

DOI <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.9.6>

УДК 621.396.96

## МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОЦЕНОК ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ СИНГУЛЯРНОГО ДОПОЛНЕНИЯ МАТРИЦЫ ОПОРНЫХ СИГНАЛОВ

В. В. Абраменков, Д. Г. Митрофанов, И. Л. Жбанов, С. М. Семченков

Военная академия войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил РФ  
имени Маршала Советского Союза А. М. Василевского,  
214027, Смоленск, ул. Котовского, 2

Статья поступила в редакцию 7 сентября 2020 г.

**Аннотация:** В статье предложен новый метод оценивания импульсной характеристики линейной системы, обладающий повышенной устойчивостью к воздействию шума на ее входе. Приведены сравнительные оценки эффективности предложенного метода относительно эффективности исходного метода инверсной фильтрации и метода Винера. Оценки получены в одинаковых условиях на единой имитационной математической модели. В качестве показателя эффективности использовано интегральное СКО разности оценки импульсной характеристики и ее истинного значения. Описаны условия и методика проведения имитационного математического моделирования. Показано, что предложенный метод превосходит по эффективности другие рассмотренные методы решения обратной задачи рассеяния и может быть использован в системах передачи данных для оценивания импульсной характеристики канала, а также в радиолокации для разрешения близкорасположенных объектов.

**Ключевые слова:** сингулярное разложение, матрица опорных сигналов, инверсная фильтрация, метод Винера.

**Abstract.** The paper proposes a new method for evaluating the pulse characteristic of a linear system, which has increased resistance to noise at its input. Comparative estimates of the effectiveness of the proposed method relative to the effectiveness of the original inverse filtration method and the Wiener method are given. The estimates

are obtained under the same conditions on a single simulation mathematical model. As an indicator of efficiency, the integral COE of the difference between the estimation of pulse characteristics and its true value is used. The conditions and methods of simulation mathematical modeling are described. It is shown that the proposed method is superior in efficiency to other methods considered for solving the inverse scattering problem and can be used in data transmission systems for estimating the pulse characteristic of a channel, as well as in radar for resolving nearby objects.

**Key words:** singular value decomposition, the matrix of reference signals, inverse filtering, Wiener method.

Эффективность большинства современных радиоэлектронных систем цифровой обработки сигналов, имеющих канал распространения сигнала в некотором пространстве (например, системы передачи данных, радиолокационные системы, системы обработки изображений), в значительной степени определяются их возможностями по достоверному оцениванию выделяемой из принятого сигнала информации. Достоверность извлечения информации в таких системах требует знания характеристики канала распространения сигнала в пространстве.

Пусть канал распространения обладает некоторой характеристикой, которая приводит к формированию на выходе линейной системы сигнала, представляющего собой суперпозицию копий излученного передатчиком (опорного) сигнала. Копии опорного сигнала могут иметь произвольную задержку в пределах времени распространения. В данной статье, в качестве примера, рассматривается ситуация при которой копии опорного сигнала имеют задержку друг относительно друга не превышающую половину длительности опорного сигнала, в интересах искусственного создания условий их не разрешения, на выходе согласованного фильтра. Пример формирования одной из возможных реализаций суперпозиции  $y_i$  из двух копий  $y_{1,i}$  и  $y_{2,i}$

импульсного опорного сигнала, задержанных на 3,5 и 4,1 временных интервала соответственно, представлен на рис. 1.

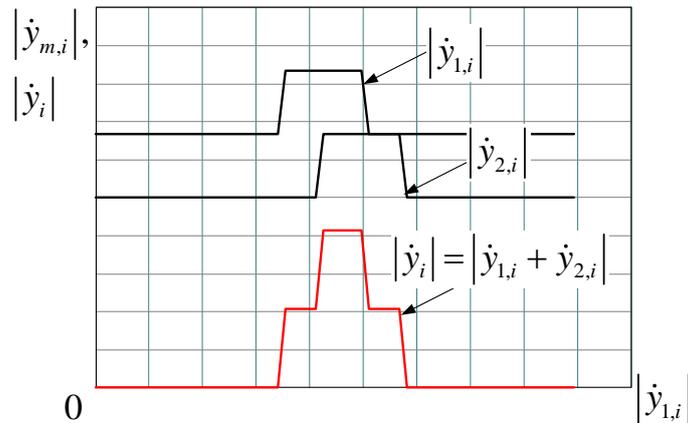


Рис. 1. Формирование реализации, образованной суперпозицией из двух копий импульсного опорного сигнала.

