

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.9.1>

УДК: 537.874; 537.624

## **НЕЛИНЕЙНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ГИПЕРЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В ФЕРРИТОВОЙ ПЛАСТИНЕ В УСЛОВИЯХ КОМБИНИРОВАННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ДВУХ ЧАСТОТАХ. ЧАСТЬ 1. РЕЗОНАНС НА РАЗНОСТНОЙ ЧАСТОТЕ**

**В. С. Власов<sup>1</sup>, Д. А. Плешев<sup>1</sup>, В. Г. Шавров<sup>2</sup>, В. И. Щеглов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Сыктывкарский государственный университет им. П. Сорокина,  
167001, Сыктывкар, Октябрьский пр-т, 55

<sup>2</sup> Институт радиотехники и электроники им В.А.Котельникова РАН,  
125009, Москва, ул. Моховая, 11-7

Статья поступила в редакцию 24 августа 2021 г.

**Аннотация.** Рассмотрена задача о нелинейном возбуждении гиперзвуковых колебаний в ферритовой пластине в условиях комбинированного воздействия на двух частотах. В качестве предварительной задачи выполнено рассмотрение магнитных колебаний при двухчастотном возбуждении. Показана возможность описания вынужденных линейных колебаний на основе одного неоднородного линейного уравнения второго порядка с произвольным возбуждением. Получено аналитическое решение задачи о возбуждении осциллятора двумя сигналами, частоты которых отстоят вверх и вниз от центральной на одну и ту же частоту. Показана эквивалентность представления магнитных колебаний в линейном режиме и модельных колебаний на основе осциллятора. Установлено, что в общем случае колебания имеют вид биений, частота огибающей которых соответствует разности между частотами возбуждения. Рассмотрена полная постановка задачи о возбуждении нелинейных магнитоупругих колебаний в нормально намагниченной ферритовой пластине при двухчастотном воздействии. Установлено, что в условиях сильной нелинейности при соответствии собственного упругого резонанса пластины разностной частоте, возбуждаются интенсивные упругие колебания. Обнаружено нелинейное

возбуждения интенсивных нерезонансных колебаний, имеющих место вплоть до случая большого упругого затухания. Показано, что нерезонансные колебания обусловлены именно двухчастотным характером возбуждения. Отмечено, что амплитуда нерезонансных колебаний при увеличении толщины пластины также увеличивается. При малом уровне возбуждения закон увеличения является линейным, при среднем – квадратичным, а при большом – снова приближается к линейному с насыщением и нестационарными скачками. Рассмотрен характер возбуждения в условиях резонанса на разностной частоте. Отмечено, что такой резонанс имеет ярко выраженный нелинейный характер, так как возникает только при достаточно высоком уровне возбуждения. Показано, что дальнейший рост амплитуды резонанса по мере увеличения уровня возбуждения происходит по закону, близкому к квадратичному, после чего при достижении возбуждением определенного уровня насыщается и далее остается постоянным. Отмечено определенное рассогласование проявления нелинейности по магнитной и упругой системам, для описания которого предложена эмпирическая квадратичная зависимость. Приведены некоторые замечания, касающиеся дальнейшего развития работы.

**Ключевые слова:** магнитострикционный преобразователь, нелинейные колебания, магнитоупругий резонанс.

**Abstract.** The task about nonlinear excitation of hypersound vibrations in ferrite plate in conditions of combine influence in two frequencies is investigated. As a preliminary task the investigation of only magnetic vibrations by two-frequency excitation is carried out. The possibility of description of forced linear vibrations on the basis of single nonuniform linear second order equation with arbitrary excitation is shown. It is found the analytical solution of task about excitation of oscillator by two signals which frequencies are distinguishes up and down from central frequency on the same frequency interval. It is shown the equivalency of representation of magnetic vibrations in linear regime and model vibrations on the basis of oscillator. It is found that in the general case the vibrations have view as beating which rounding frequency is equal to difference between excitation frequencies. The whole positing of task about excitation

of nonlinear magnetoelastic vibrations in normal magnetized ferrite plate by two-frequency excitation is proposed. It is found that in conditions of large nonlinearity when the own elastic resonance of plate is equal to the difference frequency the powerful elastic vibrations are excited. It is found the nonlinear excitation of powerful non-resonance vibrations which take place also in the case of large elastic dissipation. It is shown that the non-resonance vibrations are determined precisely two-frequency character of excitation. It is found that the amplitude of non-resonance vibrations by increasing of plate thickness also is increased. By the small level of excitation, the low of increasing is linear, by middle – quadratic, by large – again approaches to linear with saturation and non-permanent sudden jumps. The character of excitation in conditions of resonance on difference frequency is investigated. It is shown that this resonance has powerful determined nonlinear character because it arises only by enough large excitation level. It is shown that the further increasing of resonance amplitude by the increasing the excitation level is realized by the low which is near to quadratic. But after this increasing when excitation level reaches determined value the resonance amplitude is saturated and remains constant. It is drawn attention to some discrepancy between the realization on nonlinearity by magnetic and elastic systems. For the description of this discrepancy the empirical quadratic dependence is proposed. In brief is proposed some remarks about further development of work.

**Key words:** magnetostriction transducer, nonlinear vibrations, magnetoelastic resonance.

### **Введение.**

Возбуждение ультразвуковых колебаний с помощью магнитострикционных преобразователей [1] находит широкое применение в гидроакустике, дефектоскопии, обработке материалов и других областях техники [2, 3]. Важнейшей областью применения ультразвука, в первую очередь гиперзвуковых колебаний, является обработка информации в диапазоне СВЧ.

Весьма перспективным материалом для таких преобразователей является железиттриевый гранат (ЖИГ), имеющий рекордно высокую механическую

добротность (до  $9,5 \cdot 10^6$ , что в 6,3 раза больше, чем у кварца  $1,5 \cdot 10^6$ ) [4, стр.295]. Преобразователь, выполненный на нормально намагниченной тонкой пластине (пленке) ЖИГ, работающий в сильно нелинейном режиме, позволяет возбуждать мощные упругие колебания в гиперзвуковом диапазоне частот (до 10 ГГц и более) [5–8]. На основе магнитоупругих волн в ЖИГ выполняются весьма эффективные линии задержки, фазовращатели, преобразователи частоты и другие СВЧ устройства [9–16].

В последнее время особый интерес вызывает ударное возбуждение магнитоупругих волн при воздействии на магнитную среду мощного импульса света от фемтосекундного лазера [17–24].

Широкие возможности обработки информации с помощью магнитострикционных преобразователей на ЖИГ включают в себя различные виды преобразования частоты, в том числе многократное деление [25], умножение [26], детектирование амплитудно- [27–30] и частотно- [31] модулированных сигналов. Некоторые результаты таких исследований частично обобщены в монографии [32].

В подавляющем большинстве цитированных и других работ обработка информации состоит в подаче на преобразователь СВЧ сигнала единственной частоты, в некоторых случаях промодулированного по амплитуде или частоте. В то же время требования обработки информации включают в себя одновременное воздействие нескольких сигналов различных частот. Такое положение имеет место, например, при гетеродинировании [33, стр. 349–351] или при генерации амплитудно-модулированного сигнала с подавленной несущей (балансная модуляция) [33, стр.351-354].

Настоящая работа посвящена исследованию одновременного воздействия на магнитострикционный преобразователь двух сигналов на двух различных частотах. Отдельное внимание уделяется работе преобразователя в сильно нелинейном режиме, сопровождающемся генерацией комбинационных частот и хаотических колебаний.

## 1. Вынужденные колебания намагниченности в среде с диссипацией.

Поскольку основой возбуждения упругих колебаний в магнитоупругой системе является первичное возбуждение колебаний намагниченности, обратимся сначала к более подробному рассмотрению чисто магнитных колебаний при воздействии двухчастотного сигнала. За основу описания динамики намагниченности возьмем традиционное уравнение движения Ландау-Лифшица с релаксационным членом в форме Гильберта:

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\gamma [\vec{M} \times \vec{H}] + \frac{\alpha}{M_0} [\vec{M} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}]. \quad (1)$$

Раскрывая векторные произведения по компонентам, получаем:

$$\dot{M}_x = -\gamma(M_y H_z - M_z H_y) + \frac{\alpha}{M_0} (M_y \dot{M}_z - M_z \dot{M}_y), \quad (2)$$

$$\dot{M}_y = -\gamma(M_z H_x - M_x H_z) + \frac{\alpha}{M_0} (M_z \dot{M}_x - M_x \dot{M}_z), \quad (3)$$

$$\dot{M}_z = -\gamma(M_x H_y - M_y H_x) + \frac{\alpha}{M_0} (M_x \dot{M}_y - M_y \dot{M}_x). \quad (4)$$

Выполним линеаризацию в предположении:

$$\vec{H} = \{h_x; h_y; H_0 + h_z\}, \quad (5)$$

$$\vec{M} = \{m_x; m_y; M_0 + m_z\}, \quad (6)$$

причем:

$$h_x \sim h_y \sim h_z \sim m_x \sim m_y \sim m_z \ll H_0 \sim M_0, \quad (7)$$

где  $H_0$  и  $M_0$  – величины постоянные.

Подставляя (5)-(6) в уравнения движения (2)-(4) и отбрасывая слагаемые порядка  $m_i m_k$ ,  $h_i h_k$ ,  $m_i h_k$ , из (2) и (3) получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными  $m_x$  и  $m_y$ :

$$\dot{m}_x + \gamma H_0 m_y + \alpha \dot{m}_y = \gamma M_0 h_y, \quad (8)$$

$$\dot{m}_y - \gamma H_0 m_x - \alpha \dot{m}_x = -\gamma M_0 h_x. \quad (9)$$

При этом из (4) получаем третье уравнение:

$$\dot{m}_z = 0, \quad (10)$$

которое означает, что  $m_z = const$ , откуда, учитывая, что  $m_z \ll M_0$ , получаем:  $m_z = 0$ , то есть эту переменную можно далее не принимать во внимание.

Предполагая гармоническую зависимость от времени в виде  $\exp(i\omega t)$ , решим систему (8)-(9) классическим методом, для чего положим:

$$m_x = m_x^{(0)} \cdot e^{i\omega t}, \quad (11)$$

$$m_y = m_y^{(0)} \cdot e^{i\omega t}, \quad (12)$$

$$h_x = h_x^{(0)} \cdot e^{i\omega t}, \quad (13)$$

$$h_y = h_y^{(0)} \cdot e^{i\omega t}, \quad (14)$$

где  $m_x^{(0)}, m_y^{(0)}, h_x^{(0)}, h_y^{(0)}$  – постоянные амплитуды.

