

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.9.12>

УДК: 537.87

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ВЗАИМНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ЩЕЛЕЙ В ПРОВОДЯЩЕЙ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ В ВИДЕ РЯДОВ ПО АЗИМУТАЛЬНЫМ ГАРМОНИКАМ

М. В. Инденбом

**Всероссийский научно-исследовательский институт радиотехники,
105082, Москва, Большая Почтовая, 22.**

Статья поступила в редакцию 21 сентября 2021 г.

Аннотация. В работе получены приближенные асимптотические выражения для электромагнитного поля и собственных и взаимных проводимостей «одномодовых» щелей в гладкой выпуклой поверхности вращения большого размера в виде рядов по азимутальным гармоникам. Коэффициенты рядов выражаются интегралами по спектру волн и могут быть вычислены численно или в виде суммы ряда вычетов (для взаимных проводимостей). Выражения для коэффициентов равномерно справедливы в пограничном слое поверхности, кроме окрестности полюсов поверхности вращения, и не имеют разрывов на каустиках поверхностных лучей. Полученные выражения могут быть непосредственно использованы для расчета полей и собственных и взаимных проводимостей кольцевых щелей. В отличие от метода собственных функций, полученные асимптотические выражения позволяют охватить случай поверхности произвольной формы и избежать суммирования медленно сходящихся двойных рядов. Выполнено сравнение результатов расчета проводимостей кольцевых щелей в проводящей сферической поверхности, полученных предлагаемым методом и методом собственных функций, показано их хорошее совпадение даже для сферы сравнительно небольшого радиуса 3λ .

Ключевые слова: выпуклая поверхность вращения, щели, кольцевые щели, электромагнитное поле, пограничный слой, взаимная проводимость, равномерная асимптотика, каустика поверхностных лучей.

Abstract. In this paper, we obtain approximate asymptotic expressions for the electromagnetic field and the self and mutual admittances of "single-mode" slots in a smooth convex surface of rotation of large sizes in the form of a series of azimuthal harmonics. The coefficients of the series are expressed as integrals over the wave spectrum and can be calculated numerically or as a sum series of deductions (for mutual admittances). The expressions for the coefficients are uniformly valid in the boundary surface layer, except for the vicinity of the poles of the surface of rotation, and do not have discontinuities on the caustics of the surface rays. The resulting expressions can be directly used to calculate the fields and the self and mutual admittances of annular slots. In contrast to the eigenfunction method, asymptotic expressions allow us to cover the case of an arbitrary-shaped surface and avoid summing slowly converging double series. A comparison of the results of calculating the admittances of annular slots in a conducting spherical surface obtained by the proposed method and the method of eigenfunctions was executed, and their good agreement shown even for a small radius of the sphere equal to 3λ .

Key words: convex surface of rotation, slots, ring slots, electromagnetic field, boundary surface layer, mutual admittance, uniform asymptotic, caustic of surface ray.

Введение

Известны асимптотические решения для электромагнитного поля и взаимной проводимости щелей в произвольной проводящей выпуклой поверхности, полученные методами геометрической теории дифракции и параболического уравнения [1–5]. Эти выражения пригодны для гладких выпуклых поверхностей, в частности для поверхностей вращения.

Однако эти выражения не всегда являются равномерными и существуют ситуации, в которых они не применимы. Например, в случае кольцевых щелей или непрерывных кольцевых источников с распределением вида $e^{-jm\varphi}$, где φ –

азимутальный угол, а m – целое число, на поверхности вращения возникают кольцевые каустики поверхностных лучей (геодезических линий), на которых эти решения терпят разрыв.