Требуется решить обратную задачу рассеяния [1]: по наблюдаемому сигналу  $y$  восстановить характеристику канала (импульсную или передаточную)  $x$  и получить ее оценку  $\hat{x}$ . Для систем передачи данных эта характеристика определяет особенности преотражений, которые возникают в канале для конкретных условий местности, а для радиолокационных систем – характеристику рассеяния наблюдаемого объекта. Примем, что  $x$  и  $y$  принадлежат комплексным гильбертовым пространствам  $L_2^x$  и  $L_2^y$  [2], а операторная модель наблюдения при достаточно общих допущениях имеет вид

$$y = Ax + n, \quad (1)$$

где  $A$  – вполне непрерывный (компактный) линейный оператор с плотной в  $L_2^x$  областью определения;  $n$  – шумы наблюдения.

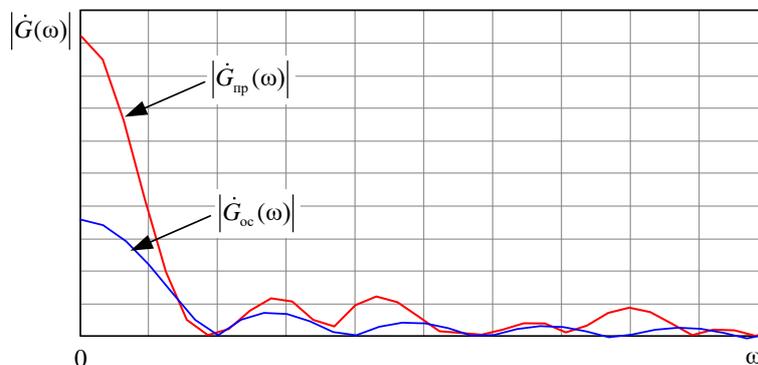


Рис. 2. Комплексные частотные спектры принятой выборки и опорного сигнала.

Существует множество подходов к решению уравнения (1). В [3, 4] рассмотрен исходный метод инверсной фильтрации, сущность которого в принятых ограничениях определим следующей последовательностью действий:

из принятого сигнала  $y$ , представляющего сумму  $M$  копий опорного сигнала  $\dot{U}_{oc}$  с различными временами запаздывания, формируется реализация  $\dot{U}_{пр}$ ;

оценивается комплексный частотный спектр (КЧС)  $\dot{G}_{пр}(\omega)$  принятой реализации  $\dot{U}_{пр}$  (например, с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ)) (рис.2);

каждая спектральная составляющая  $\dot{G}_{пр}(\omega)$  перемножается с соответствующей спектральной составляющей инверсного КЧС  $\dot{G}_{oc}^{-1}(\omega)$  опорного сигнала;

операцией обратного БПФ от произведения спектров  $\dot{G}_{пр}(\omega)$  и  $\dot{G}_{oc}^{-1}(\omega)$  формируется отклик инверсного фильтра  $\dot{x}_i^{иф}$  во временной области;

пороговой обработкой по выбранному критерию в отклике оценивается количество составляющих, превысивших порог, их координаты и амплитуды (рис.3);

полученная характеристика, состоящая из откликов фильтра, превысивших порог принимается за искомую импульсную характеристику  $|\hat{x}_i^{иф}|$ .

