, \quad (38)$$

где введены вспомогательные обозначения:

$$\rho^{(+)} = \frac{k_x^{(+)} d}{2}; \quad (39)$$

$$\rho^{(-)} = \frac{k_x^{(-)} d}{2}; \quad (40)$$

$$\delta = \frac{k_x^e d}{2}, \quad (41)$$

а также:

$$\varepsilon^{(+)} = \mu_I k_x^{(+)} - i\nu_I k_y; \quad (42)$$

$$\varepsilon^{(-)} = \mu_I k_x^{(-)} - i\nu_I k_y. \quad (43)$$

При этом величины  $k_x^{(+)}$  и  $k_x^{(-)}$  определяются по методике, описанной далее в разделах №6-№9.

Условием существования ненулевого решения системы (35)-(38) является равенство нулю ее определителя, имеющего вид:

$$D_0 = \begin{vmatrix} -k_x^e e^{-\delta} & \varepsilon^{(+)} e^{-\rho^{(+)}} & \varepsilon^{(-)} e^{-\rho^{(-)}} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{(+)} e^{\rho^{(+)}} & \varepsilon^{(-)} e^{\rho^{(-)}} & k_x^e e^{-\delta} \\ -e^{-\delta} & e^{-\rho^{(+)}} & e^{-\rho^{(-)}} & 0 \\ 0 & e^{\rho^{(+)}} & e^{\rho^{(-)}} & -e^{-\delta} \end{vmatrix}. \quad (44)$$

Раскрывая это определитель и приравнявая его к нулю, получаем:

дисперсионное соотношение в окончательном виде:

$$\frac{e^{(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} - e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}}{e^{(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})} + e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}} = \frac{k_x^e (\varepsilon^{(-)} - \varepsilon^{(+)})}{(k_x^e)^2 - \varepsilon^{(+)} \varepsilon^{(-)}}, \quad (45)$$

где входящие в это выражение величины  $\rho^{(\pm)}$  и  $\varepsilon^{(\pm)}$  определяются формулами (39)-(43).

Можно видеть, что это выражение по форме совпадает с полученным в работе [14] (формула (257)), однако отличие состоит в том, что там дисперсионное соотношение получено с учетом только размагничивания, тогда как здесь, кроме размагничивания учтено также неоднородное обменное взаимодействие, приводящее к существенно отличающимся от полученных в работе [14] составляющих этого соотношения.

## 6. Общая структура компонент поперечного волнового числа

Главной особенностью, отличающей полученное решение (29)-(33) от классического, приведенного в работах [20, 16-стр.50-76, 17-стр.29-36], является потенциал  $X_2$  внутри ферритовой пластины (30), представляющий собой

сумму экспонент с комплексными показателями  $k_x^{(+)}$  и  $k_x^{(-)}$ . Показатели этих экспонент получаются, как два возможных решения уравнения Уокера (20), содержащего упомянутую выше смешанную производную, а их комплексный характер обусловлен именно смешанным видом этой производной.

Компоненты поперечного волнового числа  $k_x^{(+)}$  и  $k_x^{(-)}$ , будучи комплексными и отличаясь лишь знаком, содержат одинаковые по абсолютной величине действительную и мнимую части, так что имеют вид (формулы (183)-(184), а также (235) и (240) в работе [15]):

$$k_x^{(+)} = k_d + i k_m; \quad (46)$$

$$k_x^{(-)} = -k_d - i k_m, \quad (47)$$

где  $k_d$  и  $k_m$  – действительные.

Получение действительной и мнимой компонент поперечного волнового числа  $k_d$  и  $k_m$  в случае отсутствия обменного взаимодействия и при его наличии, осуществляется принципиально различными методами. Этот вопрос подробно рассмотрен в первой части настоящей работы [15], поэтому здесь приведем лишь краткую сводку полученных там результатов.

### 7. Компоненты поперечного волнового числа в отсутствие обмена

Согласно работам [14,15], в отсутствие обмена разрешение уравнения Уокера приводит к биквадратному уравнению, которое может быть решено аналитически. Получающиеся решения для  $k_d$  и  $k_m$  имеют вид (формулы (185), (186) в работе [15]):

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left( \frac{\beta}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)} \right)^2}} \cdot k_y; \quad (48)$$

$$k_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left( \frac{\beta}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)} \right)^2}} \cdot k_y, \quad (49)$$



где параметр размагничивания  $\beta$  определяется формулой (14), а нормированные частоты  $\Omega$  и  $\Omega_H$  – формулами (11), (12).

### 8. Компоненты поперечного волнового числа при наличии обменного взаимодействия

Согласно работе [15], при наличии обмена разрешение уравнения Уокера приводит к комплексному уравнению восьмой степени, которое допускает представление в виде системы двух уравнений восьмой степени, имеющих действительный характер. Анализ предельных переходов к случаю отсутствия обмена и реализуемому в эксперименте классическому решению задачи Дэймона-Эшбаха позволяет выбрать из двух уравнений системы одно, допускающее два решения, одно из которых дает значение  $k_d$ , а другое – значение  $k_m$ , выраженные через постоянные параметры  $\Omega$ ,  $\Omega_H$ ,  $\beta$  с текущим параметром  $k_y$ . То есть появляется возможность выражения обеих, действительной и мнимой составляющих поперечного волнового числа  $k_x^{(+)}$  (или  $k_x^{(-)}$ ), что эквивалентно, согласно (46) и (47)).

Такое «разрешающее» уравнение, полученное в работе [15, форм. (230)], имеет вид:

$$g_8 c_{8b} + g_6 c_{6b} + g_4 c_{4b} + g_{2a} c_{2b} + g_{2b} c_{2a} = 0, \quad (50)$$

где коэффициенты  $g$ , определяемые параметрами материала и продольным волновым числом  $k_y$ , имеют вид (формулы (203)-(207) в работе [15]):

$$g_8 = -Q^2; \quad (51)$$

$$g_6 = -Q [2Qk_y^2 + (2\Omega_H + \beta + 1)]; \quad (52)$$

$$g_4 = -Q(2\Omega_H + \beta + 1)k_y^2 + [\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H + \beta + 1)]; \quad (53)$$

$$g_{2a} = Q [2Qk_y^2 + (2\Omega_H + \beta + 1)]k_y^4; \quad (54)$$

$$g_{2b} = -2\beta k_y^2, \quad (55)$$

а величины  $c$  представляют собой комбинации из компонент поперечного волнового числа  $k_d$  и  $k_m$  (формулы (216), (218), (220)-(222) в работе [15]):

$$c_{8b} = 8k_d k_m (k_d^6 - 7k_d^4 k_m^2 + 7k_d^2 k_m^4 - k_m^6); \quad (56)$$

$$c_{6b} = 2k_d k_m (3k_d^4 - 10k_d^2 k_m^2 + 3k_m^4); \quad (57)$$

$$c_{4b} = 4k_d k_m (k_d^2 - k_m^2); \quad (58)$$

$$c_{2a} = k_d^2 - k_m^2; \quad (59)$$

$$c_{2b} = 2k_d k_m. \quad (60)$$

Из структуры формул (56)-(60) можно видеть, что при замене  $k_d$  на  $k_m$  и  $k_m$  на  $k_d$  выражения  $c_{8b}$ ,  $c_{6b}$ ,  $c_{2b}$  вообще не меняются, а у выражений  $c_{4a}$  и  $c_{2a}$  меняется только знак. Такая симметричность позволяет ввести обобщенную переменную  $\xi$  (в работе [15] обозначенную как « $x$ »), роль которой будет выполнять  $k_m$  (то есть  $k_m \rightarrow \xi$ ).

Задание значения  $k_y$  и связанного с ним формулой (48) значения  $k_d$  позволяет свести уравнение (50), в общем случае содержащее две неизвестных  $k_d$  и  $k_m$ , к эквивалентному уравнению, содержащему только одну неизвестную  $\xi$  (так как  $k_d$  уже определено заданием  $k_y$  по формуле (48)). При этом коэффициенты  $c$  в формуле (50) определяются формулами (56)-(60) с заменой  $k_m$  на  $\xi$ , то есть принимают вид:

$$c_{8b} = 8k_d \xi (k_d^6 - 7k_d^4 \xi^2 + 7k_d^2 \xi^4 - \xi^6); \quad (61)$$

$$c_{6b} = 2k_d \xi (3k_d^4 - 10k_d^2 \xi^2 + 3\xi^4); \quad (62)$$

$$c_{4b} = 4k_d \xi (k_d^2 - \xi^2); \quad (63)$$

$$c_{2a} = k_d^2 - \xi^2; \quad (64)$$

$$c_{2b} = 2k_d \xi. \quad (65)$$

Таким образом, при заданном значении  $k_y$  следует искать нули функции:

$$u(\xi) = g_8 c_{8b} + g_6 c_{6b} + g_4 c_{4b} + g_{2a} c_{2b} + g_{2b} c_{2a}, \quad (66)$$

где параметры  $g$  по-прежнему определяются формулами (51)-(55), а параметры  $c$  определяются формулами (61)-(65), в которых  $k_d$  определяется через  $k_y$  по формуле (48).

Поиск нуля этой функции приводит к двум значениям неизвестной  $\xi$ , как раз соответствующим значениям компонент поперечного волнового числа  $k_d$  и  $k_m$ . Эти два значения представлены точками А и В прохождения через нуль кривой 1 на рис.8 в работе [15]. Можно полагать, что такое весьма удачное соответствие обусловлено именно отмеченной симметричностью выражений (56)-(60).

**Замечание.** Поиск нуля функции  $u$  (66) при заданном значении  $k_y$  производится путем пошагового увеличения переменной  $\xi$  от нуля до момента изменения знака этой функции (точка А на рис.8 в работе [15]). Такое изменение знака как раз определяет значение мнимой части поперечного волнового числа  $k_m$ . Если программа расчета построена таким образом, что после выдачи нуля она останавливается, то значение второго нуля, соответствующего  $k_d$ , не определяется. Для нахождения второго нуля, соответствующего значению  $k_d$  (точка В на рис.8 в работе [15]), следует или начинать пошаговое увеличение переменной  $\xi$  со значения, превышающего величину  $k_m$  (то есть правее точки А на рис.8 в работе [15]), или предусмотреть в программе дальнейшее увеличение  $\xi$  после прохождения и выдачи первого нуля.

Следует отметить, что использование формулы (48) для подстановки в уравнение (50) значения  $k_d$ , не ограничивает получаемого из решения уравнения значения  $k_d$  именно этой формулой, так как нуль получаемого уравнения, соответствующий искомому значению  $k_d$ , не совпадает со значением  $k_d$ , из-

начально налагаемым формулой (48), а дает заметно отличное значение. Совпадение имеет место только при отсутствии обмена, что лишний раз подтверждает выполнение предельного перехода к безобменному состоянию.

Проверка показывает, что упомянутые два значения переменной  $x$ , дающие значения  $k_d$  и  $k_m$ , получаются при любом заданном (в разумном интервале) значении продольного волнового числа  $k_y$ , так что вариация  $k_y$  позволяет найти зависимости  $k_d$  и  $k_m$  от  $k_y$  во всем требуемом интервале, налагаемом условиями задачи.

Таким образом, требуемые решением (30) значения  $k_x^{(+)}$  и  $k_x^{(-)}$  могут быть выражены в виде функций от  $k_y$  в соответствии с выражениями (46) и (47), где в отсутствие обмена значения  $k_d$  и  $k_m$  определяются по формулам (48) и (49), а при наличии обмена – из численного решения уравнения (50) методом поиска нуля по обобщенной переменной  $\xi$ , роль которой выполняет  $k_m$  в случае задания  $k_y$  и установления  $k_d$  через  $k_y$  по формуле (48).

## **9. Последовательность расчета компонент поперечного волнового числа при наличии обмена**

С целью удобства алгоритмизации при машинном расчете приведем последовательность шагов решения уравнения (50).

Шаг №1.

Задание начальных параметров  $Q$ ,  $\Omega_H$ ,  $d$ ,  $\Omega$ , а также  $\alpha_p$ .

Шаг №2.

Задание значения  $k_y$ .

Шаг №3.

Вычисление параметра  $\beta$  по формуле (14).

Шаг №4.

Вычисление значения  $k_d$  в соответствии с формулой (48).

Шаг №5.