Для анализа эффектов взаимной связи в осесимметричных антенных решетках с конечным числом произвольно расставленных по образующей кольцевых решеток сосредоточенных щелевых элементов может быть применен модальный подход [6], позволяющий существенно понизить размерность матриц, описывающих взаимную связь элементов. Для применения данного подхода необходимо иметь представление взаимной проводимостей щелей в виде ряда, каждый член которого описывает взаимную проводимость для одной азимутальной гармоники токов $e^{-jm\varphi}$. Однако общего способа получения таких рядов не существует. Для ограниченного числа поверхностей вращения, форма которых допускает решение уравнений электромагнитного поля методом разделения переменных, такой ряд может быть получен путем разложения поля по собственным функциям. Соответствующие выражения для конуса и сферы приведены в [6]. Однако и в этом случае применение метода сопряжено с суммированием двойных рядов, число членов которых растет как квадрат электрического размера поверхности, что становится затруднительным при больших размерах поверхности.

Целью настоящей работы является получение равномерных асимптотических выражений для электромагнитного поля щелей в пограничном слое произвольной гладкой выпуклой проводящей поверхности вращения и взаимной проводимости щелей в этой поверхности, имеющих вид рядов по азимутальным гармоникам, пригодных при больших радиусах кривизны поверхности в длинах волн. Для кольцевых щелей с распределением эквивалентного магнитного тока вида $e^{-jm\varphi}$ электромагнитное поле, а также взаимные и собственные проводимости щелей, описываются одним членом этого ряда.

Приближенные равномерные асимптотические выражения для электромагнитного поля в пограничном слое получены во втором разделе данной

работы; выражения для собственных и взаимных проводимостей «одномодовых» щелей получены в разделе 3; результаты расчета собственных и взаимных проводимостей кольцевых щелей в сферической поверхности как предлагаемым методом, так и методом собственных функций, приведены в разделе 4.

1. Электромагнитное поле в пограничном слое проводящей выпуклой поверхности вращения

Для наших целей будет достаточно определить электромагнитное поле при $n \sim \lambda$, где n – координата вдоль внешней нормали к поверхности, λ – длина волны в свободном пространстве. Сначала найдем асимптотическое решение уравнений поля в отсутствие источников при азимутальной зависимости поля $e^{-jm\varphi}$, а затем полное поле при заданных на поверхности магнитных токах.

Электрические и магнитные типы волн вблизи поверхности. Хотя в общем случае электромагнитное поле вблизи выпуклой поверхности вращения не разлагается строго на сумму волн электрического и магнитного типа относительно направления нормали, при $n \sim \lambda$ это может быть сделано приближенно.

Рассмотрим ортогональную систему координат s, φ, n , где n – длина отрезка внешней нормали от поверхности до координируемой точки, s – длина образующей от полюса поверхности вращения до основания нормали, φ – азимутальный угол образующей. Коэффициенты Ламе

$$h_s = 1 + k_1, h_\varphi = \rho(1 + k_2 n), h_n = 1, \quad (1)$$

где k_1 – кривизна образующей (главная кривизна поверхности вдоль касательного к образующей орта \hat{s}), k_2 – главная кривизна поверхности вдоль орта $\hat{\varphi}$, ρ – радиус направляющей окружности. Если обозначить штрихами производные ρ по декартовой координате, совпадающей с осью вращения, то

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -\frac{\rho''}{(1+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\rho_1} \\ k_2 &= \frac{1}{\rho\sqrt{1+\rho'^2}} = \frac{1}{\rho_2} \end{aligned} \right\} \cdot (2)$$

Из (1), (2) следует, что в интересующем нас поверхностном слое $h_s = 1 + O(\lambda/\rho_1)$, $h_\varphi = \rho[1 + O(\lambda/\rho)]$, так что с точностью до величин $O(\lambda/\rho_{1,2})$ можно считать, что h_s и h_φ не зависят от n . Это означает, что с этой точностью электромагнитное поле в отсутствие источников можно разделить вблизи поверхности на поля электрического и магнитного типа, введя для них потенциалы U и V , соответственно [7]:

E -типа ($H_n = 0$):

$$\left. \begin{aligned} E_s &= \frac{1}{h_s} \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial n}, & ZH_s &= \frac{jk}{h_\varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \\ E_\varphi &= \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial n}, & ZH_\varphi &= \frac{-jk}{h_s} \frac{\partial U}{\partial s}. \end{aligned} \right\} \cdot (3)$$

H -типа ($E_n = 0$):

$$\left. \begin{aligned} E_s &= \frac{-jk}{h_\varphi} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, & ZH_s &= \frac{1}{h_s} \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial n}, \\ E_\varphi &= \frac{jk}{h_s} \frac{\partial V}{\partial s}, & ZH_\varphi &= \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial n}, \end{aligned} \right\} \cdot (4)$$

где $k = 2\pi/\lambda$. Потенциалы U и V удовлетворяют общему дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} + \frac{1}{h_s h_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{h_\varphi}{h_s} \frac{\partial U}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{h_s}{h_\varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \right] + k^2 U = 0. (5)$$

Из граничного условия на проводящей поверхности $E_s = 0$, $E_\varphi = 0$ и (3), (4) следуют граничные условия для потенциалов: $\partial U / \partial n = 0$, $V = 0$ при $n = 0$.

Для поля с азимутальной зависимостью $e^{-jm\varphi}$ уравнение (5) преобразуется в виду

$$\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} + \frac{1}{h_s h_\varphi} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{h_\varphi}{h_s} \frac{\partial U}{\partial s} \right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{h_\varphi^2} \right) U = 0. \quad (6)$$

Асимптотическое решение дифференциального уравнения для потенциалов. Заменой неизвестной функции

$$U = \sqrt{\frac{h_s}{h_\varphi}} \Psi e^{-jm\varphi}, \quad (7)$$

с точностью до величин $O(\lambda/\rho)$ относительно первого члена уравнения (6) приведем его к виду

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} + h_s^2 \left[k^2 - \frac{m^2}{h_\varphi^2} + \sqrt{\frac{1}{h_s^3 h_\varphi}} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{h_\varphi}{h_s} \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{\frac{h_s}{h_\varphi}} \right) \right] \Psi = 0. \quad (8)$$

Произведем замену переменной n :

$$z = \frac{kn}{M}, \quad (9)$$

где введены обозначения:

$$M = \left(\frac{kR}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (10)$$

$$R = \frac{1}{k_1(1-\kappa^2) + k_2\kappa^2}, \quad (11)$$

$$\kappa = \kappa_m = \frac{m}{k\rho}. \quad (12)$$

Параметр M является обычным большим асимптотическим параметром такого рода задач и имеет порядок $M = O((kR)^{1/3})$. Подставив (9) в уравнение (8) и отбрасывая малые порядка $O(M^{-2})$ и менее, получим асимптотическое дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + z\Psi + \frac{m_\xi^2}{k^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} + M^2(1-\kappa^2)\Psi = 0. \quad (13)$$

При выводе учтено, что порядок членов уравнения, содержащих вторые производные, $O(1)$ в переходной (каустической, полутеневой) области $M^2(1 - \kappa^2) \sim 1, z \sim 1$.

Уравнение (13) может быть решено методом разделения переменных. Записав неизвестную функцию в виде:

$$\Psi = Z(z)S(s), \quad (14)$$

получим обыкновенные дифференциальные уравнения для Z и S :

$$Z'' - (t - z)Z = 0, \quad (15)$$

$$S'' + k^2 \nu^2 S = 0, \quad (16)$$

где t – произвольная постоянная разделения,

$$\nu = \sqrt{1 - \kappa^2 + \frac{t}{M^2}}. \quad (17)$$

Решением уравнения (15) является произвольная функция Эйри $w(t - z)$.