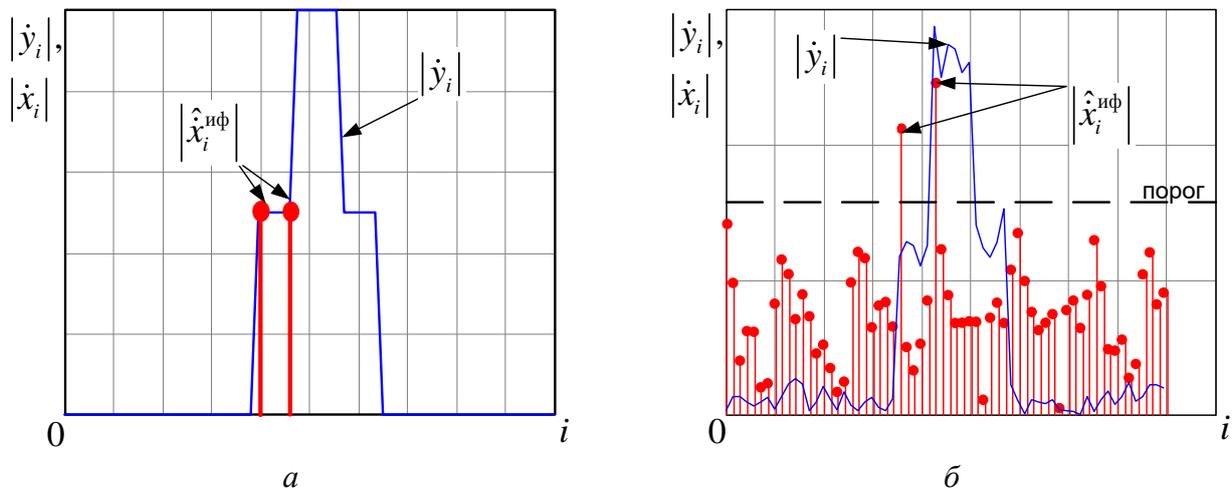


Рис. 3. Оценки  $|\hat{x}_i^{иф}|$  импульсной характеристики канала методом инверсной фильтрации по принятой реализации  $|y_i|$   
 $a$  – шумы отсутствуют;  $b$  – отношение сигнал-шум 28 дБ

Особенностью инверсной фильтрации является то, что при формировании инверсного спектра  $\dot{G}_{oc}^{-1}(\omega)$  существует возможность возникновения (для сигналов с некоторыми параметрами) неопределенности деления на ноль. Если неопределенность не раскрывается по правилу Лопиталья [5] и по каким-либо причинам изменить параметры сигнала [3, 6] и (или) схемы обработки [3, 6] невозможно, то вводится ограничение  $\frac{\dot{G}_{np}(\omega)}{\dot{G}_{oc}(\omega)} = 0$ , при  $|\dot{G}_{oc}(\omega)| \rightarrow 0$ .

В качестве решения задачи оптимальной линейной фильтрации в [3, 7] предложено также использовать метод Винера. Сущность метода Винера, за исключением двух первых этапов, аналогичных методу инверсной фильтрации, выражается следующей последовательностью действий:

оценивается среднеквадратическое отклонение (СКО)  $\sigma_{вх}$  шума, воздействующего в принятой реализации;

генерируется реализация шума с законом распределения, соответствующим наблюдаемому процессу, и вычисленным СКО  $\sigma_{вх}$ ;

оценивается КЧС  $\dot{G}_{ш}(\omega)$  сформированного шума;

формируется комплексная передаточная функция фильтра  $\dot{H}_{Винер}(\omega)$  согласно выражению:

$$\dot{H}_{Винер}(\omega) = \frac{\dot{G}_{oc}^*(\omega)}{|\dot{G}_{oc}(\omega)|^2 + |\dot{G}_{ш}(\omega)|^2 / |\dot{G}_{np}(\omega)|^2}, \quad (2)$$

где  $( )^*$  – операция комплексного сопряжения;

спектр  $\dot{G}_{пв}(\omega)$  перемножается с передаточной функцией фильтра  $\dot{H}_{Винер}(\omega)$ ;

операцией обратного БПФ от произведения спектра  $\dot{G}_{пв}(\omega)$  и функции  $\dot{H}_{Винер}(\omega)$  формируется отклик фильтра Винера  $\dot{x}_i^{Винер}$  во временной области;

пороговой обработкой по выбранному критерию в отклике оценивается количество составляющих, превысивших порог, их координаты и амплитуды

(рис. 4), полученная импульсная характеристика  $\left| \hat{x}_i^{\text{Винер}} \right|$  принимается за искомую.