Путем пошагового увеличения переменной  $x$  от нуля определение значения  $\xi$ , при котором знак функции  $u$  (формула (66)) изменяется. Это значение  $\xi$  соответствует искомой величине  $k_m$ .

Шаг №6.

Путем пошагового увеличения переменной  $\xi$  от значения, найденного на шаге №5, определение значения  $\xi$ , при котором знак функции  $u$  (формула (66)) изменяется. Это значение  $\xi$  соответствует искомой величине  $k_d$ .

Шаг №7.

Вывод полученных значений  $k_m$  и  $k_d$ .

Таким образом, при заданном значении  $k_y$  получается пара значений  $k_m$  и  $k_d$ . Эта пара значений соответствует частоте  $\Omega$  (при условии, что задана частота  $\Omega_H$ ). По полученной паре в соответствии с формулами (46), (47) находятся значения  $k_x^{(+)}$  и  $k_x^{(-)}$ , которые используются далее при вычислении дисперсионного соотношения.

## 10. Общая схема получения закона дисперсии

Нахождение закона дисперсии предполагает определение функциональной зависимости частоты  $\Omega$  от продольного волнового числа  $k_y$ . При этом такие параметры как  $Q$ ,  $\Omega_H$ ,  $d$  предполагаются заданными изначально, как определяемые материалом и геометрией пластины, а также приложенным постоянным полем. Параметр  $\alpha_p$  (при условии  $0 \leq \alpha_p \leq 0,1$ ) в известной степени остается свободным, то есть может быть использован, как подгоночный параметр при сравнении с экспериментом, однако при конкретном решении задачи его также следует считать заданным.

В разделах №7-№9 показано, что входящие в (45) действительная и мнимая компоненты поперечного волнового числа  $k_d$  и  $k_m$  однозначно определя-

ются исходными параметрами задачи в сочетании с заданной величиной продольного волнового числа  $k_y$ . То есть, при условии задания  $k_y$ , величины  $k_d$  и  $k_m$  также можно считать заданными.

Таким образом, выражение (45) представляет собой уравнение, содержащее две остающиеся не определенными заранее величины:  $\Omega$  и  $k_y$ . То есть задание  $k_y$  превращает его в уравнение относительно только одной неизвестной величины – частоты  $\Omega$ .

Решение такого уравнения относительно  $\Omega$  при варьировании величины  $k_y$  в пределах, требуемых условиями задачи, даст функциональную зависимость  $\Omega$  от  $k_y$ . Именно такая зависимость и будет представлять собой искомый закон дисперсии поверхностной волны типа Дэймона-Эшбаха с учетом размагничивания и обмена.

Итак, при нахождении закона дисперсии будем полагать изначально заданными исходные параметры задачи, такие как  $Q$ ,  $\Omega_H$ ,  $d$ , а также  $\alpha_p$ . При этом действительную и мнимую компоненты поперечного волнового числа  $k_d$  и  $k_m$  при условии задания величины  $k_y$  также будем считать известными. Таким образом, важнейшей задачей становится выражение дисперсионного соотношения (45) через эти компоненты  $k_d$  и  $k_m$ .

Из структуры соотношения (45) видно, что оно определяется через параметры (39)-(43), содержащие в свою очередь компоненты поперечного волнового числа  $k_x^{(+)}$  и  $k_x^{(-)}$ , а также компоненты тензора магнитной проницаемости  $\mu_I$  и  $\nu_I$ . Эти компоненты тензора за счет двойственности поперечного волнового числа, также имеют двойственный характер, то есть должны записываться в виде:  $\mu_I^{(\pm)}$  и  $\nu_I^{(\pm)}$ .

Относительно  $k_x^{(+)}$  и  $k_x^{(-)}$  можно видеть, что их выражение через  $k_d$  и  $k_m$  тривиально просто и дается формулами (47), (48). Однако выражение  $\mu_I^{(\pm)}$  и  $\nu_I^{(\pm)}$  через те же  $k_d$  и  $k_m$  является значительно более сложной задачей, которой и займемся в первую очередь.

### 11. Компоненты тензора проницаемости при $k_x \rightarrow k_x^{(+)}$

В качестве первого этапа получим  $\mu_I^{(+)}$  и  $\nu_I^{(+)}$  при  $k_x \rightarrow k_x^{(+)}$ , определенном выражением (46), причем для упрощения записи верхний индекс (+) опустим.

Найдем сначала некоторые промежуточные выражения:

$$k_x^2 = (k_d^2 - k_m^2) + i2k_d k_m. \quad (67)$$

При этом:

$$k_x^2 + k_y^2 = (k_d^2 - k_m^2 + k_y^2) + i2k_d k_m. \quad (68)$$

Введем обозначения:

$$k_p^2 = k_d^2 - k_m^2 + k_y^2; \quad (69)$$

$$k_r^2 = 2k_d k_m. \quad (70)$$

С этими обозначениями выражение (68) принимает вид:

$$k_x^2 + k_y^2 = k_p^2 + i k_r^2. \quad (71)$$

Найдем дробь, входящую в числитель выражения (3), подставляя (71) и выделяя действительную и мнимую части. Для удобства алгоритмизации дадим этой дроби вспомогательное обозначение  $a_\mu$ . То есть получаем:

$$a_\mu = \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2} = g_{\mu d} + i g_{\mu m}, \quad (72)$$

где введены обозначения:

$$g_{\mu d} = \frac{k_p^2 k_y^2}{k_p^4 + k_r^4}; \quad (73)$$

$$g_{\mu m} = -\frac{k_r^2 k_y^2}{k_p^4 + k_r^4}. \quad (74)$$

Аналогично найдем дробь, входящую в числитель выражения (5), которой дадим вспомогательное обозначение  $a_\nu$ :

$$a_\nu = \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2} = g_{\nu d} + i g_{\nu m}, \quad (75)$$

где введены обозначения:

$$g_{\nu d} = \frac{(k_d k_p^2 + k_m k_r^2) k_y}{k_p^4 + k_r^4}; \quad (76)$$

$$g_{\nu m} = \frac{(-k_d k_r^2 + k_m k_p^2) k_y}{k_p^4 + k_r^4}. \quad (77)$$

Таким образом, выражение дробей, входящих в числители  $\mu_I$  и  $\nu_I$ , через  $k_d$ ,  $k_m$  и  $k_y$ , выполнено, так что перейдем к выражению  $\Omega_{Ik}^2$  и  $\Omega_{0k}^2$  через те же параметры.

Согласно (8) и (9) имеем:

$$\Omega_{0k}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta). \quad (78)$$

$$\Omega_{Ik}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta + 1). \quad (79)$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$\Omega_{0k}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}^2 - \Omega_{Hk}\beta. \quad (80)$$

$$\Omega_{Ik}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}^2 - \Omega_{Hk}(\beta + 1); \quad (81)$$

Здесь, согласно (10):



$$\Omega_{Hk} = \Omega_H + Q(k_x^2 + k_y^2). \quad (82)$$

С помощью формулы (71), опять выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\Omega_{Hk} = \Omega_{Hkd} + i\Omega_{Hkm}, \quad (83)$$

где введены обозначения:

$$\Omega_{Hkd} = \Omega_H + Qk_p^2; \quad (84)$$

$$\Omega_{Hkm} = Qk_r^2. \quad (85)$$

Возводя (83) в квадрат, получаем:

$$\Omega_{Hk}^2 = (\Omega_{Hkd}^2 - \Omega_{Hkm}^2) + i2\Omega_{Hkd}\Omega_{Hkm}. \quad (86)$$

Подставляя (83) и (86) в (80), после чего выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\Omega_{0k}^2 = \Omega_{0kd}^2 + i\Omega_{0km}^2, \quad (87)$$

где введены обозначения:

$$\Omega_{0kd}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hkd}^2 + \Omega_{Hkm}^2 - \beta\Omega_{Hkd}; \quad (88)$$

$$\Omega_{0km}^2 = -\Omega_{Hkm}(2\Omega_{Hkd} + \beta). \quad (89)$$

Аналогично, подставляя (83) и (86) в (81), после чего выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\Omega_{1k}^2 = \Omega_{1kd}^2 + i\Omega_{1km}^2, \quad (90)$$

где введены обозначения:

$$\Omega_{1kd}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hkd}^2 + \Omega_{Hkm}^2 - (\beta + 1)\Omega_{Hkd}; \quad (91)$$

$$\Omega_{1km}^2 = -\Omega_{Hkm}(2\Omega_{Hkd} + \beta + 1). \quad (92)$$

В формулы (3) и (5) для  $\mu_1$  и  $\nu_1$  величина  $\Omega_{0k}^2$  входит в знаменателе. Найдем обратную ей величину, пользуясь (87) и выделяя действительную и мнимую части:

$$\frac{1}{\Omega_{0k}^2} = z_d + i z_m, \quad (93)$$

где введены обозначения:

$$z_d = \frac{\Omega_{0kd}^2}{\Omega_{0kd}^4 + \Omega_{0km}^4}; \quad (94)$$

$$z_m = -\frac{\Omega_{0km}^2}{\Omega_{0kd}^4 + \Omega_{0km}^4}. \quad (95)$$

Итак, все входящие в (3) и (5) величины при  $k_x \rightarrow k_x^{(+)}$  получены через  $k_d$ ,  $k_m$  и  $k_y$ , так что перейдем непосредственно к вычислению компонент тензора проницаемости  $\mu_l^{(+)}$  и  $\nu_l^{(+)}$ . Здесь и далее при  $\mu_l$  и  $\nu_l$  введён верхний индекс (+) чтобы подчеркнуть, что эти компоненты получены при значении поперечного волнового числа  $k_x^{(+)}$ ,

Подставляя (90), (93) и (72) в (3), после чего также выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\mu_l^{(+)} = \mu_{ld}^{(+)} + i \mu_{lm}^{(+)}, \quad (96)$$

где введены обозначения:

$$\mu_{ld}^{(+)} = (\Omega_{ld}^2 - \beta g_{\mu d}) z_d - (\Omega_{lm}^2 - \beta g_{\mu m}) z_m; \quad (97)$$

$$\mu_{lm}^{(+)} = (\Omega_{ld}^2 - \beta g_{\mu d}) z_m + (\Omega_{lm}^2 - \beta g_{\mu m}) z_d, \quad (98)$$

а входящие в эти формулы величины  $g_{\mu d}$  и  $g_{\mu m}$  определяются формулами (73) и (74).

Аналогично, подставляя (93) и (75) в (5), получаем:

$$\nu_l^{(+)} = \nu_{ld}^{(+)} + i \nu_{lm}^{(+)}, \quad (99)$$

где введены обозначения:

$$\nu_{ld}^{(+)} = \Omega z_m + \beta (g_{\nu d} z_d - g_{\nu m} z_m); \quad (100)$$

$$v_{Im}^{(+)} = -\Omega z_d + \beta(g_{vm} z_d + g_{vd} z_m), \quad (101)$$

а входящие в эти формулы величины  $g_{vd}$  и  $g_{vm}$  определяются формулами (76) и (77).

Таким образом, компоненты тензора проницаемости  $\mu_I^{(+)}$  и  $v_I^{(+)}$  определены через  $k_d$ ,  $k_m$  и  $k_y$ , что и требуется для вычисления искомого дисперсионного соотношения.

## 12. Последовательность расчета компонент тензора проницаемости при $k_x \rightarrow k_x^{(+)}$

С целью удобства алгоритмизации при машинном расчете приведем последовательность шагов вычисления компонент тензора проницаемости  $\mu_I^{(+)}$  и  $v_I^{(+)}$ .

Шаг №1.

Задание начальных параметров  $Q$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega_H$ ,  $d$ , а также  $\alpha_p$ .

Шаг №2.

Задание значения  $k_y$ .

Шаг №3.

Вычисление параметра  $\beta$  по формуле (14).

Шаг №4.

Вычисление параметров  $k_d$  и  $k_m$  в соответствии с методиками, приведенными в разделах №7-№9.

Шаг №5.

Вычисление параметров  $k_p^2$  и  $k_r^2$  по формулам (69) и (70).

Шаг №6.

Вычисление параметров  $g_{\mu d}$  и  $g_{\mu m}$  по формулам (73), (74).

Шаг №7.

Вычисление параметров  $g_{vd}$  и  $g_{vm}$  по формулам (76), (77).

Шаг №8.