Подставляя (11)-(14) в (8)-(9) и вводя обозначение:

$$\omega_H = \gamma H_0, \quad (15)$$

после чего разделяя все на общий множитель  $e^{i\omega t}$ , получаем систему уравнений для амплитуд:

$$i\omega m_x^{(0)} + (\omega_H + i\alpha\omega)m_y^{(0)} = \gamma M_0 h_y^{(0)}, \quad (16)$$

$$(\omega_H + i\alpha\omega)m_x^{(0)} - i\omega m_y^{(0)} = \gamma M_0 h_x^{(0)}. \quad (17)$$

Решая эту систему относительно  $m_x^{(0)}$  и  $m_y^{(0)}$ , получаем:

$$m_x^{(0)} = \frac{\gamma M_0 (\omega_H + i\alpha\omega) h_x^{(0)} + i\omega \gamma M_0 h_y^{(0)}}{\omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega\omega_H}, \quad (18)$$

$$m_y^{(0)} = \frac{-i\omega \gamma M_0 h_x^{(0)} + \gamma M_0 (\omega_H + i\alpha\omega) h_y^{(0)}}{\omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega\omega_H}. \quad (19)$$

Для получения полного решения следует (18)-(19) подставить в (11)-(12), в результате чего получаем:

$$m_x = \frac{\gamma M_0 (\omega_H + i\alpha\omega) h_x^{(0)} + i\omega \gamma M_0 h_y^{(0)}}{\omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega\omega_H} \cdot e^{i\omega t}, \quad (20)$$

$$m_y = \frac{-i\omega \gamma M_0 h_x^{(0)} + \gamma M_0 (\omega_H + i\alpha\omega) h_y^{(0)}}{\omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega\omega_H} \cdot e^{i\omega t}, \quad (21)$$

## 2. Приведение к одному уравнению второго порядка

Рассмотрим теперь возможность сведения системы из двух уравнений первого порядка (8)-(9) к одному уравнению второго порядка. Итак, система (8)-(9) имеет вид:

$$\dot{m}_x + \gamma H_0 m_y + \alpha \dot{m}_y = \gamma M_0 h_y, \quad (22)$$

$$\dot{m}_y - \gamma H_0 m_x - \alpha \dot{m}_x = -\gamma M_0 h_x. \quad (23)$$

Выполним следующие действия:

1) дифференцируем уравнение (22) по  $t$ :

$$\ddot{m}_x + \gamma H_0 \dot{m}_y + \alpha \ddot{m}_y = \gamma M_0 \dot{h}_y, \quad (24)$$

2) дифференцируем уравнение (23) по  $t$ :

$$\ddot{m}_y - \gamma H_0 \dot{m}_x - \alpha \ddot{m}_x = -\gamma M_0 \dot{h}_x, \quad (25)$$

3) из уравнения (23) выражаем  $\dot{m}_y$ :

$$\dot{m}_y = \gamma H_0 m_x + \alpha \dot{m}_x - \gamma M_0 h_x, \quad (26)$$

4) из уравнения (25) выражаем  $\ddot{m}_y$ :

$$\ddot{m}_y = \gamma H_0 \dot{m}_x + \alpha \ddot{m}_x - \gamma M_0 \dot{h}_x, \quad (27)$$

5) подставляем (26) и (27) в (24):

$$\ddot{m}_x + \gamma H_0 (\gamma H_0 m_x + \alpha \dot{m}_x - \gamma M_0 h_x) + \alpha (\gamma H_0 \dot{m}_x + \alpha \ddot{m}_x - \gamma M_0 \dot{h}_x) = \gamma M_0 \dot{h}_y, \quad (28)$$

6) в (28) раскрываем скобки и приводим подобные члены:

$$(1 + \alpha^2) \ddot{m}_x + 2\gamma H_0 \alpha \dot{m}_x + \gamma^2 H_0^2 m_x = \gamma^2 H_0 M_0 h_x + \gamma M_0 \alpha \dot{h}_x + \gamma M_0 \dot{h}_y \quad (29)$$

Итак, получено уравнение второго порядка относительно  $m_x$ . Положим:

$$m_x = m_x^{(0)} \cdot e^{i\omega t}, \quad (30)$$

$$h_x = h_x^{(0)} \cdot e^{i\omega t}, \quad (31)$$

$$h_y = h_y^{(0)} \cdot e^{i\omega t}. \quad (32)$$

Подставляя (30)-(32) в (29) и разрешая полученное уравнение относительно  $m_x^{(0)}$ , с учетом обозначения (15), получаем:

$$m_x^{(0)} = \frac{\gamma M_0 (\omega_H + i\alpha\omega) h_x^{(0)} + i\omega \gamma M_0 h_y^{(0)}}{\omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega\omega_H}. \quad (33)$$

Подставляя (30)-(32) в (29) и разрешая полученное уравнение относительно  $m_x^{(0)}$ , с учетом обозначения (15), получаем:

$$m_x^{(0)} = \frac{\gamma M_0 (\omega_H + i\alpha\omega) h_x^{(0)} + i\omega \gamma M_0 h_y^{(0)}}{\omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega\omega_H}. \quad (33)$$

Полученное выражение в точности совпадает с (18).

Теперь выполним те же действия относительно уравнения (23):

1) дифференцируем уравнение (23) по  $t$ :

$$\ddot{m}_y - \gamma H_0 \dot{m}_x - \alpha \ddot{m}_x = -\gamma M_0 \dot{h}_x, \quad (34)$$

2) дифференцируем уравнение (22) по  $t$ :

$$\ddot{m}_x + \gamma H_0 \dot{m}_y + \alpha \ddot{m}_y = \gamma M_0 \dot{h}_y, \quad (35)$$

3) из уравнения (22) выражаем  $\dot{m}_x$ :

$$\dot{m}_x = -\gamma H_0 m_y - \alpha \dot{m}_y + \gamma M_0 h_y, \quad (36)$$

4) из уравнения (35) выражаем  $\ddot{m}_x$ :

$$\ddot{m}_x = -\gamma H_0 \dot{m}_y - \alpha \ddot{m}_y + \gamma M_0 \dot{h}_y, \quad (37)$$

5) подставляем (36) и (37) в (23):

$$\ddot{m}_y - \gamma H_0 (-\gamma H_0 m_y - \alpha \dot{m}_y + \gamma M_0 h_y) - \alpha (-\gamma H_0 \dot{m}_y - \alpha \ddot{m}_y + \gamma M_0 \dot{h}_y) = -\gamma M_0 \dot{h}_x, \quad (38)$$

6) в (38) раскрываем скобки и приводим подобные члены:

$$(1 + \alpha^2) \ddot{m}_y + 2\gamma H_0 \alpha \dot{m}_y + \gamma^2 H_0^2 m_y = \gamma^2 H_0 M_0 h_y + \gamma M_0 \alpha \dot{h}_y - \gamma M_0 \dot{h}_x. \quad (39)$$

Подставляя (30)-(32) в (39) и разрешая полученное уравнение относительно  $m_x^{(0)}$ , с учетом обозначения (15), получаем:

$$m_y^{(0)} = \frac{-i\omega\gamma M_0 h_x^{(0)} + \gamma M_0 (\omega_H + i\alpha\omega) h_y^{(0)}}{\omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega\omega_H}. \quad (40)$$

Полученное выражение в точности совпадает с (19).

### 3. Приведение уравнения для намагниченности к уравнению для осциллятора.

Полученные уравнения (29) и (39) можно свести к классическому уравнению колебаний для гармонического осциллятора с одной степенью свободы. В качестве примера рассмотрим уравнение для  $m_x$  (29), имеющее вид:

$$(1 + \alpha^2) \ddot{m}_x + 2\gamma H_0 \alpha \dot{m}_x + \gamma^2 H_0^2 m_x = \gamma^2 H_0 M_0 h_x + \gamma M_0 \alpha \dot{h}_x + \gamma M_0 \dot{h}_y. \quad (41)$$

Положим  $h_y = 0$  и учтем, что при реальных параметрах ( $\gamma = 1,76 \cdot 10^7 \text{ Э}^{-1} \text{ с}^{-1}$ ,  $H_0 = 3000 \text{ Э}$ ,  $M_0 = 140 \text{ Гс}$ ,  $\alpha = 0,02$ ) коэффициент в правой части при  $\dot{h}_x$  меньше коэффициента при  $h_x$  на 7 порядков, а также  $\alpha^2$  меньше 1 на 4 порядка. При таких условиях уравнение (41) принимает вид:

$$\ddot{m}_x + 2\gamma H_0 \alpha \dot{m}_x + \gamma^2 H_0^2 m_x = \gamma^2 H_0 M_0 h_x. \quad (42)$$

Уравнение для гармонического осциллятора имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F(t). \quad (43)$$

Можно видеть, что при заменах:

$$m_x \rightarrow x, \gamma H_0 \alpha \rightarrow \beta, \gamma H_0 \rightarrow \omega_0, \gamma^2 H_0 M_0 h_x \rightarrow F(t), \quad (44)$$

уравнение (42) полностью переходит в (43).

#### 4. Неоднородное уравнение колебаний с затуханием.

Будем считать, что колебания намагниченности под действием переменного поля с произвольной зависимостью от времени в принятом линейном приближении можно представить с помощью модели неоднородного уравнения колебаний с затуханием вида (43).

Рассмотрим решение этого уравнения методом вариации постоянных [34, стр.191-194], [35, стр.116-119]. С методической стороны сначала удобнее рассмотреть случай произвольной неоднородности, после чего обратимся к двухчастотной гармонической, как частному случаю общей.

#### 5. Произвольная неоднородность.

Пусть исходное уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F, \quad (45)$$

где  $F$  – произвольная функция времени.

Этому неоднородному уравнению соответствует следующее однородное:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (46)$$

Будем искать решение уравнения (46) в виде:  $x = e^{\lambda t}$ , (47)

Подставляя (47) в (46) и сокращая на  $e^{\lambda t}$ , получаем уравнение для определения  $\lambda$ :  $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$ . (48)

Это уравнение имеет два решения:

$$\lambda_1 = -\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (49)$$

$$\lambda_2 = -\beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (50)$$

Таким образом, решение однородного уравнения (46) имеет вид:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (51)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определяются формулами (49) и (50).

Предположим теперь, что решение исходного уравнения (45) имеет такой же вид (51), однако параметры  $C_1$  и  $C_2$  являются не постоянными, а функциями, зависящими от  $t$ . Дифференцируя (51) по  $t$  в этом предположении, получаем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dC_1}{dt} e^{\lambda_1 t} + \frac{dC_2}{dt} e^{\lambda_2 t} + \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (52)$$

Предположим, выполнение следующего равенства:

$$\frac{dC_1}{dt} e^{\lambda_1 t} + \frac{dC_2}{dt} e^{\lambda_2 t} = 0. \quad (53)$$

При этом производная (52) принимает вид:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (54)$$

Продифференцируем (54) по  $t$  еще раз:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \lambda_1 \frac{dC_1}{dt} e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \frac{dC_2}{dt} e^{\lambda_2 t} + \lambda_1^2 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (55)$$

Подставим (55) и (54) в уравнение (45):

$$\lambda_1 \frac{dC_1}{dt} e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \frac{dC_2}{dt} e^{\lambda_2 t} + \lambda_1^2 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 C_2 e^{\lambda_2 t} + 2\beta \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + 2\beta \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t} + \omega_0^2 C_1 e^{\lambda_1 t} + \omega_0^2 C_2 e^{\lambda_2 t} = F. \quad (56)$$

Приводя подобные члены, получаем:

$$\lambda_1 \frac{dC_1}{dt} e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \frac{dC_2}{dt} e^{\lambda_2 t} + C_1 e^{\lambda_1 t} (\lambda^2 + 2\beta \lambda + \omega_0^2) + C_2 e^{\lambda_2 t} (\lambda^2 + 2\beta \lambda + \omega_0^2) = F, \quad (57)$$

Учитывая, что в соответствии с (48) выражения в скобках равны нулю, получаем:

$$\frac{dC_1}{dt} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{dC_2}{dt} \lambda_2 e^{\lambda_2 t} = F. \quad (58)$$