В приближении геометрической оптики (или ВКБ [8]) решения уравнения

$$(16) \quad e^{\mp jk\sigma} / \sqrt{\nu}, \quad \text{где: } \sigma = \int_{s_0}^s \nu(s') ds'. \quad (18)$$

Эти решения терпят разрыв в точке $s = s_0$, в которой $\nu = 0$. Для бесконечных выпуклых поверхностей, монотонно уходящих на бесконечность при $s \rightarrow \infty$, точка s_0 единственна. Для конечных выпуклых поверхностей вращения таких точек две. Отдельный случай составляют поверхности с цилиндрическим участком поверхности, в котором таких точек имеется целый отрезок. Асимптотическое решение, равномерно справедливое при всех значениях s , в соответствии с методом канонического оператора Маслова [9] можно представить в виде интеграла

$$g(s, t) = \sqrt{\frac{k}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\nu_s^2 \right)^{\frac{1}{2}}_{s=s(p)} e^{\mp jk\Phi(p, s)} dp, \quad (19)$$

$$\Phi(p, s) = \text{sign } p \int_{s_0}^{\overset{\circ}{s}(p)} \nu(s') ds' + p \left[s - \overset{\circ}{s}(p) \right], \quad (20)$$

где $\overset{\circ}{s}(p)$ – решение алгебраического уравнения:

$$v^2\left(\overset{\circ}{s}(p)\right) = p^2, \quad (21)$$

нижним индексом s обозначена частная производная:

$$v_s^2 = \frac{dv^2}{ds} = \frac{2\kappa^2}{r} - \frac{2}{3} \frac{t}{M^2 r_R}, \quad (22)$$

$$r_R = \left(\frac{d \ln R}{ds}\right)^{-1}, \quad (23)$$

$$r = \left(\frac{d \ln \rho}{ds}\right)^{-1} = \frac{\rho}{\sin \alpha}, \quad (24)$$

(24) – расстояние от точки на поверхности до оси вращения по касательной к образующей ($r \geq \rho$), α – угол между касательной и осью вращения.

Равномерная асимптотика интеграла (19) зависит от вида поверхности. Она наиболее проста для выпуклых поверхностей вращения с одним полюсом при $s = 0$, монотонно уходящих на бесконечность при $s \rightarrow \infty$. В этом случае угол между касательной к образующей и осью вращения $\alpha \neq 0$, третья производная фазовой функции Φ по переменной интегрирования p не обращается в нуль при $v = 0$, и равномерная асимптотика интеграла [8, 10]:

$$g(s, t) = v^{-\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{4}} \nu(-\zeta), \quad (25)$$

где ν – функция Эйри, ограниченная и вещественная на вещественной оси,

$$\zeta = \left(\frac{3}{2} k \sigma\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (26)$$

Также асимптотическими решениями (16) будут и:

$$S(s) = g_{1,2}(s, t) = v^{-\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{4}} w_{1,2}(-\zeta), \quad (27)$$

выражающиеся через первую и вторую функцию Эйри. В отличие от (25), они неограниченно возрастают по модулю при $s < s_0$. При $\sigma \gg 1$ они асимптотически переходят в ВКБ решения:

$$g_{1,2}(s) \cong \frac{1}{\sqrt{\nu}} e^{\pm j(k\sigma + \pi/4)}, \quad (28)$$

При $t = 0$ и $s \approx s_0$:

$$\zeta \cong \frac{k(s - s_0)}{M_s}, \quad (29)$$

где:

$$M_s = \left(\frac{kr(s_0)}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (30)$$

При $s < s_0$, как следует из (29), необходимо выбрать ветвь корня в (26), для которой $\zeta < 0$. Решения (25), (27) являются аналитическими при $\alpha \neq 0$ в точке $s = s_0$, так как при $s \approx s_0$:

$$\zeta \cong M_s^2 \nu^2. \quad (31)$$

Интегральное представление (19) является более общим равномерным асимптотическим приближением решения уравнения (16) и применимо и при наличии изолированной точки, в которой угол между касательной к образующей и осью вращения $\alpha = 0$, и в случае целого отрезка образующей, на котором $\alpha = 0$ (поверхность вращения с цилиндрическим участком).