Вычисление параметров  $\Omega_{Hkd}$  и  $\Omega_{Hkm}$  по формулам (84) и (85).

Шаг №9.

Вычисление параметров  $\Omega_{0kd}^2$  и  $\Omega_{0km}^2$  по формулам (88), (89).

Шаг №10.

Вычисление параметров  $\Omega_{1kd}^2$  и  $\Omega_{1km}^2$  по формулам (91), (92).

Шаг №11.

Вычисление параметров  $z_d$  и  $z_m$  по формулам (94),(95).

Шаг №12.

Вычисление параметров  $\mu_{ld}^{(+)}$ ,  $\mu_{lm}^{(+)}$  по формулам (97),(98).

Шаг №13.

Вычисление параметров  $\nu_{ld}^{(+)}$ ,  $\nu_{lm}^{(+)}$  по формулам (100),(101).

### 13. Компоненты тензора проницаемости при $k_x \rightarrow k_x^{(-)}$

В качестве следующего этапа получим  $\mu_l^{(-)}$  и  $\nu_l^{(-)}$  при  $k_x \rightarrow k_x^{(-)}$ , определяемом выражением (47). Для этого повторим все выкладки раздела №12, учитывая изменение знака  $k_x$  при замене  $k_x^{(+)}$  на  $k_x^{(-)}$ . Индекс (-) также опустим.

Найдем сначала некоторые промежуточные выражения:

$$k_x^2 = (k_d^2 - k_m^2) + i2k_d k_m. \quad (102)$$

При этом:

$$k_x^2 + k_y^2 = (k_d^2 - k_m^2 + k_y^2) + i2k_d k_m. \quad (103)$$

Введем обозначения:

$$k_p^2 = k_d^2 - k_m^2 + k_y^2; \quad (104)$$

$$k_r^2 = 2k_d k_m. \quad (105)$$

С этими обозначениями выражение (103) принимает вид:

$$k_x^2 + k_y^2 = k_p^2 + i k_r^2. \quad (106)$$

Найдем дробь, входящую в числитель выражения (3), подставляя (106) и выделяя действительную и мнимую части. Для удобства алгоритмизации дадим этой дроби вспомогательное обозначение  $a_\mu$ . То есть получаем:

$$a_\mu = \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2} = g_{\mu d} + i g_{\mu m}, \quad (107)$$

где введены обозначения:

$$g_{\mu d} = \frac{k_p^2 k_y^2}{k_p^4 + k_r^4}; \quad (108)$$

$$g_{\mu m} = -\frac{k_r^2 k_y^2}{k_p^4 + k_r^4}. \quad (109)$$

Аналогично найдем дробь, входящую в числитель выражения (5), которой дадим вспомогательное обозначение  $a_\nu$ :

$$a_\nu = \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2} = g_{\nu d} + i g_{\nu m}, \quad (110)$$

где введены обозначения:

$$g_{\nu d} = -\frac{(k_d k_p^2 + k_m k_r^2) k_y}{k_p^4 + k_r^4}; \quad (111)$$

$$g_{\nu m} = -\frac{(-k_d k_r^2 + k_m k_p^2) k_y}{k_p^4 + k_r^4}. \quad (112)$$

Таким образом, выражение дробей, входящих в числители  $\mu_I$  и  $\nu_I$ , через  $k_d$ ,  $k_m$  и  $k_y$ , выполнено, так что перейдем к выражению  $\Omega_{Ik}^2$  и  $\Omega_{Ok}^2$  через те же параметры.

Согласно (8) и (9) имеем:

$$\Omega_{Ok}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta). \quad (113)$$

$$\Omega_{Ik}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}(\Omega_{Hk} + \beta + 1). \quad (114)$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$\Omega_{Ok}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}^2 - \Omega_{Hk}\beta. \quad (115)$$

$$\Omega_{Ik}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hk}^2 - \Omega_{Hk}(\beta + 1); \quad (116)$$

Здесь, согласно (10):

$$\Omega_{Hk} = \Omega_H + Q(k_x^2 + k_y^2). \quad (117)$$

С помощью формулы (106), опять выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\Omega_{Hk} = \Omega_{Hkd} + i\Omega_{Hkm}, \quad (118)$$

где введены обозначения:

$$\Omega_{Hkd} = \Omega_H + Qk_p^2; \quad (119)$$

$$\Omega_{Hkm} = Qk_r^2. \quad (120)$$

Возводя (118) в квадрат, получаем:

$$\Omega_{Hk}^2 = (\Omega_{Hkd}^2 - \Omega_{Hkm}^2) + i2\Omega_{Hkd}\Omega_{Hkm}. \quad (121)$$

Подставляя (118) и (121) в (115), после чего выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\Omega_{Ok}^2 = \Omega_{Okd}^2 + i\Omega_{Okm}^2, \quad (122)$$

где введены обозначения:

$$\Omega_{Okd}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hkd}^2 + \Omega_{Hkm}^2 - \beta\Omega_{Hkd}; \quad (123)$$

$$\Omega_{0km}^2 = -\Omega_{Hkm}(2\Omega_{Hkd} + \beta). \quad (124)$$

Аналогично, подставляя (118) и (121) в (116), после чего выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\Omega_{Ik}^2 = \Omega_{Ikd}^2 + i\Omega_{Ikm}^2, \quad (125)$$

где введены обозначения:

$$\Omega_{Ikd}^2 = \Omega^2 - \Omega_{Hkd}^2 + \Omega_{Hkm}^2 - (\beta + 1)\Omega_{Hkd}; \quad (126)$$

$$\Omega_{Ikm}^2 = -\Omega_{Hkm}(2\Omega_{Hkd} + \beta + 1). \quad (127)$$

В формулы (3) и (5) для  $\mu_I$  и  $\nu_I$  величина  $\Omega_{0k}^2$  входит в знаменателе. Найдем обратную ей величину, пользуясь (122) и выделяя действительную и мнимую части:

$$\frac{1}{\Omega_{0k}^2} = z_d + iz_m, \quad (128)$$

где введены обозначения:

$$z_d = \frac{\Omega_{0kd}^2}{\Omega_{0kd}^4 + \Omega_{0km}^4}; \quad (129)$$

$$z_m = -\frac{\Omega_{0km}^2}{\Omega_{0kd}^4 + \Omega_{0km}^4}. \quad (130)$$

Итак, все входящие в (3) и (5) величины при  $k_x \rightarrow k_x^{(-)}$  получены через  $k_d$ ,  $k_m$  и  $k_y$ , так что перейдем непосредственно к вычислению компонент тензора проницаемости  $\mu_I^{(-)}$  и  $\nu_I^{(-)}$ . Здесь и далее при  $\mu_I$  и  $\nu_I$  введён верхний индекс  $(-)$  чтобы подчеркнуть, что эти компоненты получены при значении поперечного волнового числа  $k_x^{(-)}$ ,

Подставляя (125), (128) и (107) в (3), после чего также выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\mu_I^{(-)} = \mu_{Id}^{(-)} + i \mu_{Im}^{(-)}, \quad (131)$$

где введены обозначения:

$$\mu_{Id}^{(-)} = (\Omega_{1kd}^2 - \beta g_{\mu d}) z_d - (\Omega_{1km}^2 - \beta g_{\mu m}) z_m; \quad (132)$$

$$\mu_{Im}^{(-)} = (\Omega_{1kd}^2 - \beta g_{\mu d}) z_m + (\Omega_{1km}^2 - \beta g_{\mu m}) z_d, \quad (133)$$

а входящие в эти формулы величины  $g_{\mu d}$  и  $g_{\mu m}$  определяются формулами (108) и (109).

Аналогично, подставляя (128) и (110) в (5), получаем:

$$v_I^{(-)} = v_{Id}^{(-)} + i v_{Im}^{(-)}, \quad (134)$$

где введены обозначения:

$$v_{Id}^{(-)} = \Omega z_m + \beta (g_{\nu d} z_d - g_{\nu m} z_m); \quad (135)$$

$$v_{Im}^{(-)} = -\Omega z_d + \beta (g_{\nu m} z_d + g_{\nu d} z_m), \quad (136)$$

а входящие в эти формулы величины  $g_{\nu d}$  и  $g_{\nu m}$  определяются формулами (111) и (112).

Таким образом, компоненты тензора проницаемости  $\mu_I^{(-)}$  и  $v_I^{(-)}$  определены через  $k_d$ ,  $k_m$  и  $k_y$ , что и требуется для вычисления искомого дисперсионного соотношения.

#### 14. Последовательность расчета компонент тензора проницаемости при

$$k_x \rightarrow k_x^{(-)}$$

С целью удобства алгоритмизации при машинном расчете приведем последовательность шагов вычисления компонент тензора проницаемости  $\mu_I^{(-)}$  и  $v_I^{(-)}$ .

Шаг №1.

Задание начальных параметров  $Q$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega_H$ ,  $d$ , а также  $\alpha_p$ .



Шаг №2.

Задание значения  $k_y$ .

Шаг №3.

Вычисление параметра  $\beta$  по формуле (14).

Шаг №4.

Вычисление параметров  $k_d$  и  $k_m$  в соответствии с методиками, приведенными в разделах №7-№9.

Шаг №5.

Вычисление параметров  $k_p^2$  и  $k_r^2$  по формулам (104) и (105).

Шаг №6.

Вычисление параметров  $g_{\mu d}$  и  $g_{\mu m}$  по формулам (108), (109).

Шаг №7.

Вычисление параметров  $g_{\nu d}$  и  $g_{\nu m}$  по формулам (111), (112).

Шаг №8.

Вычисление параметров  $\Omega_{Hkd}$  и  $\Omega_{Hkm}$  по формулам (119) и (120).

Шаг №9.

Вычисление параметров  $\Omega_{0kd}^2$  и  $\Omega_{0km}^2$  по формулам (123), (124).

Шаг №10.

Вычисление параметров  $\Omega_{1kd}^2$  и  $\Omega_{1km}^2$  по формулам (126), (127).

Шаг №11.

Вычисление параметров  $z_d$  и  $z_m$  по формулам (129),(130).

Шаг №12.

Вычисление параметров  $\mu_{ld}^{(-)}$ ,  $\mu_{lm}^{(-)}$  по формулам (132),(133).

Шаг №13.

Вычисление параметров  $\nu_{ld}^{(-)}$ ,  $\nu_{lm}^{(-)}$  по формулам (135),(136).

## 15. Промежуточные параметры $\varepsilon^{(+)}$ и $\varepsilon^{(-)}$

Дисперсионное соотношение (45) содержит промежуточные параметры  $\varepsilon^{(+)}$  и  $\varepsilon^{(-)}$ , в которые в качестве составляющих частей входят компоненты тензора проницаемости  $\mu_I^{(\pm)}$  и  $\nu_I^{(\pm)}$ . Обратимся теперь к нахождению этих параметров.

Сначала обратимся к вычислению выражения  $\varepsilon^{(+)}$ , согласно (42), имеющему вид:

$$\varepsilon^{(+)} = \mu_I^{(+)} k_x^{(+)} - i \nu_I^{(+)} k_y. \quad (137)$$

Для этого (96), (99), а также (46) следует подставить в (137). Выполняя подстановку и выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\varepsilon^{(+)} = \varepsilon_d^{(+)} + i \varepsilon_m^{(+)}, \quad (138)$$

где введены обозначения:

$$\varepsilon_d^{(+)} = \mu_{Id}^{(+)} k_d - \mu_{Im}^{(+)} k_m + \nu_{Im}^{(+)} k_y; \quad (139)$$

$$\varepsilon_m^{(+)} = \mu_{Id}^{(+)} k_m + \mu_{Im}^{(+)} k_d - \nu_{Id}^{(+)} k_y. \quad (140)$$

Здесь введён верхний индекс «(+))» чтобы подчеркнуть, что величина  $\varepsilon^{(+)}$  получена при значении поперечного волнового числа  $k_x^{(+)}$ , определяемом формулой (46).