Основным недостатком рассмотренных выше методов является недостаточная устойчивость получаемых оценок импульсной характеристики линейной системы. Устойчивость линейной системы можно оценить по обусловленности матрицы, определяющей оператор преобразования системы. Известно [10], что любое линейное преобразование матрицы, у которой обусловленность отличается от единицы, может только ухудшить устойчивость описываемого ею оператора преобразования. Исключение составляют линейные преобразования, описываемые унитарными матрицами. Получить такие матрицы позволяет сингулярное разложение. Кроме того, сингулярное разложение является весьма удобным способом получения псевдообратной матрицы.

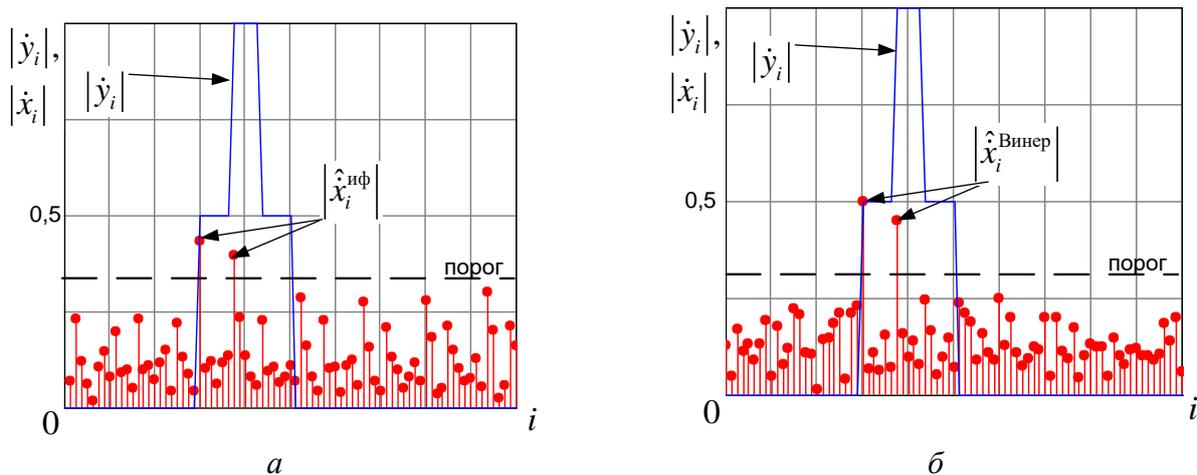


Рис. 4. Оценки импульсной характеристики канала по принятой выборке  $|y_i|$ . Отношение сигнал-шум 40 дБ  
 а – метод инверсной фильтрации; б – метод Винера.

Рассмотрим один из вариантов развития метода инверсной фильтрации с позиции решения уравнения (1) как системы алгебраических уравнений.

В ряде работ [6, 8] показано, что идентичные (рис.3, 4 а) оценки импульсной характеристики канала линейной системы для метода инверсной фильтрации можно получить циклической сверткой вектора принятой

реализации  $\mathbf{Y} = \{y_0, y_1, \dots, y_{N-1}\}$  и обратной матрицы опорных сигналов  $\mathbf{A}$  порядка  $N$ :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Y}, \quad (3)$$

где  $N$  – число элементов в принятой реализации,  $\mathbf{A}$  – квадратная матрица, сформированная для циклической свертки,  $\mathbf{X} = \{\hat{x}_0^{\text{иф}}, \hat{x}_1^{\text{иф}}, \dots, \hat{x}_{N-1}^{\text{иф}}\}$  – вектор оценок импульсной характеристики канала линейной системы, полученный методом инверсной фильтрации.

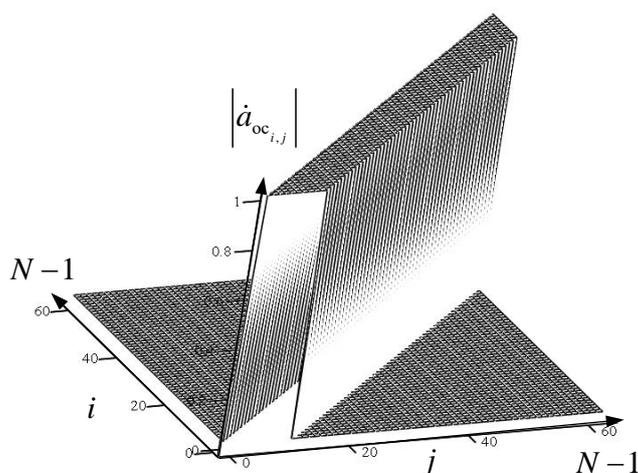


Рис. 5. Матрица  $\mathbf{A}$  опорных сигналов.