Это уравнение в сочетании с (53) образует систему из двух уравнений для определения двух неизвестных  $dC_1/dt$  и  $dC_2/dt$ :

$$\frac{dC_1}{dt} e^{\lambda_1 t} + \frac{dC_2}{dt} e^{\lambda_2 t} = 0, \quad (59)$$

$$\frac{dC_1}{dt} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{dC_2}{dt} \lambda_2 e^{\lambda_2 t} = F. \quad (60)$$

Детерминант этой системы имеет вид:

$$D_0 = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2) t}. \quad (61)$$

Подставляя  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в соответствии с (49) и (50), получаем:

$$D_0 = -2i \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot e^{-2\beta t}. \quad (62)$$

При этом:

$$\frac{1}{D_0} = \frac{i}{2\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} e^{2\beta t}. \quad (63)$$

Соответственно искомые неизвестные равны:

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{1}{D_0} \begin{vmatrix} 0 & e^{\lambda_2 t} \\ F & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = -\frac{1}{D_0} F e^{\lambda_2 t} = -\frac{i}{2\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} F e^{(\beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}) t}, \quad (64)$$

$$\frac{dC_2}{dt} = \frac{1}{D_0} \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & F \end{vmatrix} = \frac{1}{D_0} F e^{\lambda_1 t} = \frac{i}{2\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} F e^{(\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}) t}. \quad (65)$$

Параметры  $C_1$  и  $C_2$  находим путем интегрирования:

$$C_1 = -\frac{i}{2\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \int F e^{(\beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}) t} dt + B_1, \quad (66)$$

$$C_2 = \frac{i}{2\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \int F e^{(\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}) t} dt + B_2, \quad (67)$$

где  $B_1$  и  $B_2$  – постоянные интегрирования, а интегралы берутся без произвольных постоянных. Подставляя (66) и (67) в (51), с учетом (49) и (50), получаем решение исходного уравнения (45) в виде:

$$\begin{aligned}
 x = & -\frac{i}{2\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} e^{\left(-\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\right)t} \int F e^{\left(\beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\right)t} dt + \\
 & + \frac{i}{2\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} e^{\left(-\beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\right)t} \int F e^{\left(\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\right)t} dt + \\
 & + B_1 e^{\left(-\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\right)t} + B_2 e^{\left(-\beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\right)t}. \quad (68)
 \end{aligned}$$

## 6. Стационарный режим.

Рассмотрим полученное решение (68) более подробно, для чего сначала приведем основные формулы в единой последовательности.

Итак, уравнение для гармонического осциллятора имеет вид (43):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F(t). \quad (69)$$

Решение имеет вид (51):

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (70)$$

где, согласно (49), (50):

$$\lambda_1 = -\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (71)$$

$$\lambda_2 = -\beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (72)$$

При этом, согласно (66), (67):

$$C_1 = -\frac{i}{2\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \int F e^{\left(\beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\right)t} dt + B_1, \quad (73)$$

$$C_2 = \frac{i}{2\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \int F e^{\left(\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\right)t} dt + B_2, \quad (74)$$

где  $B_1$  и  $B_2$  – постоянные интегрирования, а интегралы берутся без произвольных постоянных. Введем обозначения:

$$I_1 = \int F e^{\left(\beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\right)t} dt, \quad (75)$$

$$I_2 = \int F e^{\left(\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\right)t} dt. \quad (76)$$

С учетом (71) и (72), получаем:

$$I_1 = \int F e^{-\lambda_1 t} dt, \quad (77)$$

$$I_2 = \int F e^{-\lambda_2 t} dt. \quad (78)$$

Введем обозначение:

$$g = \frac{i}{2\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (79)$$

Подставляя (75)-(79) в (73)-(74), получаем:

$$\tilde{N}_1 = -g I_1 + B_1, \quad (80)$$

$$\tilde{N}_2 = g I_2 + B_2, \quad (81)$$

Подставляя эти выражения в (70) и раскрывая скобки, получаем полное решение:

$$x = -g I_1 e^{\lambda_1 t} + g I_2 e^{\lambda_2 t} + B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (82)$$

Это выражение с точностью до обозначений совпадает с (68). Для удобства выявления структуры решения запишем его через интегралы:

$$x = -g e^{\lambda_1 t} \int F e^{-\lambda_1 t} dt + g e^{\lambda_2 t} \int F e^{-\lambda_2 t} dt + B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (83)$$

При увеличении времени  $t$  последние два слагаемые в этом выражении, благодаря коэффициенту  $e^{-\beta t}$ , затухают, однако первые два слагаемых не затухают, а сохраняют амплитуду, определяемую функцией  $F(t)$ , так как они содержат перед интегралом такую же экспоненту, как под интегралом, но с противоположным знаком, так что затухание взаимно компенсируется. Такое поведение этих слагаемых соответствует установлению стационарного режима.

Далее ограничимся случаем стационарных колебаний, то есть будем рассматривать колебания осциллятора в виде:

$$x_{\tilde{n}} = -g e^{\lambda_1 t} \int e^{-\lambda_1 t} F(t) dt + g e^{\lambda_2 t} \int e^{-\lambda_2 t} F(t) dt, \quad (84)$$

где  $g$  определяется формулой (79),  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – формулами (71) и (72) (или (49) и (50)) соответственно, а  $F(t)$  – произвольная функция времени.

Введем вспомогательные обозначения:

$$I_1 = \int e^{-\lambda_1 t} F(t) dt, \quad (85)$$

$$I_2 = \int e^{-\lambda_2 t} F(t) dt. \quad (86)$$

С этими обозначениями (84) принимает особенно простой вид:

$$x_{\tilde{n}} = -g e^{\lambda_1 t} I_1 + g e^{\lambda_2 t} I_2. \quad (87)$$

Оба выражения (85) и (86) имеют одинаковую структуру, для которой введем

единое обозначение:  $I = \int e^{-\lambda t} F(t) dt. \quad (88)$

## 7. Двухчастотное возбуждение.

Рассмотрим возбуждение осциллятора комбинированным сигналом, состоящим из двух сигналов разных частот  $\omega_a$  и  $\omega_b$  с амплитудами  $A$  и  $B$ :

$$F(t) = A \sin(\omega_a t) + B \sin(\omega_b t). \quad (89)$$

Подставляя это выражение в (88), получаем:

$$I = A \int e^{-\lambda t} \sin(\omega_a t) dt + B \int e^{-\lambda t} \sin(\omega_b t) dt. \quad (90)$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$I_a = \int e^{-\lambda t} \sin(\omega_a t) dt, \quad (91)$$

$$I_b = \int e^{-\lambda t} \sin(\omega_b t) dt, \quad (92)$$

С этими обозначениями (90) принимает вид:

$$I = A I_a + B I_b. \quad (93)$$

Выражения (91) и (92) имеют одинаковую структуру, которую можно записать в обобщенном виде:

$$I_{a,b} = \int e^{-\lambda t} \sin(\omega_{a,b} t) dt, \quad (94)$$

Согласно [36, стр.118, форм.577.1]:

$$\int e^{ax} \sin(nx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + n^2} \cdot \{a \sin(nx) - n \cos(nx)\}. \quad (95)$$

С помощью этой формулы получаем:

$$I_{a,b} = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2 + \omega_{a,b}^2} \{-\lambda \sin(\omega_{a,b} t) - \omega_{a,b} \cos(\omega_{a,b} t)\}. \quad (96)$$

Подставляя (96) в (93), а также раскрывая обобщение формул (85) и (86) в виде (90) и поставляя все в (87), получаем стационарную часть решения (87) в виде:

$$\begin{aligned} x_c = & A g \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \omega_a^2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 + \omega_a^2} \right) \sin(\omega_a t) + \\ & + A g \omega_a \left( \frac{1}{\lambda_1^2 + \omega_a^2} - \frac{1}{\lambda_2^2 + \omega_a^2} \right) \cos(\omega_a t) + \\ & + B g \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \omega_b^2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 + \omega_b^2} \right) \sin(\omega_b t) + \\ & + B g \omega_b \left( \frac{1}{\lambda_1^2 + \omega_b^2} - \frac{1}{\lambda_2^2 + \omega_b^2} \right) \cos(\omega_b t). \quad (97) \end{aligned}$$

В этом выражении параметры  $\lambda_{1,2}$  определяются формулами (71), (72), а параметр  $g$  – формулой (79), где  $\omega_0$  и  $\beta$  являются параметрами уравнения (69).

## 8. Малое затухание.

Выражение (97) является достаточно общим, то есть отражает стационарный режим колебаний при двухчастотном возбуждении в случае любого уровня затухания. Для дальнейшего рассмотрения наиболее интересен частный случай малого затухания, для перехода к которому положим  $\beta = 0$ . При этом из (71), (72) и (79) получаем:

$$\lambda_1 = i \omega_0, \quad (98)$$

$$\lambda_2 = -i\omega_0, \quad (99)$$

$$g = \frac{i}{2\omega_0}. \quad (100)$$

Подставляя эти выражения в (97), приводим его к виду:

$$x_c = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega_a^2} \sin(\omega_a t) + \frac{B}{\omega_0^2 - \omega_b^2} \sin(\omega_b t). \quad (101)$$

Положим теперь, что частоты  $\omega_a$  и  $\omega_b$  отстоят вверх и вниз от частоты  $\omega_0$  на одинаковые расстояния  $\Delta\omega$ , то есть:

$$\omega_a = \omega_0 + \Delta\omega, \quad (102)$$

$$\omega_b = \omega_0 - \Delta\omega. \quad (103)$$

При  $\Delta\omega \ll \omega_0$  положим:

$$\omega_a^2 \approx \omega_0^2 + 2\omega_0 \Delta\omega, \quad (104)$$

$$\omega_b^2 \approx \omega_0^2 - 2\omega_0 \Delta\omega. \quad (105)$$

Положим также:

$$A = 1, \quad B = 1. \quad (106)$$

Подставляя эти выражения в (101), получаем:

$$x_c = -\frac{1}{\omega_0 \Delta\omega} \cos(\omega_0 t) \sin(\Delta\omega t). \quad (107)$$

При этих же условиях возбуждающая сила (89) имеет вид:

$$F(t) = \sin[(\omega_0 + \Delta\omega)t] + \sin[(\omega_0 - \Delta\omega)t], \quad (108)$$

или, что то же самое [36, стр.71, форм.401.08]:

$$F(t) = 2 \sin(\omega_0 t) \cos(\Delta\omega t). \quad (109)$$

Видно, что оба выражения (107) и (109) содержат колебания на основной частоте  $\omega_0$ , сдвинутые по фазе на 90 градусов ( $\cos(\omega_0 t)$  относительно  $\sin(\omega_0 t)$ ), причем амплитуда этих колебаний промодулирована синусоидами частоты  $\Delta\omega$

, также сдвинутыми друг относительно друга на 90 градусов (то есть исходный  $\cos(\Delta\omega t)$  превращается в  $\sin(\Delta\omega t)$ ).

### 9. Колебания магнитные и модельные.

Обратимся теперь к графической интерпретации рассматриваемых колебаний. Будем считать, что возбуждение колебаний осуществляется двумя сигналами одинаковой амплитуды на двух частотах, отстоящих от основной вверх и вниз на равные расстояния. Основная частота выбрана равной резонансной частоте колебательной системы.