Теперь обратимся к вычислению выражения  $\varepsilon^{(-)}$ , согласно (43), имеющему вид:

$$\varepsilon^{(-)} = \mu_I^{(-)} k_x^{(-)} - i \nu_I^{(-)} k_y. \quad (141)$$

Для этого (131), (134), а также (47) следует подставить в (141). Выполняя подстановку и выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\varepsilon^{(-)} = \varepsilon_d^{(-)} + i \varepsilon_m^{(-)}, \quad (142)$$

где введены обозначения:

$$\varepsilon_d^{(-)} = -\mu_{1d}^{(-)}k_d + \mu_{1m}^{(-)}k_m + \nu_{1m}^{(-)}k_y; \quad (143)$$

$$\varepsilon_m^{(-)} = -\mu_{1d}^{(-)}k_m - \mu_{1m}^{(-)}k_d - \nu_{1d}^{(-)}k_y. \quad (144)$$

Здесь веден верхний индекс  $(-)$  чтобы подчеркнуть, что величина  $\varepsilon^{(-)}$  получена при значении поперечного волнового числа  $k_x^{(-)}$ , определяемом формулой (47).

Поскольку компоненты тензора проницаемости  $\mu_I^{(+)}$  и  $\nu_I^{(+)}$ , согласно данным разделов №11-№14, определены через компоненты волновых чисел  $k_d$ ,  $k_m$  и  $k_y$ , то и здесь параметры  $\varepsilon^{(+)}$  и  $\varepsilon^{(-)}$ , а также соответственно их действительные и мнимые части, определены через те же компоненты волновых чисел  $k_d$ ,  $k_m$  и  $k_y$ ,

## 16. Последовательность расчета промежуточных параметров $\varepsilon^{(+)}$ и $\varepsilon^{(-)}$

С целью удобства алгоритмизации при машинном расчете приведем последовательность шагов вычисления промежуточных параметров  $\varepsilon^{(+)}$  и  $\varepsilon^{(-)}$ .

Шаг №1.

Задание начальных параметров  $Q$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega_H$ ,  $d$ , а также  $\alpha_p$ .

Шаг №2.

Задание значения  $k_y$ .

Шаг №3.

Вычисление параметра  $\beta$  по формуле (14).

Шаг №4.

Вычисление параметров  $k_d$  и  $k_m$  в соответствии с методиками, приведенными в разделах №7-№9.

Шаг №5.

Вычисление параметров  $\mu_{1d}^{(+)}$ ,  $\mu_{1m}^{(+)}$ ,  $\nu_{1d}^{(+)}$ ,  $\nu_{1m}^{(+)}$  по методике, приведенной в разделах №11, №12.

Шаг №6

Вычисление параметров  $\varepsilon_d^{(+)}$ ,  $\varepsilon_m^{(+)}$  по формулам (139), (140).

Шаг №7.

Вычисление параметров  $\mu_{ld}^{(-)}$ ,  $\mu_{lm}^{(-)}$ ,  $\nu_{ld}^{(-)}$ ,  $\nu_{lm}^{(-)}$  по методике, приведенной в разделах №13, №14.

Шаг №8

Вычисление параметров  $\varepsilon_d^{(-)}$ ,  $\varepsilon_m^{(-)}$  по формулам (143), (144).

**17. Схема структуры дисперсионного соотношения**

Полученное в разделе №5 дисперсионное соотношение (45), имеет общий вид:

$$\frac{e^{\rho^{(+)} - \rho^{(-)}} - e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}}{e^{\rho^{(+)} - \rho^{(-)}} + e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}} = \frac{k_x^e (\varepsilon^{(-)} - \varepsilon^{(+)})}{(k_x^e)^2 - \varepsilon^{(+)} \varepsilon^{(-)}}. \quad (145)$$

Можно видеть, что в него входят требующие определения параметры  $\rho^{(\pm)}$ ,  $k_x^e$  и  $\varepsilon^{(\pm)}$ .

При принятом в разделе №2 условии  $k_z = 0$  (формула (2)) внешнее волновое число  $k_x^e$  равно  $k_y$  [16-стр.60, форм.(2.221)]. Величины  $\rho^{(\pm)}$  определяются формулами (39), (40) через волновые числа  $k_x^{(\pm)}$ , которые, в соответствии с формулами (46), (47), определяются через компоненты поперечного волнового числа  $k_d$  и  $k_m$ , являющиеся действительными. Параметры  $\varepsilon^{(\pm)}$ , в соответствии с данными разделов №15, №16, а также разделов №11-№14 определяются теми же компонентами  $k_d$  и  $k_m$ . Параметр размагничивания  $\beta$  определяется величиной  $k_y$  в соответствии с формулой (14), содержащей свободный параметр  $\alpha_p$ , который является постоянным. Действительная и мнимая компоненты поперечного волнового числа  $k_d$  и  $k_m$  в соответствии с разделами №7-№9,

при заданных параметрах материала, геометрии и поля также выражаются через  $k_y$ .

Таким образом, все входящие в соотношение (145) (или (45)) величины теперь определены двумя видами параметров: постоянными, задаваемыми материалом пластины, внешним полем и геометрией задачи, каковыми являются  $Q$ ,  $\Omega_H$ ,  $d$ , а также переменными, такими как частота  $\Omega$  и продольное волновое число  $k_y$ . То есть дисперсионное соотношение теперь обеспечивает связь между двумя переменными параметрами: частотой  $\Omega$  и продольным волновым числом  $k_y$ , что и дает искомый закон дисперсии, к выводу которого и обратимся далее.

Ввиду высокой сложности полученного соотношения (145), выполним рассмотрение его левой и правой частей по отдельности.

### 18. Левая часть дисперсионного соотношения

Рассмотрим сначала левую часть дисперсионного соотношения (145):

$$U = \frac{e^{\rho^{(+)} - \rho^{(-)}} - e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}}{e^{\rho^{(+)} - \rho^{(-)}} + e^{-(\rho^{(+)} - \rho^{(-)})}}. \quad (146)$$

Здесь параметры  $\rho^{(+)}$  и  $\rho^{(-)}$  определяются формулами (39) и (40)

$$\rho^{(+)} = \frac{k_x^{(+)} d}{2}; \quad (147)$$

$$\rho^{(-)} = \frac{k_x^{(-)} d}{2}, \quad (148)$$

где входящие в них величины  $k_x^{(+)}$  и  $k_x^{(-)}$  определяются в соответствии с формулами (46) и (47):

$$k_x^{(+)} = k_d + i k_m; \quad (149)$$

$$k_x^{(-)} = -k_d - i k_m, \quad (150)$$

где  $k_d$  и  $k_m$  – действительные.

Пользуясь (147) и (148) с учетом (149) и (150), находим показатели экспонент в выражении (146):

$$\left(\rho^{(+)} - \rho^{(-)}\right) = (k_d + i k_m) d; \quad (151)$$

$$-\left(\rho^{(+)} - \rho^{(-)}\right) = -(k_d + i k_m) d, \quad (152)$$

так что экспоненты принимают вид:

$$e^{\left(\rho^{(+)} - \rho^{(-)}\right)} = e^{d k_d} \cos(d k_m) + i e^{d k_d} \sin(d k_m); \quad (153)$$

$$e^{-\left(\rho^{(+)} - \rho^{(-)}\right)} = e^{-d k_d} \cos(d k_m) - i e^{-d k_d} \sin(d k_m). \quad (154)$$

Числитель дроби выражения (146) принимает вид:

$$\begin{aligned} e^{\left(\rho^{(+)} - \rho^{(-)}\right)} - e^{-\left(\rho^{(+)} - \rho^{(-)}\right)} &= \\ &= \left(e^{d k_d} - e^{-d k_d}\right) \cos(d k_m) + i \left(e^{d k_d} + e^{-d k_d}\right) \sin(d k_m). \end{aligned} \quad (155)$$

Знаменатель той же дроби принимает вид:

$$\begin{aligned} e^{\left(\rho^{(+)} - \rho^{(-)}\right)} + e^{-\left(\rho^{(+)} - \rho^{(-)}\right)} &= \\ &= \left(e^{d k_d} + e^{-d k_d}\right) \cos(d k_m) + i \left(e^{d k_d} - e^{-d k_d}\right) \sin(d k_m). \end{aligned} \quad (156)$$

Введем обозначения:

$$A = e^{d k_d} - e^{-d k_d}; \quad (157)$$

$$B = e^{d k_d} + e^{-d k_d}. \quad (158)$$

С этими обозначениями (155) и (156) записываем в виде:

$$e^{\left(\rho^{(+)} - \rho^{(-)}\right)} - e^{-\left(\rho^{(+)} - \rho^{(-)}\right)} = A \cos(d k_m) + i B \sin(d k_m); \quad (159)$$

$$e^{\left(\rho^{(+)} - \rho^{(-)}\right)} + e^{-\left(\rho^{(+)} - \rho^{(-)}\right)} = B \cos(d k_m) + i A \sin(d k_m). \quad (160)$$

Подставляя (159) и (160) в (146), освобождаясь от мнимости в знаменателе и приводя подобные члены, получаем левую часть дисперсионного соотношения в виде:

$$U = \frac{A B}{A^2 \sin^2(d k_m) + B^2 \cos^2(d k_m)} -$$

$$- i \frac{(A^2 - B^2) \sin(d k_m) \cos(d k_m)}{A^2 \sin^2(d k_m) + B^2 \cos^2(d k_m)}, \quad (161)$$

где обе дроби являются действительными,  $A$  и  $B$  определяются формулами (157), (158), а  $k_d$  и  $k_m$  определяются в соответствии с методиками, описанными в разделах №7-№9.

Таким образом, левая часть дисперсионного соотношения (146), то есть параметр  $U$ , в выражении через  $k_d$  и  $k_m$  получен в комплексном виде (161) с выделенными отдельно действительной и мнимой частями.

### 19. Последовательность расчета левой части

С целью удобства алгоритмизации при машинном расчете приведем последовательность шагов вычисления выражения (161).

Шаг №1.

Задание начальных параметров  $Q$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega_H$ ,  $d$ .

Шаг №2.

Задание значения  $k_y$ .

Шаг №3.

Вычисление параметров  $k_d$  и  $k_m$  в соответствии с методиками, приведенными в разделах №7-№9.

Шаг №4.

Вычисление параметров  $A$  и  $B$  по формулам (157) и (158).

Шаг №5.

Вычисление параметра  $U$ , представление его в комплексном виде по формуле (161) с выделенными явно действительной и мнимой частями.

**Замечание.** Здесь на шаге №1 предусмотрено задание частоты  $\Omega$ , которая, как отмечено в разделе №10, в конечном счете, должна быть определена из решения полного дисперсионного уравнения (145) (или (45)). Однако следует учитывать, что решение уравнения (145) будет выполняться методом поиска нуля при задании величины  $k_y$  и пошаговом варьировании частоты  $\Omega$ . Алго-

ритм такого поиска предполагает на каждом шаге задание частоты  $\Omega$ , выполнение шагов №3-№6 приведенного выше алгоритма, после чего определение знака выражения (145). То есть именно момент изменения такого знака и будет определять искомое значение частоты  $\Omega$ .

## 20. Правая часть дисперсионного соотношения

Рассмотрим теперь правую часть дисперсионного соотношения (145), имеющую вид:

$$V = \frac{k_x^e (\varepsilon^{(-)} - \varepsilon^{(+)})}{(k_x^e)^2 - \varepsilon^{(+)} \varepsilon^{(-)}}, \quad (162)$$

где, в соответствии с (138) и (142):

$$\varepsilon^{(+)} = \varepsilon_d^{(+)} + i \varepsilon_m^{(+)}; \quad (163)$$

$$\varepsilon^{(-)} = \varepsilon_d^{(-)} + i \varepsilon_m^{(-)}, \quad (164)$$

а  $\varepsilon_d^{(+)}$ ,  $\varepsilon_m^{(+)}$ ,  $\varepsilon_d^{(-)}$ ,  $\varepsilon_m^{(-)}$  определяются формулами (139), (140), (143), (144) соответственно.