Сущность предлагаемого метода выражается следующей последовательностью действий:

из принятого сигнала  $y$ , представляющего сумму  $M$  копий опорного сигнала с различными временами запаздывания, формируется реализация;

формируется матрица опорных сигналов  $\mathbf{A}$ ;

матрица опорных сигналов  $\mathbf{A}$  подвергается сингулярному разложению [9]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H, \quad (4)$$

где  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  – унитарные матрицы порядка  $N$ , состоящие из левых и правых сингулярных векторов соответственно;  $( )^H$  – Эрмитово сопряжение;  $\mathbf{\Sigma}$  – диагональная матрица порядка  $N$  сингулярных значений  $\xi_i$  матрицы  $\mathbf{A}$ ;

вычисляется вектор оценок импульсной характеристики канала линейной

системы  $\mathbf{X} = \{\hat{x}_0^{сд}, \hat{x}_1^{сд}, \dots, \hat{x}_{N-1}^{сд}\}$ , полученный методом сингулярного дополнения матрицы опорных сигналов:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{U}\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{Y}, \quad (5)$$

где  $\alpha$  – регуляризирующий множитель, принимающий значения от 0 до  $N$  в зависимости от отношения сигнал-шум (рис.6);  $( )^T$  – оператор транспонирования. Под сингулярным дополнением здесь предлагается понимать процесс получения псевдообратной матрицы специального вида путем добавления к матрице опорных сигналов  $\mathbf{A}$  произведения унитарных матриц сингулярного разложения с весовым коэффициентом  $\alpha$ , который выступает в роли регуляризирующего множителя.

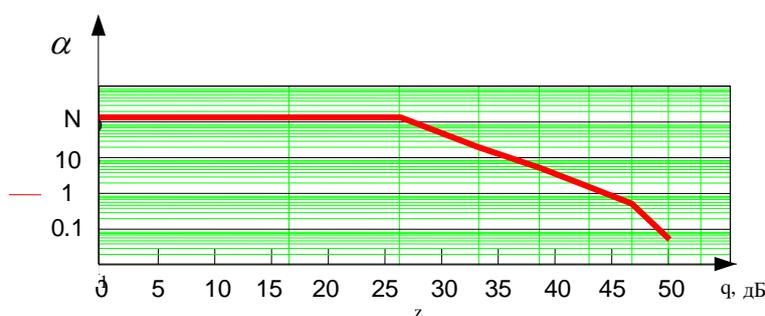


Рис. 6. Зависимость значения регуляризирующего множителя от отношения сигнал-шум  $q$ .

На данном этапе исследования предлагается принять за критерий качества импульсной характеристики канала абсолютное усредненное отклонение (АУО) оценки импульсной характеристики определяемое согласно выражению:

$$S_{\text{АУО}} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (|\hat{x}_i| - |x_{0i}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

где  $\hat{x}_i$  – нормированный отсчет оценки импульсной характеристики канала;  $x_{0i}$  – нормированный отсчет истинной импульсной характеристики.

При моделировании процессов обработки сигналов рассматриваемыми методами были использованы следующие ограничения и условия:

количество сигналов  $K$ , поступивших в точку приема, известно, что позволяет за оценку импульсной характеристики канала принять  $K$  последовательно расположенных максимальных амплитудных составляющих;

сигналы, поступающие в точку приема, сдвинуты друг относительно друга в пределах половины длительности  $y_{1,i}$  для искусственного создания условий их не разрешения на выходе согласованного фильтра;

СКО шума  $\sigma_{\text{ш}}^2$  задается таким, чтобы в пике отклика согласованного фильтра обеспечивалось требуемое отношение сигнал-шум. Отношение сигнал-шум при этом определяется согласно выражению  $q^2 = E^2 R / \sigma_{\text{ш}}^2$ , где  $E$  – амплитуда сигнала;  $R$  – его длительность;  $\sigma_{\text{ш}}$  – СКО шума в дискретных отсчетах квадратурного канала обработки (данное выражение справедливо только для искусственно созданных условий не разрешения принимаемых сигналов на выходе согласованного фильтра);

амплитудные и фазовые составляющие характеристики канала стационарны, из помеховых воздействий присутствует только шум, распределенный по нормальному закону;

для метода сингулярного дополнения матрицы опорных сигналов коэффициент  $\alpha$  принимает значение  $\alpha = 100$ ;

АУО оценок импульсной характеристики усреднялись по 1000 реализациям для различных отношений сигнал-шум  $q$ .