На рис. 1 показано развитие во времени колебаний намагниченности (левый столбец) и смещения модельного осциллятора (правый столбец). Магнитные колебания получены путем численного решения системы уравнений (8)-(9) методом Рунге-Кутты четвертого порядка [37, с.702, 707]. Колебания осциллятора получены путем решения тем же методом модельного уравнения (69). Параметры обоих уравнений приведены в подписи к рисунку.

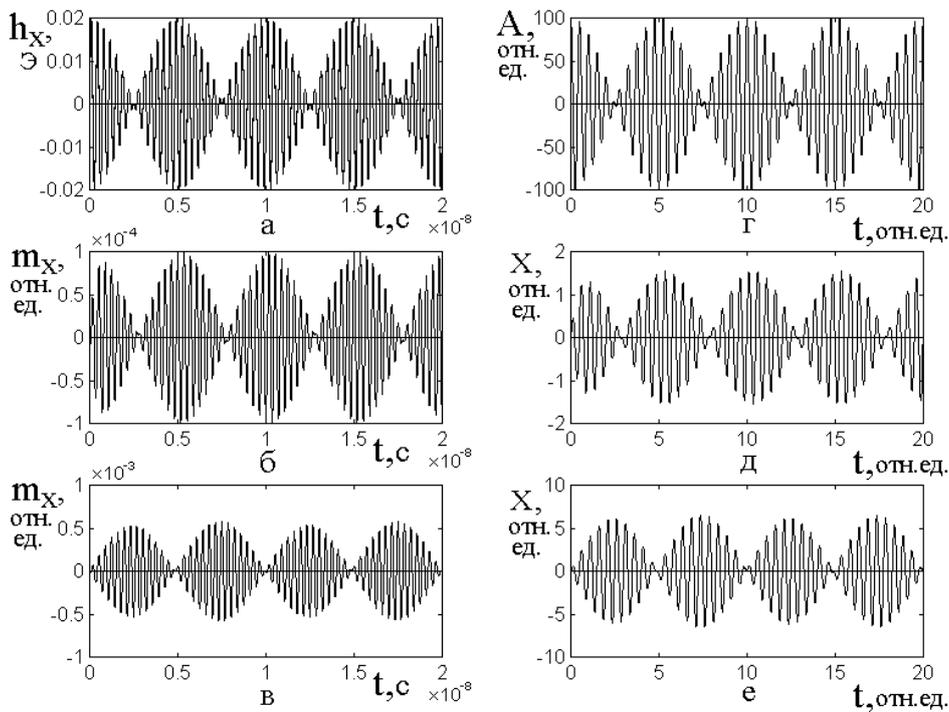


Рис. 1. Колебания намагниченности (левый столбец) и модельного осциллятора (правый столбец). а, г – колебания исходного возбуждения; б, д – колебания при большом затухании; в, е – колебания при малом затухании.

Параметры колебаний намагниченности:

$$F_0 = 2800 \text{ МГц}; \Delta F = 100 \text{ МГц}; H_0 = 2750 \text{ Э}; h_{x,y} = 0,01 \text{ Э}; 4\pi M_0 = 1750$$

Гс; при большом затухании  $\alpha = 0,2$ ; при малом затухании  $\alpha = 0,002$

Параметры колебаний осциллятора:

$$\omega_0 = 12,56 \text{ отн.ед.}; \Delta\omega = 0,63 \text{ отн.ед.}; A = B = 50 \text{ отн.ед.}, \text{ при большом затухании } \beta = 5,0; \text{ при малом затухании } \beta = 0,05.$$

Из сопоставления рисунков левой и правой частей можно видеть, что те и другие колебания с точностью до масштаба полностью подобны друг другу. Колебания при большом затухании (б и д) повторяют колебания возбуждения, как по фазе, так и по амплитуде (с точностью до масштаба) что обусловлено чисто релаксационным характером процесса. Колебания при малом затухании (в и е) имеют особенности, отмеченные выше (раздел 8) при рассмотрении аналитического решения модельного уравнения. То есть составляющая на основной частоте сдвинута по фазе на 90 градусов относительно такой же составляющей возбуждения, а огибающая биений также сдвинута по фазе, относительно огибающей возбуждения также на 90 градусов. Так, на рис. 1а и рис. 1г огибающая соответствует косинусу, а на рис. 1в и рис. 1е огибающая соответствует синусу. То есть максимумы амплитуды на рис. 1в и рис. 1е приходятся как раз на минимумы амплитуды на рис. 1а и рис. 1г.

Таким образом, можно видеть, что модельное представление линейных колебаний намагниченности при двухчастотном возбуждении отражает реальные колебания намагниченности в достаточно высокой степени.

## **10. Геометрия задачи для ферритовой пластины в схеме магнитострикционного преобразователя.**

В предыдущих разделах рассмотрены часто магнитные колебания, обусловленные двухчастотным воздействием. Полученные результаты являются достаточно общими в том отношении, что соответствуют колебаниям линейной системы второго порядка при одновременном воздействии на нее двумя

гармоническими сигналами двух разных частот. Обратимся теперь к рассмотрению более сложного случая системы, представляющей собой совокупность двух связанных колебательных систем, каковой является магнитная пластина, обладающая магнитоупругими свойствами.

Общая геометрия задачи, совпадающая с принятой в [5], показана на рис. 2.

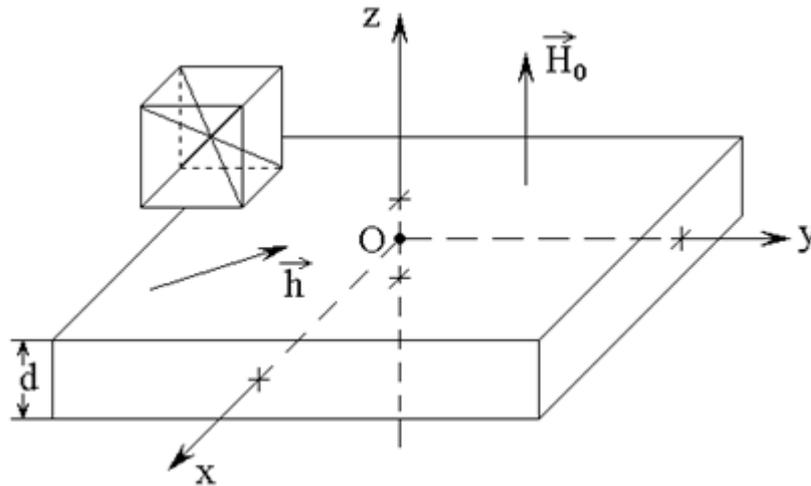


Рис. 2. Геометрия задачи. Слева – схема кристаллографической ячейки.

Плоскопараллельная пластина толщины  $d$ , обладает магнитными, упругими и магнитоупругими свойствами. Материал пластины имеет кубическую кристаллографическую симметрию, плоскость (100) которой совпадает с плоскостью пластины. Внешнее постоянное магнитное поле  $\vec{H}_0$  приложено перпендикулярно плоскости пластины, переменное магнитное поле  $\vec{h}$  параллельно плоскости пластины. Задача решается в декартовой системе координат  $Oxyz$ , плоскость  $Oxy$  которой совпадает с плоскостью пластины, а оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  параллельны ребрам куба кристаллографической ячейки. Центр системы координат  $O$  находится в центре пластины, а ее плоскости соответствуют координатам  $z = \pm d/2$ .

Плотность энергии пластины  $U$  в поле  $\vec{H} = \{h_x; h_y; H_0\}$ , где  $h_{x,y} \ll H_0$ , имеет вид:

$$\begin{aligned}
 U = & -M_0 h_x m_x - M_0 h_y m_y - M_0 H_0 m_z + 2\pi M_0^2 m_z^2 + \\
 & + \frac{1}{2} c_{11} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2) + c_{12} (u_{xx} u_{yy} + u_{yy} u_{zz} + u_{zz} u_{xx}) + \\
 & + 2c_{44} (u_{xy}^2 + u_{yz}^2 + u_{zx}^2) + B_1 (m_x^2 u_{xx} + m_y^2 u_{yy} + m_z^2 u_{zz}) + \\
 & + 2B_2 (m_x m_y u_{xy} + m_y m_z u_{yz} + m_z m_x u_{zx}), \quad (110)
 \end{aligned}$$

где:  $\vec{m} = \vec{M}/M_0$  – нормированный вектор намагниченности,  $M_0$  – намагниченность насыщения;  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{44}$  – константы упругости;  $B_1$ ,  $B_2$  – константы магнитоупругого взаимодействия.

Компоненты тензора деформаций равны:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (111)$$

где  $u_i$  – компоненты упругого смещения при  $i = x, y, z$ ,  $x_i$  – координаты  $x, y, z$ .

Полная система уравнений и граничных условий имеет вид:

Уравнения для компонент намагниченности  $m_{x,y,z}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial m_x}{\partial t} = & - \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot \left[ (m_y + \alpha m_x m_z) \cdot H_z - (m_z - \alpha m_y m_x) \cdot H_y - \right. \\
 & \left. - \alpha \cdot (m_y^2 + m_z^2) \cdot H_x \right], \quad (112)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial m_y}{\partial t} = & - \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot \left[ (m_z + \alpha m_y m_x) \cdot H_x - (m_x - \alpha m_z m_y) \cdot H_z - \right. \\
 & \left. - \alpha \cdot (m_z^2 + m_x^2) \cdot H_y \right], \quad (113)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial t} = - \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \cdot \left[ (m_x + \alpha m_z m_y) \cdot H_y - (m_y - \alpha m_x m_z) \cdot H_x - \right.$$

$$-\alpha \cdot (m_x^2 + m_y^2) \cdot H_z], \quad (114)$$

где  $\gamma$  – гиромангнитная постоянная,  $\alpha$  – параметр магнитного затухания.

Уравнения для компонент упругих смещений  $u_{x,y}$ :

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -2\beta \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{c_{44}}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}, \quad (115)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = -2\beta \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{c_{44}}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}, \quad (116)$$

где  $c_{44}$  – константа (модуль) упругости,  $\rho$  – плотность материала пластины,  $\beta$  – параметр упругого затухания.

Граничные условия:

$$c_{44} \frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{z=\pm d/2} = -B_2 m_x m_z, \quad (117)$$

$$c_{44} \frac{\partial u_y}{\partial z} \Big|_{z=\pm d/2} = -B_2 m_y m_z, \quad (118)$$

где  $B_2$  – константа магнитоупругого взаимодействия.

Входящие в уравнения (112)–(114) эффективные поля  $H_{x,y,z}$  имеют вид:

$$H_x = h_x + H_{ax}, \quad (119)$$

$$H_y = h_y + H_{ay}, \quad (120)$$

$$H_z = H_0 - 4\pi M_0 m_z + H_{az}, \quad (121)$$

где  $H_0$  – внешнее постоянное поле,  $h_{x,y}$  – компоненты внешнего переменного поля, а компоненты полей  $H_{ax, ay, az}$  имеют вид:

$$H_{ax} = -\frac{B_2}{M_0} \left[ m_y \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + m_z \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right], \quad (122)$$

$$H_{ay} = -\frac{B_2}{M_0} \left[ m_z \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + m_x \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right], \quad (123)$$

$$H_{az} = -\frac{B_2}{M_0} \left[ m_x \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + m_y \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right], \quad (124)$$

Будем полагать, что двухчастотное возбуждение осуществляется двумя сигналами, имеющими равные амплитуды и отстоящими по обе стороны от центральной частоты  $F_0$  на равные частотные интервалы  $\Delta F$ .