При этом из условия предельного перехода к классической задаче Дэймона-Эшбаха [16-стр.60, форм.(2.221)], соответствующего  $\beta \rightarrow 0$ , при принятом условии  $k_z = 0$  (формула (2)), выполняется соотношение:

$$k_x^e = k_y, \quad (165)$$

Подставляя (163), (164) и (165) в (162), выполняя в числителе сложение и в знаменателе умножение, получаем:

$$V = \frac{k_y \left[ (\varepsilon_d^{(-)} - \varepsilon_d^{(+)}) + i (\varepsilon_m^{(-)} - \varepsilon_m^{(+)}) \right]}{k_y^2 - (\varepsilon_d^{(+)} \varepsilon_d^{(-)} - \varepsilon_m^{(+)} \varepsilon_m^{(-)}) - i (\varepsilon_d^{(+)} \varepsilon_m^{(-)} + \varepsilon_d^{(-)} \varepsilon_m^{(+)})}. \quad (166)$$

Введем обозначения:

$$u_d = k_y (\varepsilon_d^{(-)} - \varepsilon_d^{(+)}) ; \quad (167)$$

$$u_m = k_y (\varepsilon_m^{(-)} - \varepsilon_m^{(+)}) ; \quad (168)$$



$$v_d = k_y^2 - \left( \varepsilon_d^{(+)} \varepsilon_d^{(-)} - \varepsilon_m^{(+)} \varepsilon_m^{(-)} \right); \quad (169)$$

$$v_m = - \left( \varepsilon_d^{(+)} \varepsilon_m^{(-)} + \varepsilon_d^{(-)} \varepsilon_m^{(+)} \right). \quad (170)$$

Подставляя (167)-(170) в (166) и разделяя действительную и мнимую части, получаем правую часть дисперсионного соотношения в виде:

$$V = \frac{u_d v_d + u_m v_m}{v_d^2 + v_m^2} + i \frac{-u_d v_m + u_m v_d}{v_d^2 + v_m^2}, \quad (171)$$

где обе дроби являются действительными, а входящие в них параметры  $u_{d,m}$  и  $v_{d,m}$  определяются формулами (167)-(170).

Таким образом, правая часть дисперсионного соотношения (145), то есть параметр  $V$ , в выражении через  $k_d$  и  $k_m$  получен в комплексном виде (171) с выделенными отдельно действительной и мнимой частями.

## 21. Последовательность расчета правой части

С целью удобства алгоритмизации при машинном расчете приведем последовательность шагов вычисления выражения (171).

Шаг №1.

Задание начальных параметров  $Q$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega_H$ ,  $d$ , а также  $\alpha_p$ .

Шаг №2.

Задание значения  $k_y$ .

Шаг №3.

Вычисление параметров  $k_d$  и  $k_m$  в соответствии с методиками, приведенными в разделах №7-№9.

Шаг №4.

Вычисление параметра  $k_x^e$  по формуле (165).

Шаг №5.

Вычисление параметров  $\varepsilon^{(+)}$  и  $\varepsilon^{(-)}$  в соответствии с методикой, приведенной в разделе №15.

Шаг №6.

Вычисление параметров  $u_d, u_m, v_d, v_m$  по формулам (167)-(170).

Шаг №7.

Вычисление параметра  $V$ , представление его в комплексном виде по формуле (171) с выделенными явно действительной и мнимой частями.

## 22. Действительная и мнимая части дисперсионного соотношения

В предыдущих разделах получены левая и правая части дисперсионного соотношения (145) (или (45)), обе из которых имеют комплексный характер.

Из полученных формул (161) и (171) можно видеть, что их структура с точностью до обозначений совпадает со структурой подобных формул (269) и (318) в работе [14]. Это сделано намеренно для обеспечения единства структуры приведенных здесь выкладок с выкладками в работе [14], однако не следует забывать, что фактическое наполнение формул (161) и (171) отличается от наполнения формул (269) и (318) работы [14] введением в рассмотрение неоднородного обменного взаимодействия.

Таким образом, учитывая внешнее сходство формул (161) и (171) с подобными формулами работы [14], выкладки, требуемые для получения дисперсионного соотношения в целом, также получаются весьма похожими. Приведем их в несколько сжатом конспективном виде.

В соответствии с формулой (161), действительная и мнимая части выражения  $U$  имеют вид:

$$Re(U) = \frac{AB}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)}; \quad (172)$$

$$Im(U) = \frac{(A^2 - B^2) \sin(dk_m) \cos(dk_m)}{A^2 \sin^2(dk_m) + B^2 \cos^2(dk_m)}. \quad (173)$$

В соответствии с формулой (171), действительная и мнимая части выражения  $V$  имеют вид:

$$Re(V) = \frac{u_d v_d + u_m v_m}{v_d^2 + v_m^2}; \quad (174)$$

$$Im(V) = \frac{-u_d v_m + u_m v_d}{v_d^2 + v_m^2}. \quad (175)$$

После перенесения обеих частей выражения (145) на левую сторону, действительная часть дисперсионного соотношения приобретает вид:

$$W_d = Re(U) - Re(V), \quad (176)$$

или:

$$W_d = \frac{AB}{A^2 \sin^2(d k_m) + B^2 \cos^2(d k_m)} - \frac{u_d v_d + u_m v_m}{v_d^2 + v_m^2}; \quad (177)$$

Соответственно мнимая часть дисперсионного соотношения принимает вид:

$$W_m = Im(U) - Im(V), \quad (178)$$

или:

$$W_m = \frac{(A^2 - B^2) \sin(d k_m) \cos(d k_m)}{A^2 \sin^2(d k_m) + B^2 \cos^2(d k_m)} - \frac{-u_d v_m + u_m v_d}{v_d^2 + v_m^2}. \quad (179)$$

Полное дисперсионное соотношение имеет вид:

$$W_d + iW_m = 0. \quad (180)$$

Равенство нулю такого комплексного выражения означает, что его действительная и мнимая части по отдельности тоже равны нулю, то есть:

$$W_d = 0; \quad (181)$$

$$W_m = 0, \quad (182)$$

или в развернутом виде:

$$\frac{AB}{A^2 \sin^2(d k_m) + B^2 \cos^2(d k_m)} - \frac{u_d v_d + u_m v_m}{v_d^2 + v_m^2} = 0; \quad (183)$$

$$\frac{(A^2 - B^2) \sin(d k_m) \cos(d k_m)}{A^2 \sin^2(d k_m) + B^2 \cos^2(d k_m)} - \frac{-u_d v_m + u_m v_d}{v_d^2 + v_m^2} = 0. \quad (184)$$

Эти выражения дают два уравнения, каждое из которых по отдельности позволяет найти зависимость частоты  $\Omega$  от волнового числа  $k_y$ .

**Замечание.** Контрольная проверка, выполненная численным методом, показывает, что выражение (183) при  $\beta \rightarrow 0$  переходит в классический закон дисперсии, соответствующий поверхностной волне Дэймона-Эшбаха [16-стр.65, форм.(2.279)]. Естественно полагать, что при  $\beta \rightarrow 0$  выражение (184) должно обращаться в нуль. Однако обращение в нуль этого выражения имеет место только при значениях волнового числа, меньших необходимого для учета размагничивания (меньших соответствующего перегибу гиперболического тангенса в выражении (14) для  $\beta$ ). Если волновое число превышает эту величину, то выражение (184) приобретает хотя и малое, но все же отличное от нуля значение. Для случая отсутствия обмена этот вопрос обсуждался в разделе 20 работы [14] (рис.5), однако контрольная проверка показала, что введение обмена ничего нового к сказанному там не добавляет.

### **23. Последовательность расчета действительной и мнимой частей дисперсионного соотношения**

Шаг №1.

Задание начальных параметров  $Q$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega_H$ ,  $d$ .

Шаг №2.

Задание значения  $k_y$ .

Шаг №3.

Вычисление параметров  $k_d$  и  $k_m$  в соответствии с методиками, приведенными в разделах №7-№9.

Шаг №4.

Вычисление левой  $U$  и правой  $V$  частей дисперсионного соотношения, получаемых в соответствии с методиками, приведенными в разделах №18-№21.

Шаг №5.

Вычисление действительной  $Re(U)$  и мнимой  $Im(U)$  частей выражения для  $U$  в соответствии с формулами (172) и (173).

Шаг №6.

Вычисление действительной  $Re(V)$  и мнимой  $Im(V)$  частей выражения для  $V$  в соответствии с формулами (174) и (175).

Шаг №7.

Вычисление действительной  $W_d$  и  $W_m$  мнимой частей дисперсионного соотношения в соответствии с формулами (176) и (178), а также (177) и (179).

Шаг №8.

Получение уравнений для действительной  $W_d$  и  $W_m$  мнимой частей дисперсионного соотношения в соответствии с формулами (181) и (182), а также (183) и (184).

#### 24. Схема получения закона дисперсии

Закон дисперсии представляет собой функциональную зависимость между частотой  $\Omega$  и продольным волновым числом  $k_y$ , задаваемую соотношением (145) (или (45)), определяемую решением уравнений (183) и (184). В соответствии с данными работы [14] (раздел №20, рис.5), закон дисперсии в области действительных, достаточно плавно меняющихся значений частоты при плавном изменении волнового числа (рис.5а в той же работе) обеспечивает решение именно уравнения (183), в основе которого лежит равенство нулю выражения  $W_d$ , определяемого формулой (177).

В настоящей работе, подобно [14], такое решение выполнялось методом поиска нуля при пошаговом изменении продольного волнового числа  $k_y$ . При этом на каждом шаге по  $k_y$  выполнялся пошаговый проход по частоте  $\Omega$  от нуля вверх с вычислением на каждом шаге частоты знака выражения  $W_d$  до момента, когда знак этого выражения менялся на противоположный. Получаемое при этом значение частоты  $\Omega$  принималось за искомое, соответствующее

заданному значению волнового числа  $k_y$ . После этого выполнялся шаг по волновому числу  $k_y$  и снова осуществлялся поиск частоты, соответствующей изменению знака  $W_d$ . Такой пошаговый проход по волновому числу давал функциональную зависимость частоты от волнового числа, то есть искомый закон дисперсии.

Некоторые результаты расчетов закона дисперсии приведены в следующих разделах.

## **25. Классическая обменная волна в безграничном пространстве и в тонкой пластине**

Для того, чтобы иметь опорную точку, с которой будем сравнивать результаты проделанного в предыдущих разделах рассмотрения, приведем сначала закон дисперсии для классической обменной волны, традиционно рассматриваемой в безграничном пространстве.

Еще в пионерской работе Блоха 1930 года был установлен квадратичный закон дисперсии обменных волн в свободном пространстве.

**Замечание.** Оригинальная работа Блоха в настоящее время является библиографической редкостью, однако ссылку на нее под номером [249] можно найти в работе [21]. Краткое изложение теории Блоха на квантовом языке содержится в фундаментальной монографии [22-стр.115-124]. В приведенной в этой монографии формуле (20.17) на стр.121 с точностью до обозначений просматривается квадратичная зависимость частоты обменной спиновой волны от ее волнового числа. При этом также указывается на аналогию с волной де Бройля, по-видимому, наиболее доступное описание которой можно найти в учебной монографии [23-стр.143-145. форм.(141.6)]. Следует заметить, однако, что такая аналогия достаточно хорошо проходит только при сравнительно небольшой величине волнового числа в сочетании с условием наличия массы покоя у спиновой волны, что требует дополнительного обоснования.

В настоящей работе будем опираться на классический закон дисперсии обменных волн в свободном пространстве, имеющий вид [21-стр.200, форм.

(7.13)]:

$$\omega = \eta k^2, \quad (185)$$

где  $\eta$  – константа неоднородного обменного взаимодействия, связанная с введенной выше константой  $q$  соотношением [24- стр.199, форм.(7.5)]:

$$\eta = \gamma_{\omega} M_0 q. \quad (186)$$

В этих формулах, согласно [24-стр.15, форм.(1.3)], положено  $\gamma_{\omega} = 1,7653 \cdot 10^7 \text{ Э}^{-1} \text{ с}^{-1}$ , где под  $\omega$  подразумевается круговая частота. Чтобы получить линейную частоту  $f$  надо  $\omega$  разделить на  $2\pi$ . При этом, разделяя  $\gamma_{\omega}$  на  $2\pi$ , получаем традиционно используемое при сравнении с экспериментом [16, гл.3,7] значение  $\gamma_f = 2,8 \text{ МГц Э}^{-1}$ .

В соответствии с [24-стр.38.39, форм.(3.7), (3.11)], поле, действующее на намагниченность в безграничной среде, имеет вид:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h} - \frac{4\pi}{k^2} \vec{k} (\vec{m} \vec{k}) - q k^2 \vec{m}, \quad (187)$$

где первое слагаемое – внешнее постоянное поле, второе – внешнее переменное поле, третье – поле размагничивания и четвертое – поле обменного взаимодействия.