Результаты моделирования в виде зависимости АУО оценок импульсной характеристики от отношения сигнал-шум приведены на рис. 7.

Результаты моделирования позволяют формулировать следующие выводы:

наименее устойчив к воздействию шума метод инверсной фильтрации, так как он лишен какого-либо стабилизатора устойчивости;

оптимальный метод линейной фильтрации Винера более устойчив к воздействию шума, чем метод инверсной фильтрации, что объясняется корреляцией стабилизатора метода с отношением сигнал-шум, однако метод

Винера имеет существенную зависимость от количества сигналов и их взаимного расположения, что объясняется отсутствием учета в стабилизаторе структуры ожидаемого сигнала;

предложенный метод повышения устойчивости оценок импульсной характеристики линейной системы на основе сингулярного дополнения матрицы опорных сигналов сочетает в себе достоинства метода инверсной фильтрации и метода Винера, лишен характерных для них недостатков, и превосходит оба метода по качеству результата обработки. Последнее объясняется особенностью использованного в методе стабилизатора.

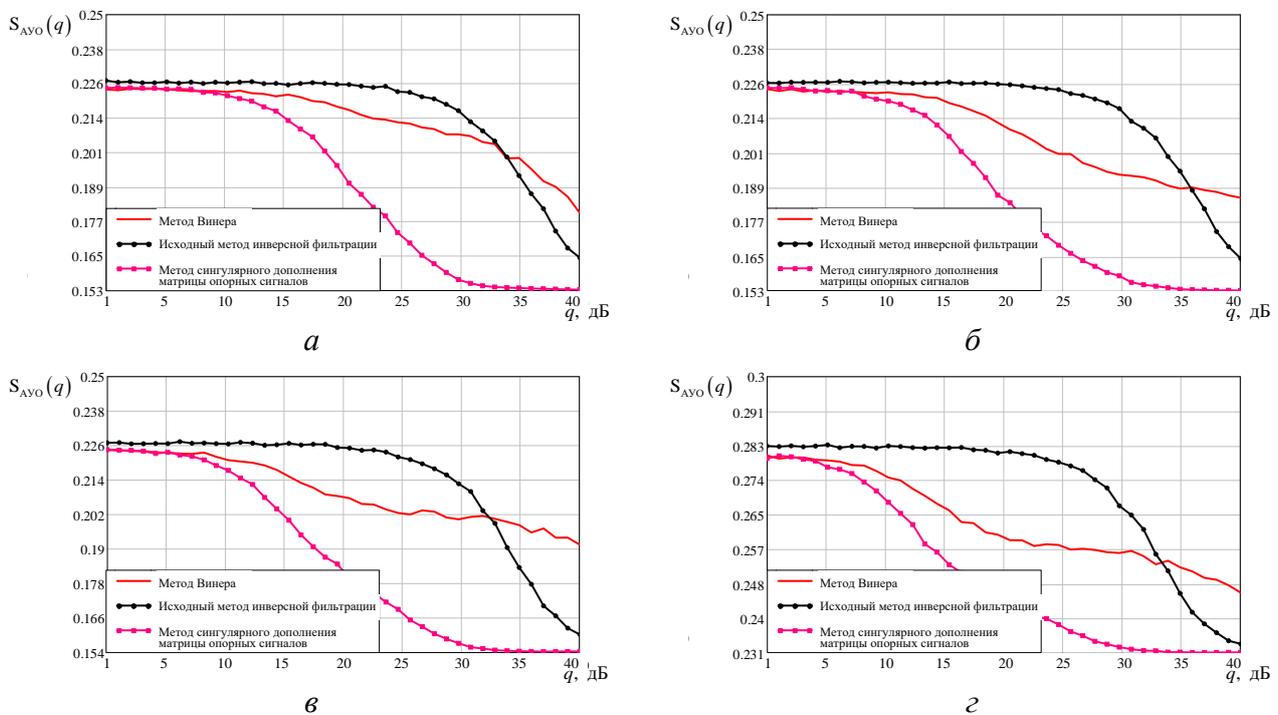


Рис.7 – Зависимость АУО оценок импульсной характеристики и ее истинного значения от отношения сигнал-шум в условиях формирования принятой реализации:  
*а* – двумя сигналами, рассогласованными по задержке на 0,1 Релеевского интервала;  
*б* – двумя сигналами, рассогласованными по задержке на 0,5 Релеевского интервала;  
*в* – тремя сигналами, рассогласованными по задержке на 0,1 Релеевского интервала;  
*г* – четырьмя сигналами, рассогласованными по задержке на 0,2 Релеевского интервала.

Моделирование подтвердило работоспособность предложенного метода оценки импульсной характеристики линейной системы на основе сингулярного дополнения матрицы опорных сигналов при отношении сигнал-шум от 20-25 дБ. Повысить эффективность предложенного метода можно за счет разработки методики выбора оптимального значения регуляризирующего множителя  $\alpha$ , зависящего от условий наблюдения.

Несмотря на то, что в настоящем исследовании (для упрощения процедуры пороговой обработки) число источников переотражения в импульсной характеристике канала считается известным, это требование для реализации метода не является необходимым. Решение о числе источников и их положении может быть оценено согласно расширенному критерию Немана-Пирсона [11] или на основе байесовского подхода.