При этом частоты равны:

$$F_1 = F_0 - \Delta F, \quad (125)$$

$$F_2 = F_0 + \Delta F, \quad (126)$$

а компоненты переменного поля в случае круговой поляризации соответственно принимают вид:

$$h_x = h_0 \cdot \{ \sin [2\pi(F_0 - \Delta F)t] + \sin [2\pi(F_0 + \Delta F)t] \}, \quad (127)$$

$$h_y = -h_0 \cdot \{ \cos [2\pi(F_0 - \Delta F)t] + \cos [2\pi(F_0 + \Delta F)t] \}. \quad (128)$$

**Замечание.** Компоненты переменного поля  $h_x$  и  $h_y$  выбраны довольно специфическими, так что поле имеет чистую круговую поляризацию с правым вращением. Частоты  $F_1$  и  $F_2$  также отстоят от центральной  $F_0$  на равные расстояния. Этот выбор обусловлен требованием максимальной простоты постановки задачи, так как даже в такой постановке она имеет ряд нетривиальных проявлений, особенно в нелинейном режиме. Авторы полагают, что более общие случаи эллиптической (или линейной) поляризации с неравными амплитудами сигналов представляют интерес для отдельной работы.

## 11. Основные параметры задачи для схемы магнитострикционного преобразователя.

Система уравнений (112)–(128) решалась численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка [37, с.702, 707] по методике, приведенной в [5]. Результатами

расчета являлись развертки магнитных и упругих колебаний по времени, а также зависимости амплитуд колебаний в стационарном режиме от толщины пластины.

При расчете использовались параметры материала, типичные для монокристалла ЖИГ:  $4\pi M_0 = 1750$  Гс,  $B_2 = 6.96 \cdot 10^6$  эрг см<sup>-3</sup>,  $c_{44} = 7.64 \cdot 10^{11}$  эрг см<sup>-3</sup>,  $\rho = 5,17$  г см<sup>-3</sup>.

Постоянное поле  $H_0$  составляло 2750 Э. Амплитуда переменного поля  $h_0$  в линейном режиме варьировалась от 0,01 до 1 Э, в нелинейном – от 1 до 1000 Э. Частота ферромагнитного резонанса (ФМР) в линейном режиме при  $\gamma = 2,8$  МГц Э<sup>-1</sup> равнялась 2800 МГц.

Центральная частота выбиралась равной частоте ФМР, то есть  $F_0 = 2800$  МГц. Отклонение от центральной частоты  $\Delta F$  составляло 100 МГц. Разностная частота  $F_2 - F_1$  равнялась 200 МГц.

Толщина магнитной пластины  $d$ , соответствующая упругому резонансу для поперечных упругих волн частоты 2800 МГц равнялась 0,6865 мкм. Резонансная толщина на разностной частоте 200 МГц равнялась 9,611 мкм. В общем случае толщина варьировалась от 0,1 до 15 мкм.

Параметр магнитного затухания  $\alpha$  варьировался от 0,002 до 0,2, параметр упругого затухания  $\beta$  варьировался от  $10^7$  до  $10^9$  с<sup>-1</sup>.

При расчете разверток колебаний шаг по времени составлял  $10^{-11}$  с, а полное время расчета равнялось  $10^{-8}$  с. При расчете зависимостей амплитуд от толщины пластины шаг по толщине составлял  $0,05 \cdot 10^{-4}$  см. Для исключения влияния процессов релаксационного типа время расчета задавалось равным  $5 \cdot 10^{-7}$  с, а амплитуда измерялась в промежутке времени от  $4,75 \cdot 10^{-7}$  до  $5,00 \cdot 10^{-7}$  с, то есть, когда начальные процессы установления уже заканчивались.

Остальные параметры, а также возможные отклонения от перечисленных, приводятся далее по тексту. Результаты расчета с использованием приведенных параметров изложены далее.

**Замечание.** Приведенная выше методика определения амплитуды была полностью успешной только в режиме стационарных упругих колебаний, имевшем место при уровне возбуждения  $h_0$  не выше 100 Э. При превышении этого уровня на 10–20 Э и более упругие колебания приобретали неустойчивый скачкообразный характер, который вносил в измерения значительную ошибку (до 20% и более). Некоторые из таких особенностей отмечены далее (кривая 7 на рис. 6 в разделе 15).

## 12. Колебания магнитные и упругие.

Рассмотрим теперь, как ведут себя магнитные и упругие колебания при различных уровнях возбуждения и различной толщине пластины. Соответствующие развертки колебаний по времени показаны на рис. 3.

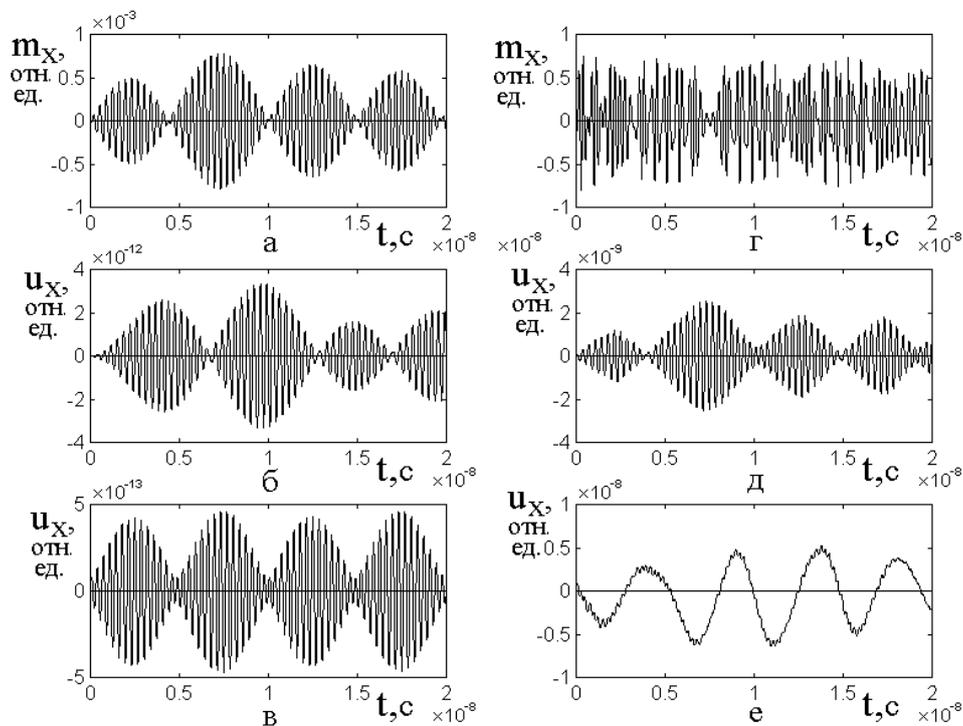


Рис. 3. Колебания намагнитченности (а, г) и упругого смещения (б, д, в, е) в линейном (левый столбец –  $h_0 = 0,01$  Э) и нелинейном (правый столбец –  $h_0 = 100$  Э) режимах при различной толщине пластины: б, д –  $d = 0,6865$  мкм; в, е –  $d = 9,6110$  мкм. Параметры затухания:  $\alpha = 0,02$ ;  $\beta = 10^8$  с $^{-1}$ .

В левом столбце представлены колебания в линейном режиме. Из сравнения рис. 3а с рис. 3б видно, что огибающая упругих колебаний сдвинута по фазе, относительно огибающей магнитных на 90 градусов, что соответствует большому уровню их затухания из-за значительного удаления резонансной частоты от разностной (в 14 раз). Однако при совпадении резонанса по толщине с разностной частотой, что имеет место для рис. 3в, фаза огибающей упругих колебаний точно совпадает с фазой магнитных.

Обратимся теперь к колебаниям в нелинейном режиме, представленным в правом столбце рис. 3. Здесь уровень возбуждения настолько велик, что магнитные колебания (рис. 3г) теряют гармоническую упорядоченность, приобретая характер хаоса. Однако упругие колебания, благодаря резонансной толщине для центральной частоты, все же сохраняют гармонический характер, образуя картину биений, близкую к таковой в линейном режиме (рис. 3б), но с огибающей, сдвинутой на 90 градусов. При установлении толщины, равной резонансной для разностной частоты (рис. 3е), упругие колебания приобретают ярко выраженный гармонический характер с частотой, равной разностной. Это явление подобно эффекту детектирования, рассмотренному в работах [30-32].

Примечательно отметить, что магнитное возбуждение, относительно которого упругие колебания являются эффектом вторичным, имеет хаотический характер (рис. 3г), тогда как упругие колебания при высоком уровне возбуждения из этого хаоса четко выделяют свою резонансную частоту, соответствующим выбором толщины установленную равной разностной.

### **13. Резонанс на разностной частоте.**

В разделе 12 на рис. 3е показано, что в сильно нелинейном режиме двух-частотное переменное поле приводит к возбуждению интенсивных упругих колебаний на разностной частоте. Рассмотрим такое возбуждение более подробно, для чего обратимся к рис. 4, где показаны зависимости амплитуды упругих колебаний от толщины пластины при различных уровнях упругого

затухания. Рис. 4а соответствует значительному затуханию, а рис. 4б – меньшему.

Из рис.4 можно видеть, что в обоих случаях при толщине  $0,9611 \cdot 10^{-3}$  см (отмеченной вертикальной точечной линией), зависимости (1) имеют подъем резонансного характера. При большом затухании (рис.4а) подъем довольно широкий и плавный, его максимум превышает амплитуду вне резонанса примерно в два раза. При малом затухании (рис.4б) подъем довольно узкий и выражен резко, его максимум превышает амплитуду вне резонанса более чем в 15 раз. То есть характеристики подъема соответствуют обычным свойствам резонансных колебаний.

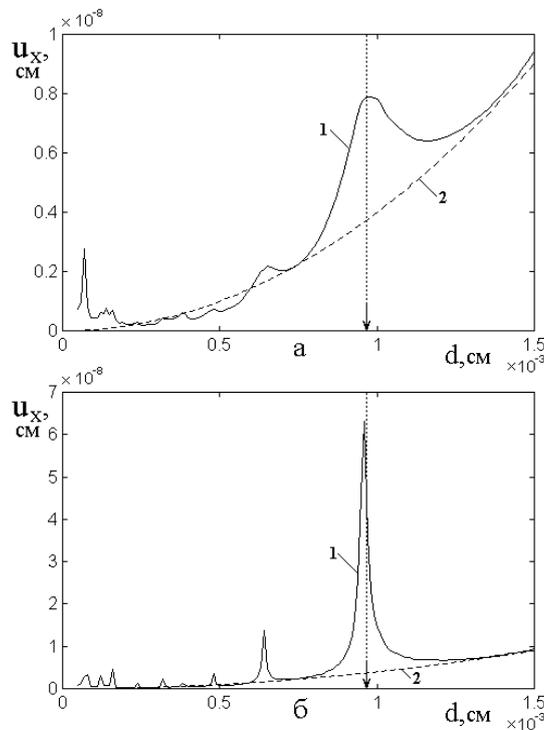


Рис. 4. Зависимости амплитуды упругих колебаний от толщины пластины при различных значениях параметра упругого затухания  $\beta$ : а –  $10^8$  с<sup>-1</sup>; б –  $10^7$  с<sup>-1</sup>. 1 – амплитудно-частотные характеристики; 2 – кривая, построенная по формуле (129). Вертикальная точечная линия построена при толщине  $0,9611 \cdot 10^{-3}$  см (9,6110 мкм), соответствующей упругому резонансу на частоте 200 МГц. Амплитуда переменного поля  $h_0 = 100$  Э.