Из (25), (29) следует $S''(s) = O(k^2 S M_s^{-2})$, что обосновывает вывод дифференциального уравнения (13).

Из (29) следует, что каустическая область, где $\zeta \sim 1$, имеет ширину $k(s - s_0) \sim M_s$, которая может оказаться довольно значительной при $\alpha \approx 0$, так как $M_s \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 0$. В частности, для цилиндра радиуса a вся поверхность является каустической для гармоники с $m = ka$.

Волны электрического и магнитного типа в пограничном слое. Выберем конкретный вид решений асимптотических уравнений поля с учетом особенностей задачи для случая бесконечной поверхности вращения, не переходящей на бесконечности в цилиндр. Для описания уходящих от поверхности волн используем вторую функцию Эйри $w_2(t - z)$. Для описания стоячих волн у поверхности с учетом граничных условий для E - и H -волн возьмем соответственно:

$$\begin{aligned} \psi_1(z,t) &= w_1(t-z) - \frac{w_1'(t)}{w_2'(t)} w_2(t-z), \\ \psi_2(z,t) &= w_1(t-z) - \frac{w_1(t)}{w_2(t)} w_2(t-z). \end{aligned} \quad (32)$$

Асимптотическое решение для уходящих и стоячих электромагнитных волн запишем в виде:

$$\vec{E}_m^{(ij)} = e_m^{(ij)} e^{-jm\varphi}, \quad \vec{H}_m^{(ij)} = h_m^{(ij)} e^{-jm\varphi}. \quad (33)$$

При учете (3), (4), (7) E -волны:

$$\left. \begin{aligned} e_m^{(i1)}{}_s &= -\frac{1}{M\sqrt{Mk\rho(1+t/M^2)}} g'(s,t) \begin{cases} w_2'(t-z) \\ -\psi_1'(t,z) \end{cases} \\ e_m^{(i1)}{}_\varphi &= \frac{j\kappa_m}{M\sqrt{Mk\rho(1+t/M^2)}} g(s,t) \begin{cases} w_2'(t-z) \\ -\psi_1'(t,z) \end{cases} \\ Zh_m^{(i1)}{}_s &= \frac{\kappa_m}{\sqrt{Mk\rho(1+t/M^2)}} g(s,t) \begin{cases} w_2(t-z) \\ \psi_1(t,z) \end{cases} \\ Zh_m^{(i1)}{}_\varphi &= -\frac{j}{\sqrt{Mk\rho(1+t/M^2)}} g'(s,t) \begin{cases} w_2(t-z) \\ \psi_1(t,z) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (34a)$$

H -волны:

$$\left. \begin{aligned} e_m^{(i2)}{}_s &= -\frac{\kappa_m}{\sqrt{Mk\rho(1+t/M^2)}} g(s,t) \begin{cases} w_2(t-z) \\ -\psi_2(t,z) \end{cases} \\ e_m^{(i2)}{}_\varphi &= \frac{j}{\sqrt{Mk\rho(1+t/M^2)}} g'(s,t) \begin{cases} w_2(t-z) \\ -\psi_2(t,z) \end{cases} \\ Zh_m^{(i2)}{}_s &= -\frac{1}{M\sqrt{Mk\rho(1+t/M^2)}} g'(s,t) \begin{cases} w_2'(t-z) \\ \psi_2'(t,z) \end{cases} \\ Zh_m^{(i2)}{}_\varphi &= \frac{j\kappa_m}{M\sqrt{Mk\rho(1+t/M^2)}} g(s,t) \begin{cases} w_2'(t-z) \\ \psi_2'(t,z) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (34b)$$

где нижние функции соответствуют $i = 1$ (стоячие волны), верхние – $i = 2$ (уходящие волны), $g'(s,t) = k^{-1} \partial g(s,t) / \partial s$. Использование функции $g(s,t)$ обусловлено тем, что она обеспечивает ограниченность поля при $s = 0$.