В этом случае решение уравнения Ландау-Лифшица для волны, распространяющейся перпендикулярно к направлению внешнего постоянного поля, дает частоту [24-стр.39, форм.(3.1.6)]:

$$\omega^2 = (\omega_H + \omega_E)(\omega_H + \omega_E + \omega_M), \quad (188)$$

где используются обозначения:

$$\omega_H = \gamma H_0; \quad (189)$$

$$\omega_E = \gamma q k^2 M_0; \quad (190)$$

$$\omega_M = 4\pi \gamma M_0. \quad (191)$$

Разделяя (188) на  $4\pi\gamma M_0$  и вводя в соответствии с (11)-(13) нормированные частоты  $\Omega$ ,  $\Omega_H$  и нормированную константу обмена  $Q$ , из (188) получаем:

$$\Omega = \sqrt{(\Omega_H + Qk^2)(\Omega_H + Qk^2 + 1)}. \quad (192)$$

Это выражение получено для безграничного пространства. Как показано в работе [14], рассматривающей распространение волны в тонкой пластине, последнее слагаемое во втором множителе под корнем должно быть умножено на параметр размагничивания  $\beta$ , величина которого значительно меньше единицы. Поскольку в реальной экспериментальной ситуации обычно  $\Omega_H$  порядка единицы, то в первом приближении этим слагаемым можно пренебречь, так что из (192) получаем:

$$\Omega = \Omega_H + Qk^2. \quad (193)$$

Частота поверхностной волны Дэймона-Эшбаха при стремлении волнового числа к бесконечности, в соответствии с [16-стр.120, форм.(3.1), рис.3.1], определяется формулой:

$$\Omega_{HT} = \Omega_H + \frac{1}{2}. \quad (194)$$

Это значение частоты определяется размагничивающим фактором поверхности пластины при  $k \rightarrow \infty$ , так что в формуле (193) следует вместо частоты  $\Omega_H$  использовать частоту  $\Omega_{HT}$ . В результате таких преобразований классическая модель обменной волны в касательно намагниченной тонкой пластине приводит к дисперсионному соотношению в виде:

$$\Omega = \Omega_H + \frac{1}{2} + Qk^2. \quad (195)$$

Это соотношение примем за эталонное и будем сравнивать с действительной частью дисперсионного соотношения (183), полученной выше в разделе №22.



## 26. Дисперсия с размагничиванием и обменом

Обратимся теперь к рассмотрению закона дисперсии в соответствии с соотношением, полученным в разделе №22 (формула (183)). То есть рассмотрим дисперсию поверхностной волны типа Дэймона-Эшбаха в тонкой пластине с учетом размагничивания и обмена. Соответствующие дисперсионные кривые приведены на рис.2.

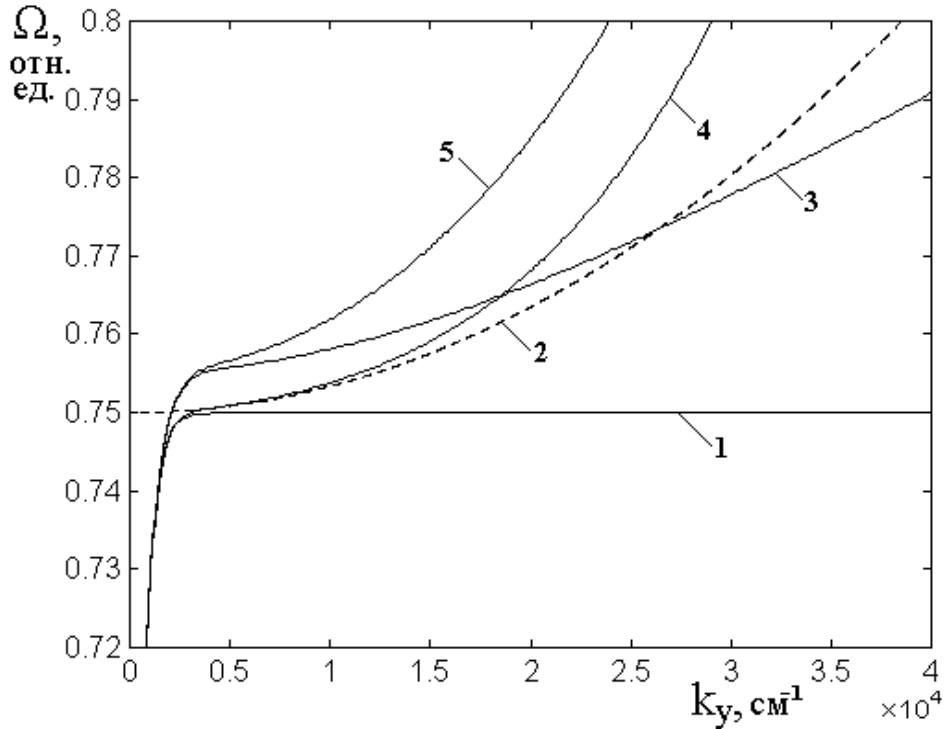


Рис.2. Дисперсионные кривые с размагничиванием и обменом.

- 1 – задача Дэймона-Эшбаха классическая;
- 2 – дисперсия в безграничной среде (построена по формуле (195));
- 3 – дисперсия с размагничиванием без обмена;
- 4 – дисперсия с обменом без размагничивания;
- 5 – дисперсия с размагничиванием и обменом одновременно.

Параметры:  $d = 10$  мкм;  $\alpha_p = 0,01$ ;  $Q = 3,37 \cdot 10^{-11}$  см<sup>2</sup>;  $H_0 = 437,5$  Э;  
 $4\pi M_0 = 1750$  Гс.

На этом рисунке кривая 1 соответствует классическому соотношению Дэймона-Эшбаха. Начинается она при  $k_y = 0$  на частоте:

$$\Omega_B = \sqrt{\Omega_H(\Omega_H + 1)}, \quad (196)$$

при принятых параметрах равной 0,5590 отн.ед. Кривые 3, 4, 5 также начинаются на этой частоте. С целью более наглядного выявления формы кривых при достаточно больших значениях  $k_y$ , начальная точка  $\Omega_B$  вынесена за нижний край рисунка.

При значениях волнового числа  $k_y$ , меньших  $0,2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ , кривая 1 резко возрастает, после чего выходит на горизонтальную асимптоту, соответствующую частоте:

$$\Omega_{HT} = \Omega_H + \frac{1}{2}, \quad (197)$$

отмеченную выше формулой (194) в качестве верхнего предела частоты волны Дэймона-Эшбаха при  $k \rightarrow \infty$ .

Заметим, что подавляющее большинство работ, касающихся рассмотрения свойств дипольных поверхностных волн (краткий обзор которых, включая библиографию, приведен, например, в [16, 17]), ограничиваются именно этим интервалом волнового числа (то есть не более  $0,2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ ). Из рисунка можно видеть, что в этой области все кривые 1, 3, 4, 5 практически совпадают, что оправдывает отсутствие учета размагничивания и обмена в этих работах.

Примечательным является характер кривой 2, соответствующей классическому рассмотрению дисперсии обменной волны в безграничной среде. Начинаясь на частоте  $\Omega_{HT}$ , определяемой формулой (194) (здесь равной 0,75 отн. ед.), эта кривая идет далее вверх в соответствии с квадратичным законом, определяемым последним слагаемым в формуле (195). Следует заметить, что характера кривых в области малых значений волнового числа (менее  $0,2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ ) эта кривая не отражает, то есть для описания дисперсии волн дипольного характера, широко рассматриваемых в экспериментах [16, гл.3,7], эта зависимость не пригодна.

Возвращаясь к насыщению кривой 1 на частоте  $\Omega_{HT}$ , отметим, что да-

лее, то есть при волновом числе  $k_y$ , превышающем  $0,2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ , в отличие от этой кривой, все остальные кривые 3-5 стремятся вверх и друг от друга заметно расходятся.

Так, кривая 3, соответствующая учету только размагничивания, сразу около  $k_y \sim 0,3 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ , совершает резкий скачок вверх на 0,05 отн.ед, после чего рост ее замедляется, но с дальнейшим увеличением волнового числа снова постепенно нарастает. Такая смена нарастания с резкого на более плавный соответствует переходу параметра размагничивания  $\beta$  через точку перегиба гиперболического тангенса, которая при принятых параметрах (толщине 10 мкм) приходится как раз на  $k_y \sim 0,3 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ , как это можно видеть из кривой 3 на рис.3 в работе [14].

Кривая 4, соответствующая учету только обмена, все время, начиная с  $k_y \sim 0,3 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ , возрастает по закону, близкому у квадратичному, что отражает классический квадратичный характер дисперсии обменных волн, определяемый формулой (185).

Кривая 5, соответствующая одновременному учету как размагничивания, так и обмена, имеет примерно такой же квадратичный характер, как и кривая 4, однако проходит значительно выше, благодаря добавлению к воздействию обмена дополнительного воздействия от размагничивания, которое по мере увеличения  $k_y$  постепенно увеличивается.

Важным фактом является значительное превышение кривых 4 и 5 над кривой 2, причем такое превышение имеет место даже в отсутствие размагничивания (кривая 4), а при наличии размагничивания (кривая 5) заметно усиливается, причем тем сильнее, чем волновое число больше.

## 27. Зависимость дисперсии от толщины пластины

Теперь, после общего ознакомления с характером дисперсии обменных спиновых волн, рассмотрим влияние на их дисперсию толщины пластины.

Обратимся к рис.3, где показаны дисперсионные кривые (а) и параметр

размагничивания (б) при различной толщине пластины. В качестве контрольного параметра для дисперсии выбран параметр размагничивания, так как именно он в первую очередь определяется толщиной пластины, оказывая влияние и на дисперсию. На обеих частях рисунка одни и те же цифры соответствуют одной и той же толщине. При этом цифры без штрихов относятся к полным дисперсионным кривым с учетом размагничивания и обмена, цифры с одним штрихом отражают дисперсию без размагничивания и обмена, то есть случай классической задачи Дэймона-Эшбаха, а цифры с двумя штрихами относятся к вспомогательной зависимости параметра размагничивания от волнового числа.

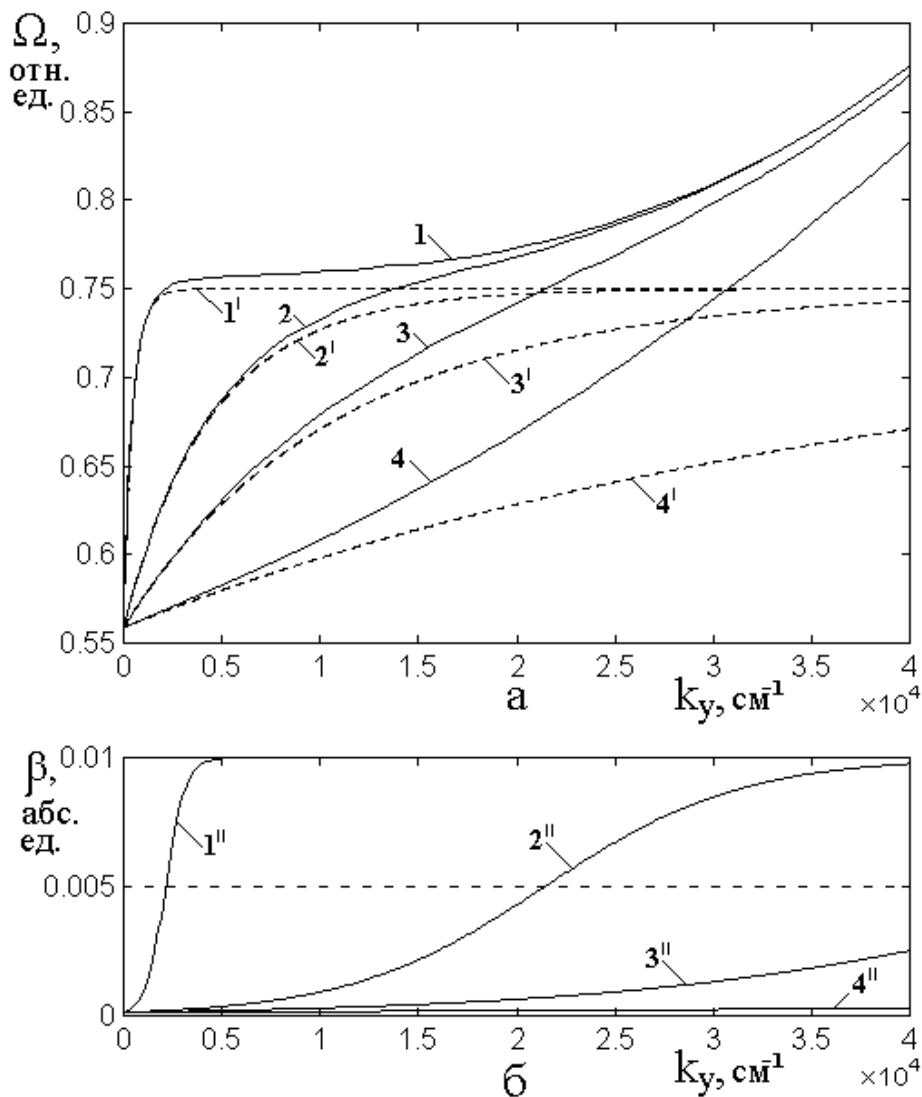


Рис.3. Дисперсионные кривые (а) и параметр размагничивания (б) при различной толщине пластины  $d$  :

- 1, 1', 1'' – 10 мкм; 2, 2', 2'' – 1 мкм;
- 3, 3', 3'' – 0,4 мкм; 4, 4', 4'' – 0,1 мкм.