Резким отличием является рост обеих зависимостей вне резонанса при увеличении толщины по закону, близкому к квадратичному. На обоих рисунках

это свойство зависимостей иллюстрируется пунктирной линией (2), построенной по формуле:

$$u_x = 0,004 \cdot d^2, \quad (129)$$

где  $d$  и  $u_x$  измеряются в см.

Из сравнения рис. 4а с рис. 4б видно, что в обоих случаях основания кривых 1 приходятся на кривую 2, то есть квадратичная зависимость вида (129) от параметра затухания не зависит.

Небольшой дополнительный резонанс на обеих кривых 1 вблизи толщины  $0,06 \cdot 10^{-3}$  см соответствует резонансу на центральной частоте, пик вблизи толщины  $0,7 \cdot 10^{-3}$  см, по-видимому, является побочным проявлением комбинационного характера двухчастотного возбуждения при сильной нелинейности.

#### **14. Нерезонансная составляющая упругого смещения при различном уровне затухания.**

В разделе 13 показано, что в составе упругих колебаний присутствует сильная составляющая, не являющаяся резонансной и имеющая квадратичную зависимость от толщины пластины. Рассмотрим такую составляющую более подробно, для чего обратимся к рис. 5, где показаны зависимости упругого смещения от толщины пластины при различных значениях параметра затухания.

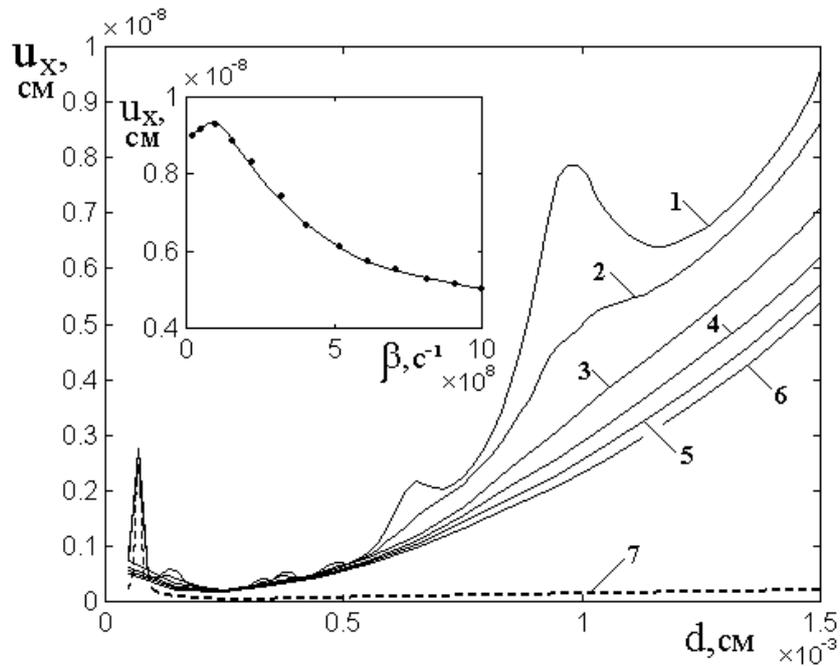


Рис. 5. Зависимости амплитуды упругих колебаний от толщины пластины при различных значениях параметра упругого затухания  $\beta$ : 1 –  $10^8$  с<sup>-1</sup>; 2 –  $2 \cdot 10^8$  с<sup>-1</sup>; 3 –  $4 \cdot 10^8$  с<sup>-1</sup>; 4 –  $6 \cdot 10^8$  с<sup>-1</sup>; 5 –  $8 \cdot 10^8$  с<sup>-1</sup>; 6 –  $10 \cdot 10^8$  с<sup>-1</sup>. Пунктирная кривая 7 соответствует возбуждению на центральной частоте.

На врезке – зависимость амплитуды упругих колебаний при толщине

$$d = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ см от величины параметра затухания } \beta .$$

Остальные параметры – те же, что на рис. 4.

Прежде всего отметим, что резко выраженный общий рост приведенных на рис. 5 зависимостей обусловлен именно двухчастотным возбуждением. Так, при возбуждении на одной центральной частоте зависимость смещения от толщины имеет линейный характер и растет при увеличении толщины значительно медленнее, чем квадратичные зависимости при двухчастотном возбуждении. На рис. 5 зависимость смещения от толщины при возбуждении на одной частоте (2800 МГц) представлена кривой 7, изображенной пунктиром. Небольшой рост кривой по мере увеличения толщины обусловлен линейной составляющей смещения, согласно [5, форм. (37)], имеющей вид:

$$U(z, t) = - \frac{B_2}{c_{44}} m_x m_z \cdot z, \quad (130)$$

где  $m_x$ ,  $m_z$  и через них  $U$  зависят от времени  $t$ .

**Замечание.** Квадратичной зависимости и вообще нерезонансной составляющей задача, решенная в работе [5], не дает, так как там возбуждение представлено только на одной единственной частоте и решение ищется в виде экспоненты с той же частотой. Тем не менее, учет двухчастотного возбуждения в аналитическом решении, по-видимому, вполне возможен. Авторы полагают такую задачу достаточно важной, однако требующей отдельного аналитического рассмотрения, выходящего за рамки настоящей работы. Здесь же авторы далее ограничиваются только численным решением задачи и соответствующим описанием наблюдаемых явлений.

Вернемся теперь к рассмотрению зависимостей при различных уровнях затухания. Из рис. 5 видно, что все они имеют квадратичный характер, причем коэффициент квадратичности тем выше, чем затухание меньше. Выше всех проходит кривая 1, соответствующая наименьшему из исследуемого диапазона значению параметра затухания. Эта кривая совпадает с кривой 1 на рис.4а. Все следующие кривые 2–6 проходят ниже, причем понижение тем сильнее, чем параметр затухания больше.

На кривой 1 хорошо заметен подъем, соответствующий толщине, резонансной для разностной частоты. На кривой 2 такой подъем проявляется значительно меньше, а на кривых 3–6 вообще отсутствует. Такой вид кривых означает, что при параметре затухания выше  $4 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$  (кривая 3) упругие колебания носят релаксационный характер.

На врезке показана зависимость амплитуды упругого смещения от параметра затухания при фиксированной толщине пластины, значительно превышающей резонансную. То есть это точки правых концов кривых на основном рисунке. Видно, что при уменьшении затухания (справа налево по рисунку) амплитуда упругого смещения растет, тем быстрее, чем меньше становится затухание. Однако при достижении параметром затухания величины  $1 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$  амплитуда перестает расти и даже выходит на слегка спадающий участок. Такая остановка роста амплитуды при уменьшении затухания ниже

$1 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$  было также отмечено при рассмотрении рис. 4, где сделан предварительный вывод о независимости амплитуды нерезонансной составляющей от затухания. В самом деле, интервал от  $10^7$  до  $10^8 \text{ с}^{-1}$  приходится как раз на левый загиб вниз кривой на врезке. Таким образом, вывод о независимости амплитуды нерезонансной составляющей от затухания можно считать корректным только в интервале от  $10^7$  до  $10^8 \text{ с}^{-1}$ , а при дальнейшем увеличении затухания эта амплитуда постепенно спадает.

### **15. Нерезонансная составляющая упругого смещения при различном уровне возбуждения.**

В разделе 14 отмечено, что появление нерезонансной составляющей упругих колебаний имеет место только в сильно нелинейном режиме. Обратимся к рис.6, где показаны зависимости нерезонансной составляющей от толщины пластины при различных уровнях возбуждения. Параметр затухания выбран довольно значительным ( $\beta = 10^9 \text{ с}^{-1}$ ), чтобы резонансные явления не проявлялись в заметной степени и не мешали наблюдению нерезонансной составляющей в более чистом виде.

Пунктирная кривая 1 соответствует линейному режиму. Видно, что в этом случае квадратичность не проявляется и зависимость ведет себя линейно, подобно кривой 7 на рис. 5. Кривые 2–4, соответствующие уровню возбуждения от 20 до 70 Э, растут значительно сильнее, чем кривая 1, однако остаются линейными, так что квадратичность также отсутствует. Однако кривая 5, соответствующая  $h_0 = 80 \text{ Э}$  уже проявляет рост, значительно отличающийся от линейного. Кривая состоит из двух частей – до толщины  $1,05 \cdot 10^{-3} \text{ см}$  – почти линейной с незначительным выгибом вверх, и после этого значения толщины – опять линейной, но со значительно большим наклоном относительно горизонтальной оси. Только кривая 6, соответствующая  $h_0 = 100 \text{ Э}$ , проявляет чисто квадратичный характер. Эта кривая подобна кривой 6 на рис. 5.

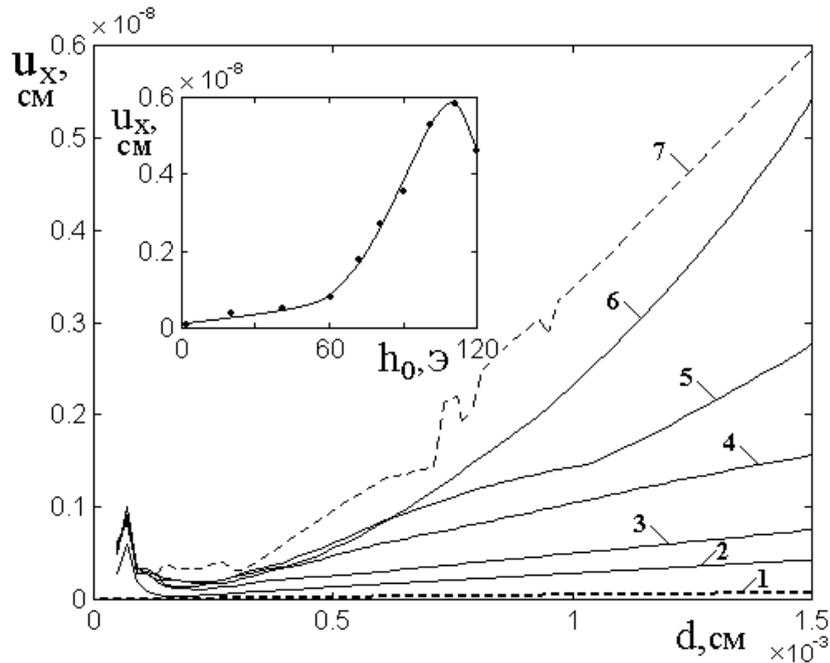


Рис. 6. Зависимости амплитуды упругих колебаний от толщины пластины при различных значениях уровнях возбуждения

$h_0$ : 1 – 1 Э; 2 – 20 Э; 3 – 60 Э; 4 – 70 Э; 5 – 80 Э; 6 – 100 Э; 7 – 110 Э.

Параметр упругого затухания  $\beta = 10^9 \text{ с}^{-1}$ . На врезке – зависимость амплитуды упругих колебаний при толщине  $d = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ см}$  от амплитуды поля возбуждения  $h_0$ . Остальные параметры – те же, что на рис. 4.