Дополнительный множитель $M^{-1/2}$ (не влияющий на асимптотическое удовлетворение дифференциального уравнения в пределах принятой точности) введен для того, чтобы при $s \rightarrow \infty$ убывание поля обеспечивало единственность решения уравнений поля в неограниченной области [11]. Так, для кругового конуса $s = r$ и из (33), (34) следует, что при $s \rightarrow \infty$ поле имеет характер убывания $\frac{e^{\pm jkr}}{r}$. Множитель $(1+t/M^2)^{-1/2}$ обеспечивает сходимость интегралов по постоянной разделению t .

Ортогональность и нормы. Применим лемму Лоренца к паре введенных волн $\vec{E}_m^{(ij)}(t)$, $\vec{H}_m^{(ij)}(t)$ и $\vec{E}_{m'}^{(i'j')}(t')$, $\vec{H}_{m'}^{(i'j')}(t')$ в объеме, ограниченном параллельными поверхностями $S(n)$ и $S(n')$, в котором отсутствуют источники поля этих волн. В силу различного вида зависимости поля от n при $t \neq t'$, волны оказываются ортогональны [7]:

$$J_{mm'}^{ij,i'j'}(t,t') = -\iint_S \left\{ \left[\vec{E}_m^{(ij)}, \vec{H}_{m'}^{(i'j')} \right] - \left[\vec{E}_{m'}^{(i'j')}, \vec{H}_m^{(ij)} \right] \right\} \vec{n} dS = 0. \quad (35)$$

Также, очевидно, ортогональны волны при $m' \neq -m$. С помощью соотношений (3), (4) легко убедиться в ортогональности волн при $i = i'$ и $j = j'$. Отдельного внимания заслуживает только ортогональность E - и H -волн между собой. Используя (3), (4), запишем:

$$J_{m(-m)}^{(i1,i'2)}(t,t) \cong -j2\pi m \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial U_{i1}}{\partial n} \frac{\partial V_{i'2}}{\partial n} + k^2 U_{i1} V_{i'1} \right) ds = -j2\pi m \left(\frac{\partial U_{i1}}{\partial n} \frac{\partial V_{i'2}}{\partial n} + k^2 U_{i1} V_{i'1} \right) \Big|_0^\infty.$$

Значения потенциалов и их нормальных производных при $s = 0$ пропорциональны значению $g(0,t)$, которое равно нулю при $m = 0$ и асимптотически равно нулю в силу экспоненциального убывания поля за каустикой в остальных случаях. Так как в силу (7) потенциалы равны нулю и при $s = \infty$, находим, что E - и H -волны ортогональны.

Остается найти нормы этих волн $J_{m(-m)}^{(ij,(3-i)j)}(t,t)$. Как мы увидим, эти нормы бесконечны, так что при преобразовании (35) можно отбрасывать сходящиеся (на бесконечности) интегралы и интегралы в конечных пределах. Подставляя

выражения для электрических и магнитных волн с учетом выражения для вронскиана функций Эйри [12], получим:

$$J_{m(-m)}^{(2j,1j)}(t,t) = \frac{4\pi}{Zk} \int_L^{\infty} \frac{\kappa^2 g^2 + g'^2}{M^2(\kappa^2 + \nu^2)} ds. \quad (36)$$

Вернемся к $t \neq t'$, $t \approx t'$ и возьмем в качестве нижнего предела интегрирования L такое, что $\zeta(L) \gg 1$ и можно использовать асимптотику

$$g(s,t) \cong \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sin\left(k\sigma + \frac{\pi}{4}\right), \quad g'(s,t) \cong -\sqrt{\nu} \cos\left(k\sigma + \frac{\pi}{4}\right). \quad \text{При } t \approx t':$$

$$k\sigma' = k\sigma(s,t') \cong k\sigma(s,t) + k \frac{\partial \sigma}{\partial t} (t - t') = k\sigma + x(t - t'), \quad (37)$$