Таким образом, предложенный метод может быть применен для повышения достоверности извлечения информации из принимаемого сигнала в радиоэлектронных системах, имеющих канал распространения сигнала в некотором пространстве (например, в системах передачи данных, радиолокационных системах, системах обработки изображений).

### Литература

1. Панов Д.В., Чижов А.А., Абраменков В.В., Климов С.А., Печенев Е.А. Сравнительная оценка эффективности использования методов решения обратной задачи рассеяния в интересах разрешения отдельных объектов из состава группового сосредоточенного. М.: Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2016. № 4. С.5–16.
2. Фалькович С.Е., Пономарев В.И., Шкварко Ю.В. Оптимальный прием пространственно-временных сигналов в радиоканалах с рассеянием / Под ред. С.Е. Фальковича. М.: Радио и связь, 1989. 296 с.
3. Василенко Г.И. Теория восстановления сигналов. М.: Сов. Радио. 1979. 272 с.

4. Абраменков В.В., Абраменков А.В., Семченков С.М. Особенности инверсной фильтрации импульсных сигналов / Сб. науч. ст. по материалам II Всероссийской науч.-практ. конф. «Академические Жуковские чтения». – Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2015. С.5–13.
5. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. Главная редакция Физико-математической литературы; Издание 4-е, 1977.
6. Хафизов Р.Г. Обеспечение разрешенного образа при инверсной фильтрации сигналов в условиях неопределенности // Цифровая Обработка Сигналов № 1/2020. стр. 53 – 56.
7. Оппенгейм Э. Применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1980. 550 с.
8. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / Под ред. Я.А. Фурмана. – М.: Физматлит, 2002.
9. William H. Press Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery. 2.6 Singular Value Decomposition // Numerical Recipes in C. – 2nd edition. – Cambridge: Cambridge University Press. — ISBN 0-521-43108-5.
10. Gentle J. E. Singular Value Factorization. §3.2.7 in Numerical Linear Algebra for Applications in Statistics. Berlin: Springer-Verlag. 1998. P.102–103.
11. Чижов А.А. Сверхрэлеевское разрешение. Т. 1: Классический взгляд на проблему / А. А. Чижов. – М. : КРАСАНД, 2010 96 с.

**Для цитирования:**

Абраменков В.В., Митрофанов Д.Г., Жбанов И.Л., Семченков С.М. Метод повышения устойчивости оценок импульсной характеристики линейной системы на основе сингулярного дополнения матрицы опорных сигналов. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2020. №9. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.9.6>