При дальнейшем увеличении уровня возбуждения (на рис.6 при  $h_0 = 110$  Э, кривая 7) упругие колебания становятся нестационарными, вместо чистого выделения разностной частоты (рис. 3е) приобретают значительную хаотическую составляющую. В этом случае зависимость амплитуды от толщины, оставаясь возрастающей, теряет плавный характер, переходя к скачкообразному. Некоторые скачки на кривой 7 видны при толщине вблизи  $0,8 \cdot 10^{-3} \text{ см}$ . При этом характер кривой в среднем опять приближается к линейному. Проверка показывает, что при дальнейшем увеличении уровня возбуждения вплоть до 120 Э количество и глубина скачков возрастает (до величин порядка  $0,15 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ ), однако их средняя линия остается близкой к таковой для кривой 7.

На врезке показан характер поведения амплитуды упругих колебаний при фиксированной толщине  $d = 1,5 \cdot 10^{-3}$  см (правый край основного рисунка) при увеличении уровня возбуждения. Видно, что на уровне  $h_0$  порядка 60–70 Э амплитуда резко увеличивается, что говорит о значительном проявлении нелинейности. Однако при возбуждении выше 100 Э рост амплитуды останавливается и далее она слегка спадает. То есть более или менее регулярное возбуждение на разностной частоте срывается, уступая место беспорядочным хаотическим колебаниям.

### 16. Нелинейный характер резонанса на разностной частоте.

Рассмотрим теперь возбуждение упругих колебаний в условиях основного резонанса на разностной частоте. Чтобы резонанс проявлялся достаточно сильно, зададим уровень упругого затухания заведомо малым, в соответствии с рис. 4 равным  $\beta = 10^7$  с<sup>-1</sup>. Обратимся к рис. 7, где показаны резонансные кривые при различных уровнях возбуждения.

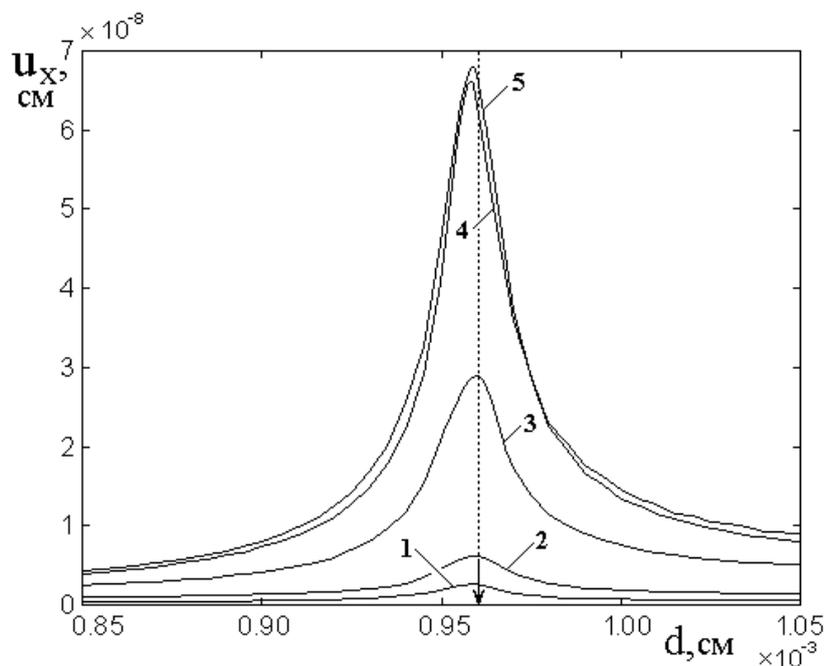


Рис. 7. Зависимости амплитуды упругих колебаний от толщины пластины в области резонанса при различных значениях уровнях возбуждения  $h_0$ : 1 – 60 Э; 2–70 Э; 3–80 Э; 4–90 Э; 5–100 Э. Параметр упругого затухания  $\beta = 10^7$  с<sup>-1</sup>. Остальные параметры – те же, что на рис. 4.

Видно, что в этом случае, в отличие от рис. 5, влияние нерезонансной составляющей почти не проявляется, так как амплитуда резонансного пика здесь превышает амплитуду нерезонансной составляющей более чем на порядок.

Для кривых, приведенных на рисунке, шаг по амплитуде возбуждения  $h_0$  в интервале от 60 до 100 Э сохраняется постоянным, равным 10 Э, однако максимумы кривых по вертикали расставлены крайне неравномерно. Так, кривые 1 и 2, соответствующие  $h_0 = 60$  и 70 Э, между собой близки, однако кривые 3 и 4, соответствующие  $h_0 = 80$  и 90 Э, резко идут вверх, а кривая 5, соответствующая  $h_0 = 100$  Э, практически совпадая с кривой 4, если и превышает ее, то в весьма незначительной степени.

Такой неравномерный рост говорит о том, что возбуждение резонанса на разностной частоте является существенно нелинейным, причем уровень нелинейности, достаточный для возбуждения резонанса, достигается только при  $h_0$  более 70 Э, а при уровне выше 90 Э возбуждение уже насыщается. Можно полагать, что такой характер зависимости амплитуды резонанса от уровня возбуждения обусловлен соответствующим характером уровня амплитуды прецессии намагниченности. Для рассмотрения этого вопроса обратимся к рис. 8, где показаны зависимости от уровня возбуждения амплитуды упругого резонанса на разностной частоте (а) и амплитуды колебаний соответствующей компоненты намагниченности (б).

Рис.8а отражает ту же зависимость амплитуды смещения от уровня возбуждения, что просматривается из рис.7, снятую с более мелким шагом. Видно, что резкий рост амплитуды проявляется при изменении  $h_0$  между 60 и 100 Э.

Рис.8б отражает соответствующую зависимость для нормированной намагниченности. Здесь при малом уровне возбуждения зависимость линейная, а при  $h_0$  порядка 20 Э линейный рост замедляется, при 40 Э переходя к насыщению.

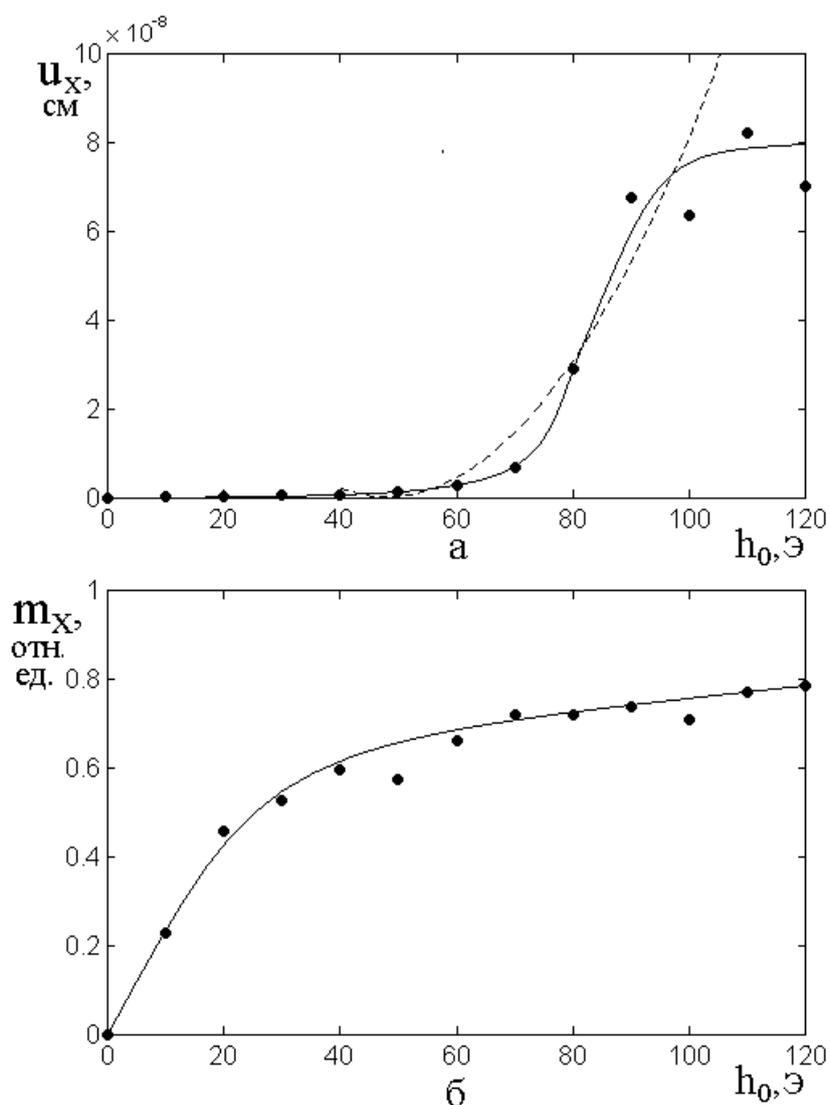


Рис.8. Зависимости амплитуды упругого резонанса на разностной частоте (а) и амплитуды колебаний соответствующей компоненты намагниченности (б) от уровня возбуждения. Все параметры – те же, что на рис. 7.

Из сравнения обеих зависимостей можно видеть, что насыщение обеих кривых проявляется достаточно четко, по крайней мере, в области, где  $h_0$  превышает 100 Э. Таким образом, причиной насыщения амплитуды упругих колебаний можно считать насыщение соответствующих колебаний намагниченности. Однако из рис.8б видно, что насыщение по намагниченности проявляется уже с 40 Э, то есть значительно раньше, чем насыщение по упругости. Более того, резкий рост амплитуды упругих колебаний в области выше 60 Э имеет место тогда, когда намагниченность уже давно находится в режиме насыщения.

Следует отметить, что намагниченность в интервале от 40 до 100 Э находится не на постоянном уровне, а продолжает расти, хотя с малым, но отличным от нуля коэффициентом  $0,0025 \text{ Э}^{-1}$ . При этом можно полагать, что зависимость амплитуды упругих колебаний от уровня возбуждения в этом интервале все же сохраняется, однако возрастает не линейно, а в более высокой степени. То есть от 40 до 50 Э рост амплитуды смещения почти отсутствует, а далее начинает ускоряться тем сильнее, чем возбуждение больше, вплоть до уровня насыщения. Ограничиваясь показателем степени равным двум, зависимость  $u_x$  от  $h_0$  можно приблизить квадратичным полиномом вида:

$$u_x = \{0,0030 \cdot (h_0)^2 - 0,2883 \cdot h_0 + 6,9570\} \cdot 10^{(-8)}. \quad (131)$$

Эта зависимость в интервале  $h_0$  от 40 до 100 Э представлена на рис. 8а пунктирной линией. Видно, что степень приближения составляет около 15%. Ниже этого интервала надо учитывать отсутствие нелинейности намагниченности, а выше – стремление намагниченности к насыщению.

## 17. Некоторые дополнительные замечания.

Проведенное исследование позволило описать некоторые стороны возбуждения упругих колебаний при воздействии двухчастотного переменного поля на пластину, обладающую магнитоупругими свойствами. Однако ряд вопросов остаются не выясненными. Приведем некоторые из них, по мнению авторов, требующие более подробного рассмотрения.

В аналитической части работы (разделы 1–9) выполнено решение уравнения движения для намагниченности при воздействии сигналов двух частот. Однако решение найдено только в линейном режиме без учета магнитоупругости. Выделение упругих колебаний на разностной частоте получено только путем численного решения задачи, которая первоначально ориентировалась на возбуждение на единственной частоте. Здесь желательно найти аналитическое решение для нелинейного режима при воздействии двух

частот, в первую очередь, механизм нелинейного выделения упругих колебаний на разностной частоте.