Параметры:  $\alpha_p = 0,01$ ;  $Q = 3,37 \cdot 10^{-11}$  см<sup>2</sup>;  $H_0 = 437,5$  Э;  $4\pi M_0 = 1750$  Гс.

Из рисунка можно видеть, что все дисперсионные кривые по мере роста волнового числа также возрастают по закону, близкому к квадратичному. При этом крутизна кривых от 2 до 4 увеличивается, то есть рост проявляется тем сильнее, чем толщина пластины меньше.

На начальных участках, то есть до  $k_y$  менее  $(0,1 \div 0,4) \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ , все кривые 1–4 следуют кривым  $1'–4'$ , то есть соответствуют дисперсии классической волны Дэймона-Эшбаха. В самом деле, из рис.3б видно, что в этой области параметр размагничивания  $\beta$  везде близок к нулю, так что размагничивание на дисперсии никак не сказывается. Однако при  $k_y$  больше этого интервала, все кривые 1–4 уже отклоняются вверх от кривых  $1'–4'$ , причем тем сильнее, чем толщина пластины меньше.

Для кривой 1 отклонение начинается уже при  $k_y = 0,2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ , так как именно при таком значении волнового числа гиперболический тангенс кривой  $1''$  на рис.3б претерпевает перегиб, начиная с которого влияние размагничивания становится заметным.

Однако уже для кривой 2 отклонение начинается при  $k_y = 0,4 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ , хотя перегиб гиперболического тангенса на кривой  $2''$  еще значительно не достигается (как видно из рис.3б, имеет место только при  $k_y = 2,1 \cdot 10^4$ ). То есть здесь в отклонении кривых вверх главную роль играет уже не размагничивание, а обменное взаимодействие.

Еще сильнее такое отклонение проявляется для кривых 3 и 4, для которых перегиб тангенса находится за правым краем рисунка, то есть в дисперсии волн при толщине менее 0,5 мкм размагничивание вообще не участвует, а квадратичный рост дисперсионных кривых определяется исключительно обменом (по крайней мере, в диапазоне волновых чисел, представленном на рисунке).

Более того, из рис.3а отчетливо можно видеть, что если кривая 3, соответствующая толщине в 0,04 мкм, на участке от нуля до  $k_y = 2,5 \cdot 10^4$  имеет вы-

пуклость вверх (то есть, как того требует классика Дэймона-Эшбаха), то на кривой 4, соответствующей толщине 0,01 мкм, такая выпуклость уже полностью отсутствует и кривая сразу с самых малых значений волнового числа стремится вверх по закону, подобному квадратичному.

То есть можно сделать вывод, что обменное взаимодействие проявляется тем сильнее, чем толщина пластины меньше, причем с толщины порядка 0,5 мкм становится преобладающим над размагничиванием.

Интересным моментом является тот факт, что при увеличении волнового числа сверх  $3,0 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ , все кривые имеют тенденцию сближаться, подтягиваясь вверх к кривой 1. Так, кривые 1 и 2 слились уже при  $k_y = 2,1 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ , что как раз соответствует перегибу тангенса кривой 2'' на рис.3в. Кривая 3 вблизи правого края рисунка также близко подтягивается к кривой 1, а кривая 4 тоже стремится туда же.

**Замечание.** Можно полагать, что при достаточном увеличении волнового числа, то есть после перехода через точку перегиба тангенса, соответствующего заданной толщине, любая кривая подтягивается к кривой 1, стремясь к ней асимптотически. Однако заметим, что это предположение требует дополнительной проверки, в настоящее время выходящей за рамки данной работы.

## 28. Зависимость дисперсии от величины обменного взаимодействия

Продланное выше рассмотрение касается зависимости закона дисперсии обменных спиновых волн от толщины пластины. Рассмотрим теперь, как меняется характер дисперсии при изменении степени обменного взаимодействия. В качестве эталона возьмем значение константы обмена для железиттриевого граната, равное  $Q_{YIG} = 3,37 \cdot 10^{-11} \text{ см}^2$ , и будем умножать это число на коэффициент  $g$ , меняющийся от 1 до 100. С целью удобства сравнения с предыдущими результатами возьмем коэффициент параметра размагничивания  $\alpha_p$  тем же, что в предыдущем разделе, то есть равным 0,01. Толщину пластины выберем из условия, чтобы перегиб гиперболического тангенса параметра  $\beta$

приходился примерно на середину исследуемого диапазона волновых чисел. Из рис.3б видно, что такому условию удовлетворяет толщина, равная 1 мкм (кривая 2'' на рис.3б). Заметим, что при такой толщине влияние размагничивания может заметно сказываться только на верхнем конце исследуемого диапазона волновых чисел, поэтому на данном этапе особенного значения размагничиванию придавать не будем. При этих условиях построен рис.4, к рассмотрению которого обратимся далее.

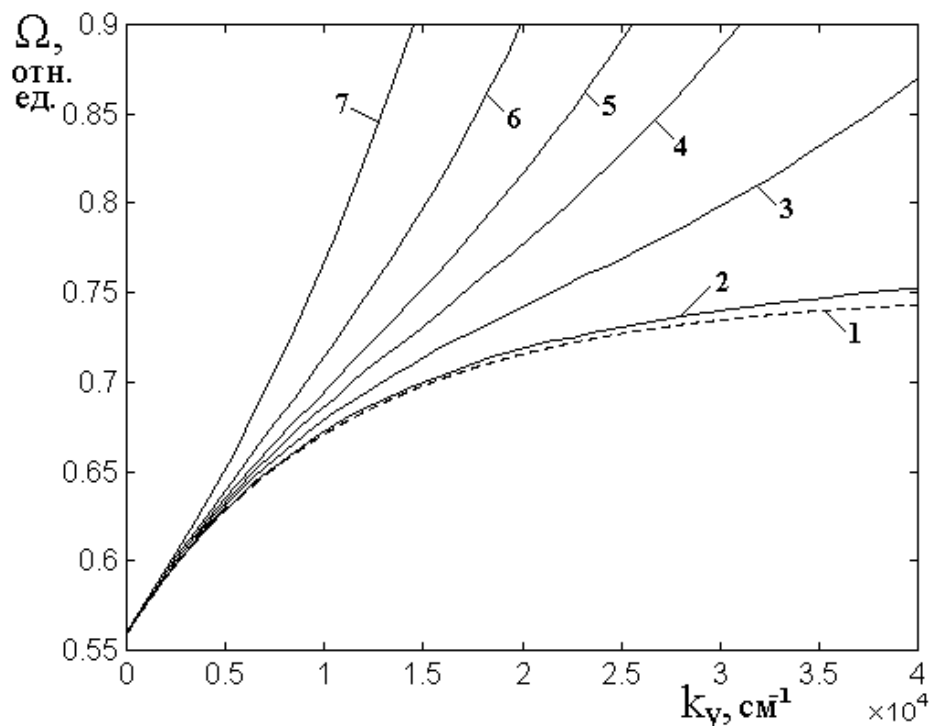


Рис.4. Дисперсионные кривые при различной величине параметра обменного взаимодействия  $Q = g \cdot Q_{YIG}$ , где  $Q_{YIG} = 3,37 \cdot 10^{-11} \text{ см}^2$ . Номера кривых соответствуют следующим значениям коэффициента  $g$ : 1 – 0; 2 – 1; 3 – 10; 7 – 20; 5 – 30; 6 – 50; 7 – 100.

Параметры:  $d = 1 \text{ мкм}$ ;  $\alpha_p = 0,01$ ;  $H_0 = 437,5 \text{ Э}$ ;  $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$ .

На этом рисунке кривая 1 построена в отсутствие как обменного взаимодействия, так и размагничивания, то есть соответствует решению классической задачи Дэймона-Эшбаха. Из общего рассмотрения рисунка можно видеть, что по мере увеличения параметра обмена дисперсионные кривые располагаются по частоте тем выше, чем этот параметр больше.

Кривая 2, соответствующая константе обмена, свойственной железит-

триевому гранату, уже проходит несколько выше кривой 1, однако квадратичный характер ее еще не проявляется. Можно полагать, что в этом случае для проявления квадратичности максимальное принятое в настоящем рассмотрении значение волнового числа  $4 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$  еще недостаточно.

Однако на кривой 3, соответствующей десятикратному превышению значения константы обмена над таковым для железиттриевого граната, при волновых числах выше  $2,5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$  уже заметен некоторый выгиб вниз, сменяющийся хотя и слабо, но четко выраженным подъемом вверх. То есть квадратичность уже начинает сказываться, хотя еще и в слабой мере.

Но для кривой 4, соответствующей всего двукратному превышению по обмену над кривой 3, возрастающий квадратичным образом участок начинается уже с  $1,5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ , а для кривых 5, 6 и 7, соответствующих еще большему росту константы обмена, близкий к квадратичному рост наблюдается уже с самых малых значений волнового числа.

Таким образом, можно сделать вывод, что по мере увеличения константы обменного взаимодействия, квадратичный характер дисперсионных кривых проявляется тем сильнее, чем величина этой константы больше.

Заметим, что такой вывод неожиданным не является и с очевидностью просматривается из классики, то есть из формулы (195) и даже (185). Однако здесь при небольших значениях константы обмена (кривые 2, 3 и частично 4) на начальном участке роста все же достаточное влияние оказывает размагничивание формы пластины, свойственное классической задаче Дэймона-Эшбаха проявляющееся в определенном выгибе упомянутых кривых вверх. Однако при достаточной величине этой константы (здесь больше  $30 \cdot Q_{YIG}$ , то есть для кривых 5-7) выгнутый вверх участок практически отсутствует, то есть размагничивание пластины уже не сказывается (кроме начального сдвига вверх частоты  $\Omega$  в точке  $k_y = 0$ , равного 0,5592 отн.ед.), так что квадратичный характер дисперсии полностью преобладает.



## 29. Замечание об ограничении диапазона по волновому числу

Следует заметить, что все исследования, описанные в разделах №26-№28, выполнены в интервале изменения продольного волнового числа от нуля до  $4 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ . Такое ограничение вызвано в первую очередь переполнением разрядной стеки имеющейся в распоряжении автора вычислительной машины ( $10^{38}$ ), что происходит при возведении поперечного волнового числа в восьмую степень (уравнение (50)). Кроме того, переполнение сетки наступает также при вычислении гиперболического тангенса и экспонент в формулах (14), а также (157), (158), когда показатель экспоненты превышает число 88. Устранение переполнения первого типа в достаточной степени устраняется нормировкой, то есть умножением волнового числа на толщину пластины, а второго типа – путем задания верхнего предела показателя экспоненты.

Однако в настоящей работе такая нормировка и ограничение не проводились из-за того, что приведенное предельное значение волнового числа  $4 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$  и без того превышает традиционно реализуемый диапазон в экспериментах по дипольным магнитостатическим волнам примерно на два порядка [16, гл.3,7]. То есть, можно полагать, что проделанное рассмотрение позволяет выявить основные особенности поставленной задачи в достаточно наглядном свете.