В разделах 13–15 сообщается об обнаружении нелинейного возбуждения нерезонансных колебаний, могущих иметь значительную амплитуду, в том числе, в случае сильного затухания колебаний упругой системы. В силу необычности наблюдаемого явления, представляет интерес выявление физической природы таких колебаний, а также построение их модели векторного, энергетического или другого характера.

В разделе 16, посвященном исследованию резонанса на разностной частоте, отмечено определенное рассогласование проявления нелинейности по магнитной и упругой системам, для описания которого предложена эмпирическая квадратичная зависимость. Здесь также представляет интерес более подробное выяснение причины такого рассогласования, а также построение модели, дающей физически обоснованную картину отмеченной квадратичности.

В целом, выполненное исследование касается параметров задачи, достаточно близких к условиям резонанса на разностной частоте. Однако предварительная проверка показывает, что при удалении от этих условий нелинейные колебания приобретают весьма сложный характер, отличающийся рядом нетривиальных особенностей. Исследованию таких особенностей авторы предполагают посвятить отдельную работу.

### **Заключение.**

Рассмотрена задача о нелинейном возбуждении гиперзвуковых колебаний в ферритовой пластине в условиях комбинированного воздействия на двух частотах. Отмечена важность задачи для техники возбуждения и регистрации гиперзвука, обладающего разнообразными амплитудными и частотными характеристиками.

В качестве предварительной задачи выполнено рассмотрение магнитных колебаний при двухчастотном возбуждении. Показана возможность описания

вынужденных линейных колебаний на основе одного неоднородного линейного уравнения второго порядка с произвольным возбуждением. Полученное уравнение решено методом вариации постоянных для случая произвольного возбуждающего сигнала. Показана возможность представления колебаний системы на основе модели гармонического осциллятора с произвольным возбуждением. Получено аналитическое решение задачи о возбуждении осциллятора двумя сигналами, частоты которых отстоят вверх и вниз от центральной на одну и ту же частоту. Показана эквивалентность представления магнитных колебаний в линейном режиме и модельных колебаний на основе осциллятора. Установлено, что в общем случае колебания имеют вид биений, частота огибающей которых соответствует разности между частотами возбуждения.

Рассмотрена полная постановка задачи о возбуждении нелинейных магнитоупругих колебаний в нормально намагниченной ферритовой пластине при двухчастотном воздействии. Установлено, что в условиях сильной нелинейности при соответствии собственного упругого резонанса пластины разностной частоте, возбуждаются интенсивные упругие колебания на частоте, равной разностной.

Исследована амплитуда возбуждаемых упругих колебаний в широком диапазоне изменения толщины пластины. Показано, что в условиях малого упругого затухания при толщине, соответствующей собственному резонансу пластины, наблюдается сильный рост амплитуды упругих колебаний, имеющий резонансный характер.

Вне и в окрестности области резонанса обнаружено нелинейное возбуждения интенсивных нерезонансных колебаний, имеющих место вплоть до случая большого упругого затухания, когда упругие колебания становятся аperiодическими. Показано, что при возбуждении на единственной частоте нерезонансные колебания полностью отсутствуют, то есть установлена однозначная обусловленность этого явления именно двухчастотным характером возбуждения. Отмечено, что амплитуда нерезонансных колебаний при

увеличении толщины пластины также увеличивается при малом уровне возбуждения по линейному закону, который по мере увеличения уровня возбуждения переходит в квадратичный, а при дальнейшем увеличении возбуждения переходит к насыщению, приближаясь в среднем к линейному и приобретая скачкообразный характер.

Рассмотрен характер возбуждения в условиях резонанса на разностной частоте. Отмечено, что такой резонанс имеет ярко выраженный нелинейный характер, так как возникает только при достаточно высоком уровне возбуждения. Показано, что дальнейший рост амплитуды резонанса по мере увеличения уровня возбуждения происходит по закону, близкому к квадратичному, после чего при достижении возбуждением определенного уровня насыщается и далее остается постоянным. Выполнено сопоставление зависимости амплитуды резонанса от уровня возбуждения с амплитудой колебаний намагниченности в тех же условиях. Отмечено определенное рассогласование проявления нелинейности по магнитной и упругой системам, для описания которого предложена эмпирическая квадратичная зависимость.

Приведены некоторые замечания, касающиеся дальнейшего развития работы, в первую очередь – более подробного решения задачи о двухчастотном возбуждении и построении моделей нерезонансной составляющей упругих колебаний и нелинейного характера квадратичности и насыщения упругого резонанса.

### **Финансирование.**

Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, частично поддержана грантом РФФИ: № 20-55-53019 ГФЕН\_а, грантами РНФ: № 21-72-20048 и № 21-47-00019 и грантом Правительства Республики Коми и РФФИ № 20-42-110004, р\_а

## Литература

1. Голямина И.П. Магнитострикционный преобразователь. *Ультразвук. Маленькая энциклопедия*. Москва, Советская энциклопедия. 1979. С.196-200.
2. Kikuchi E. *Ultra-sound converters*. Moscow, Mir. 1972.
3. Голямина И.П. Магнитострикционные излучатели из ферритов. *Физика и техника мощного ультразвука. Кн.1. Источники мощного ультразвука*. Москва, Наука. 1967.
4. Штраусс В. Магнитоупругие свойства иттриевого феррита-граната. *Физическая акустика. Т.4Б. Применения физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела*. Москва, Мир. 1970. С.241-316.
5. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. *Радиотехника и электроника*. 2009. Т.54. №7. С.863.
6. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре. *Журнал радиоэлектроники*. 2013. №2.
7. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Комбинационное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре. *Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, НИУ МЭИ. 2013. С.164.
8. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре при ферромагнитном резонансе. *Радиотехника и электроника*. 2014. Т.59. №5. С.482.
9. Comstock R.L., LeCraw R.C. Generation of microwave elastic vibrations in a disk by ferromagnetic resonance. *Journal of Applied Physics*. 1963. V.34. №10. P.3022-3027.
10. Ле-Кроу Р., Комсток Р. Магнитоупругие взаимодействия в ферромагнитных диэлектриках. *Физическая акустика. Т.3Б. Динамика решетки*. Москва, Мир. 1968. С.156.

11. Eshbach J.R. Spin-wave propagation and the magnetoelastic interaction in yttrium iron garnet. *Journal of Applied Physics*. 1963. V.34. №4. P.1298.
12. Eggers F.G., Strauss W. A UHF delay line using single-crystal yttrium iron garnet. *Journal of Applied Physics*. 1963. V.34. №4. P.1180.
13. Schlömann E. Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields. I. Conversion of electromagnetic power into spin-wave power and vice versa. *Journal of Applied Physics*. 1964. V.35. №1. P.159.
14. Schlömann E., Joseph R.I. Generation of spin waves in nonuniform dc magnetic fields. II. Calculation of the coupling length. *Journal of Applied Physics*. 1964. V.35. №1. P.167.
15. Schlömann E., Joseph R.I. Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields. III. Magneto-elastic interaction. *Journal of Applied Physics*. 1964. V.35. №8. P.2382.
16. Schlömann E., Joseph R.I., Kohane T. Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields, with application to magnetic delay line. *Proceedings of the IEEE*. 1965. V.53. №10. P.1495.
17. Dreher L., Weiler M., Pernpeintner M., Huebl H., Gross R., Brandt M.S., Goennenwein S.T.B. Surface acoustic wave driven ferromagnetic resonance in nickel thin films: theory and experiment. *Physical Review B*. 2012. V.86. №13. P.134415(13).
18. Bigot J.V., Vomir M. Ultrafast magnetization dynamics of nanostructures. *Annalen der Physik*. 2013. V.525. №1-2. P.2-30.
19. Thevenard L., Gourdon C., Prieur J.Y., Von Bardeleben H.J., Vincent S., Becerra L., Largeau L., Duquesne J.Y. Surface-acoustic-wave-driven ferromagnetic resonance in (Ga,Mn)(As,P) epilayers. *Physical Review B*. 2014. V.90. №9. P.094401(8).
20. Ka Shen, Bauer G.E.W. Laser-induced spatiotemporal dynamics of magnetic films. *Physical Review Letters*. 2015. V.115. №19. P.197201(5).
21. Walowski J., Münzenberg M. Perspective: Ultrafast magnetism and THz spintronics. *Journal of Applied Physics*. 2016. V.120. №14. P.140901(16).
22. Чернов А.И., Кожаев М.А., Ветошко П.М., Додонов Д.В., Прокопов А.Р., Шумилов А.Г., Шапошников А.Н., Бержанский В.Н., Звездин А.К., Белотелов В.И. Локальное зондирование магнитных пленок с помощью оптического

- возбуждения магнитостатических волн. *Физика твердого тела*. 2016. Т.58. №6. С.1093.
23. Chang C.L., Tamming R.R., Broomhall T.J., Janusonis J., Fry P.W., Tobey R.I., Hayward T.J. Selective excitation of localized spin-wave modes by optically pumped surface acoustic waves. *Physical Review Applied*. 2018. V.10. №3. P.034068(8).
24. Kim S.-K. Micromagnetic computer simulations of spin waves in nanometer-scale patterned magnetic elements. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2010. V.43. P.264004(25).
25. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейные гиперзвуковые колебания магнитострикционного преобразователя на частотах, кратных частоте возбуждения. Часть 1. Деление частоты возбуждения. *Журнал радиоэлектроники*. 2015. №9. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/sep15/4/text.pdf>.
26. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейные гиперзвуковые колебания магнитострикционного преобразователя на частотах, кратных частоте возбуждения. Часть 2. Умножение частоты возбуждения. *Журнал радиоэлектроники*. 2015. №10. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/oct15/1/text.pdf>.
27. Гуревич А.Г. *Ферриты на сверхвысоких частотах*. Москва, Гос.Изд.физ.-мат.лит. 1960.
28. Джаффе Д., Качерис Дж., Караянис Н. Ферритовый детектор СВЧ. В сб. статей: *Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах*. Москва, ИЛ. 1961. С.23.
29. Simon J.C., Broussaud G. Detection with microwave ferrites. *Compt. Rend. Acad. Sci*. 1954. V. 238. №24. P.2294.
30. Власов В.С., Плешев Д.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное детектирование магнитоупругих колебаний в режиме амплитудной модуляции. *Журнал радиоэлектроники*. 2019. №3. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/mar19/7/text.pdf> (In Russian).

31. Власов В.С., Плешев Д.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Детектирование частотно-модулированного СВЧ сигнала с помощью магнитострикционного преобразователя. *Журнал радиоэлектроники*. 2020. №7. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jul20/3/text.pdf>.
32. Плешев Д.А., Котов Л.Н., Власов В.С., Щеглов В.И. *Преобразование частоты при акустическом резонансе в ферритах*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2019.
33. Харкевич А.А. *Основы радиотехники*. Москва, Физматлит. 2007.
34. Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений*. Москва, Ленинград, ОГИЗ. Гос. изд. техн.-теор. лит. 1945.
35. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*. Москва, Наука. 1965.
36. Двайт Г.Б. *Таблицы интегралов и другие математические формулы*. Москва, Наука. 1973.
37. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Москва, Наука. 1973.

Для цитирования:

Власов В.С., Плешев Д.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвуковых колебаний в ферритовой пластине в условиях комбинированного воздействия на двух частотах. Часть 1. Резонанс на разностной частоте. *Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]*. 2021. №9. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.9.1>