Однако следует заметить, что, как отмечено в работе [14], потребности современной техники требуют освоения диапазона волновых чисел, по крайней мере, на порядок, а то и на два больше рассмотренного здесь. Такое рассмотрение автор предполагает в качестве отдельной задачи для следующей части настоящей работы.

## Заключение

В развитие классической задачи Дэймона-Эшбаха рассмотрено распространение магнитостатической волны с учетом динамического размагничивания и неоднородного обменного взаимодействия. Приведена классическая геометрия задачи Дэймона-Эшбаха, представляющая собой ферритовую пластину, намагниченную внешним полем в ее плоскости. Рассмотрено распространение

поверхностной волны, волновой вектор которой перпендикулярен направлению поля.

Получен тензор магнитной проницаемости с учетом периодического характера распространяющейся волны в условиях динамического размагничивания и неоднородного обмена. Отмечен смешанный симметрично-антисимметричный характер тензора проницаемости, обусловленный учетом динамического размагничивания. Определены условия частотной расходимости компонент тензора, дополненные к влиянию постоянного поля также действием неоднородного обмена. Отмечено, что в силу двойственности поперечного волнового числа, компоненты тензора проницаемости также имеют двойственный характер.

Рассмотрена общая постановка задачи о распространении поверхностной магнитостатической волны. Отмечено, что равенство нулю ротора от динамического магнитного поля волны позволяет ввести потенциал этого поля, а равенство нулю дивергенции от магнитной индукции той же волны позволяет для потенциала получить уравнение Уокера, являющееся аналогом уравнения Лапласа для магнитно среды. Отмечено наличие смешанной второй производной по координатам в уравнении Уокера, обусловленное влиянием размагничивания и обмена. Показано, что смешанный характер производной приводит к двойственности поперечного волнового числа.

Для геометрии задачи Дэймона-Эшбаха записаны уравнения для потенциала в магнитной пластине и окружающих ее с обеих сторон двух свободных полупространствах. Приведены граничные условия на поверхностях между материалом пластины и свободным пространством. Показано, что решение поставленной граничной задачи методом разделения переменных позволяет получить дисперсионное соотношение для поверхностной волны, распространяющейся в плоскости пластины перпендикулярно направлению постоянного поля. Структура полученного дисперсионного соотношения приведена к виду, аналогичному структуре подобного соотношения в классической задаче Дэймона-

Эшбаха, однако здесь компоненты полученного соотношения определяются влиянием динамического размагничивания и обмена.

Подробно рассмотрен двойственный характер поперечного волнового числа, обусловленный смешанной производной в уравнении Уокера. Получены аналитические выражения для обоих значений волнового числа, обусловленные только размагничиванием в отсутствие обмена. Показано, что получение обеих компонент волнового числа при наличии обменного взаимодействия требует решения алгебраического уравнения восьмой степени, осуществимого только численным методом. Приведена последовательность численного расчета действительной и мнимой компонент поперечного волнового числа при наличии обмена, позволяющих получить поперечное волновое число в виде, требуемом для подстановки в дисперсионное соотношение.

Приведена общая схема получения закона дисперсии как функциональной зависимости частоты волны от ее продольного волнового числа. Предложен алгоритм расчета, состоящий в пошаговом задании продольного волнового числа с нахождением значения частоты на каждом шаге методом поиска нуля. В качестве первого шага отмечена необходимость определения компонент тензора магнитной проницаемости с учетом двойственного характера поперечного волнового числа. Приведена схема алгоритма получения тензора проницаемости для каждой из компонент двойственного волнового числа в отдельности. Получены промежуточные параметры, определяющие структуру правой и левой частей дисперсионного соотношения. Приведены схемы алгоритмов получения обеих частей дисперсионного соотношения, а также действительной и мнимой частей соотношения в целом. Отмечено, что приведенный алгоритм позволяет получить функциональную зависимость частоты распространяющейся волны от продольного волнового числа, что и составляет искомый закон дисперсии.

Приведены результаты расчета дисперсии поверхностной магнитостатической волны на основе полученного дисперсионного соотношения. В качестве точки для сравнения приведена классическая дисперсионная зависимость для

обменной волны в безграничном пространстве и ее обобщение для тонкой пластины. Отмечена недостаточность классического представления, обусловленная отсутствием учета динамического размагничивания, двойственного характера поперечного волнового числа и динамических граничных условий на поверхностях пластины.

На основе полученного дисперсионного соотношения построены дисперсионные кривые с учетом как размагничивания, так и обмена. Исследования выполнены в интервале продольного волнового числа от нуля до  $4 \cdot 10^4$  см<sup>-1</sup>, что превышает традиционно реализуемый диапазон в экспериментах по дипольным магнитостатическим волнам примерно на два порядка.

Выполнено сравнение полученных кривых с таковыми для классической задачи Дэймона-Эшбаха, а также для классической обменной волны в безграничной среде и тонкой пластине. Показано, что учет размагничивания приводит к повышению дисперсионных кривых в области волновых чисел, величина которых превышает обратную величину толщины пластины. Показано, что обменное взаимодействие приводит к росту дисперсионных кривых, существенно превышающему дисперсионные кривые для поверхностных волн, полученные в рамках классической задачи Дэймона-Эшбаха, причем превышение с увеличением продольного волнового числа растет по закону, близкому к квадратичному. Показано, что учет обменного взаимодействия, в основном, сохраняя близкий к квадратичному закон дисперсии, задаваемый классикой, приводит к большей крутизне дисперсионных кривых по сравнению с классическими, причем такое превышение крутизны по мере увеличения продольного волнового числа также увеличивается. Отмечено, что учет размагничивания, сам по себе не обеспечивая роста дисперсионных кривых выше квадратичного, в свою очередь, складываясь с обменом, приводит к дополнительному превышению получаемых квадратичных кривых над классическими.

На основе полученного дисперсионного соотношения с учетом размагничивания и обмена, рассмотрена зависимость закона дисперсии для поверхностной волны от толщины пластины. Отмечено, что дисперсионные кривые при

любой толщине, по мере роста волнового числа, также возрастают по закону, близкому к квадратичному. При этом в области значений волнового числа, меньших обратной толщины пластины, крутизна дисперсионных зависимостей по мере уменьшения толщины возрастает. В области значений волнового числа, больших обратной толщины пластины, крутизна дисперсионных кривых по мере уменьшения толщины асимптотически стремится к величине, свойственной закону дисперсии в отсутствие размагничивания.

На основе полученного дисперсионного соотношения с учетом размагничивания и обмена, рассмотрена зависимость закона дисперсии для поверхностной волны от величины константы обменного взаимодействия. Рассмотрение выполнено при толщине пластины равной 1 мкм, что обеспечивало начало заметного влияния размагничивания примерно на середине исследуемого диапазона волнового числа (то есть около  $2 \cdot 10^4$  см<sup>-1</sup>). В качестве эталона принято значение константы обмена, свойственное железиттриевому гранату. Получены дисперсионные кривые при разной величине константы обменного взаимодействия в интервале от одного до ста эталонных значений. Показано, что при величине константы порядка единицы от эталонного значения, дисперсионная кривая, хотя и проходит несколько выше классической, соответствующей задаче Дэймона-Эшбаха, но квадратичный характер дисперсии заметно не проявляется. Показано, что для заметного проявления квадратичности необходимо превышение константы обмена не менее чем на порядок по сравнению с эталоном. При этом превышение константы над эталоном на два порядка приводит к полному преобладанию квадратичного закона над классическим.

Отмечена связанная с численным характером решения задачи техническая причина ограничения интервала продольного волнового числа величиной  $4 \cdot 10^4$  см<sup>-1</sup>. Выявлены ее особенности и указаны пути их преодоления. В качестве важнейшей задачи для дальнейшего рассмотрения отмечена необходимость расширения исследуемого диапазона продольного волнового числа не менее чем на два порядка.

## Благодарность

Автор признателен В.И.Зубкову за помощь на начальных этапах работы, В.С.Власову за предоставление ряда литературных ссылок и постоянный стимулирующий интерес к работе, В.Г.Шаврову за активное стимулирующее внимание и обсуждение работы.

Работа выполнена в рамках государственного задания.

## Литература

1. Kim S.-K. Micromagnetic computer simulations of spin waves in nanometer-scale patterned magnetic elements. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2010. Vol.43. P.264004(25).
2. Khitun A., Bao M., Wang K.L. Magnonic logic circuits. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2010. Vol.43. P.264005(10).
3. Au Y., Ahmad E., Dmytriiev O., Dvornik M., Davison T., Kruglyak V.V. Resonant microwave-to-spin-wave transducer. // Appl. Phys. Lett. 2012. Vol.100. №18. P.182404(5).
4. Au Y., Davison T., Ahmad E., Keatley P.S., Hicken R.J., Kruglyak V.V. Excitation of propagating spin waves with global uniform microwave fields. // Appl. Phys. Lett. 2011. Vol.98. №12. P.122506(3).
5. Damon R.W., Eshbach J.R. Magnetostatic modes of a ferromagnet slab. // J. Phys. Chem. Solids. 1961. Vol.19. №3/4. P.308.  
// ТИИЭР. 1988. Т.76. №2. С.86.
6. Schlömann E., Joseph R.I., Kohane T. Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields, with application to magnetic delay line. // Proc. IEEE. 1965. Vol.53. №10. P.1495.
7. Адам Дж.Д. Аналоговая обработка сигналов с помощью СВЧ-ферритов. // ТИИЭР. 1988. Т.76. №2. С.73.

8. Исхак В.С. Применение магнитостатических волн: обзор. 28. Исхак В.С. Применение магнитостатических волн: обзор. // ТИИЭР. 1988. Т.76. №2. С.86.
9. Gruszecki P., Krawczyk M. Spin-wave beam propagation in ferromagnetic thin films with graded refractive index: mirage effect and prospective applications. // Phys. Rev. B. 2018. Vol.97. №9. P.094424(9).
10. Григорьева Н.Ю., Попов Д.А., Калиникос Б.А. Спектр дипольно-обменных спиновых волн в анизотропном ферромагнитном волноводе прямоугольного сечения. // ФТТ. 2014. Т.56. №9. С.1746-1755.
11. Walowski J., Münzenberg M. Perspective: Ultrafast magnetism and THz spintronics. // Journ. Appl. Phys. 2016. Vol.120. №14. P.140901(16).
12. Bigot J.V., Vomir M. Ultrafast magnetization dynamics of nanostructures. // Ann. Phys. (Berlin). 2013. Vol.525. №1-2. P.2-30.
13. Чернов А.И., Кожаев М.А., Ветошко П.М., Додонов Д.В., Прокопов А.Р., Шумилов А.Г., Шапошников А.Н., Бержанский В.Н., Звездин А.К., Белотелов В.И. Локальное зондирование магнитных пленок с помощью оптического возбуждения магнитостатических волн. // ФТТ. 2016. Т.58. №6. С.1093.
14. Щеглов В.И. Влияние поля размагничивания на дисперсию поверхностной волны Дэймона-Эшбаха. // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2019. №2. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/feb19/3/text.pdf>.
15. Щеглов В.И. Влияние обменного взаимодействия и динамического размагничивания на дисперсию поверхностной волны Дэймона-Эшбаха. Часть 1. Поперечное волновое число. // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2019. №7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jul19/3/text.pdf>.
16. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Магнитостатические волны в неоднородных полях. М.: Физматлит. 2016.
17. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах. М.: Физматлит. 2017.
18. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода. М.: Физматлит. 2018.

19. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Динамика намагниченности в условиях изменения ее ориентации. М.: Физматлит. 2019.
20. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972.
21. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит. 1994.
22. Вонсовский С.В., Шур Я.С. Ферромагнетизм. М.: ОГИЗ Гостехиздат. 1948.
23. Шпольский Э.В. Атомная физика. Т 1. М.: Наука. 1974.
24. Гуревич А.Г. Ферриты на сверхвысоких частотах. М.: Гос.Изд.физ.-мат.лит. 1960.

**Для цитирования:**

Щеглов В.И. Влияние обменного взаимодействия и динамического размагничивания на дисперсию поверхностной волны Дэймона-Эшбаха. Часть 2. Дисперсионное соотношение. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2019. № 9. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/sep19/8/text.pdf>  
DOI 10.30898/1684-1719.2019.9.8