где:

$$x = \frac{k}{2} \int_{s_0}^s \frac{ds'}{M^2 \nu}. \quad (38)$$

Выполним замену переменной интегрирования $kds = 2M^2 dx$. С учетом того, что $\int_0^{\infty} \cos(xt) dx = \pi \delta(t)$, отбрасывая интеграл от быстроосциллирующей функции, получим

$$\begin{aligned} J_{m(-m)}^{(2j,1j)}(t,t) &= \frac{8\pi}{Zk^2} \lim_{t' \rightarrow t} \int_0^{\infty} \cos\left(k\sigma + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(k\sigma' + \frac{\pi}{4}\right) dx = \\ &= \frac{4\pi}{Zk^2} \lim_{t' \rightarrow t} \int_0^{\infty} \cos(k(\sigma - \sigma')) dx = \frac{4\pi}{Zk^2} \lim_{t' \rightarrow t} \int_0^{\infty} \cos(x(t - t')) dx = . \quad (39) \\ &= \frac{4\pi^2}{Zk^2} \lim_{t' \rightarrow t} \delta(t - t'). \end{aligned}$$

В результате, соотношения ортогональности построенной системы волн

$$J_{mm'}^{(ij,i'j')}(t,t') = \frac{4\pi^2}{Zk^2} (i - i') \delta_{m'(-m)} \delta_{j'j} \delta_{i(3-i')} \delta(t - t'). \quad (40)$$

Электромагнитное поле поверхностного магнитного тока. Поле магнитного тока на поверхности можно представить в пограничном слое в виде линейной суперпозиции только уходящих относительно направления нормали волн:

$$\left(\vec{E}, \vec{H}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} C_m^{(2,j)}(t) \left(e_m^{(2,j)}, h_m^{(2,j)} \right) dt e^{-jm\varphi}. \quad (41)$$

Коэффициенты разложения могут быть получены применением леммы Лоренца к полю (41) и вспомогательному полю $\vec{E}_{-m}^{(1,j)}, \vec{H}_{-m}^{(1,j)}$ в объеме, ограниченном поверхностями S и $S(n)$ [7]. При этом сначала можно считать, что магнитный ток расположен на поверхности $S(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < n$. В этом случае интеграл по поверхности S обратится в нуль в силу граничных условий $\vec{E}_t = 0$, $\vec{E}_{-m}^{(1,j)} = 0$ для тангенциальных составляющих электрического вектора искомого и вспомогательного полей. В результате, с учетом условий ортогональности (40), положив затем $\varepsilon = 0$, получим

$$C_m^{(2,j)}(t) = \frac{Zk^2}{4\pi^2} \int_S \vec{J}^m h_{-m}^{(1,j)} e^{jm\varphi} dS, \quad (42)$$

где \vec{J}^m – поверхностная плотность магнитного тока.

Подставим (42) в (41) и поменяем порядок интегрирования

$$\left(\vec{E}, \vec{H}\right) = \int_S \vec{J}^m(s', \varphi') (\vec{E}, \vec{H}) dS', \quad (43)$$

где:

$$(\vec{E}, \vec{H}) = \frac{Zk^2}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_{-m}^{(1,j)}(s') \cdot \left(e_m^{(2,j)}(s), h_m^{(2,j)}(s) \right) dt e^{-jm(\varphi-\varphi')}, \quad (44)$$

точка означает прямое (тензорное) произведение векторных функций. Полюса подынтегрального выражения интеграла лежат в четвертой четверти комплексной плоскости t . Поэтому члены подынтегрального выражения, экспоненциально стремящиеся к нулю в верхней полуплоскости, по теореме о вычетах дадут нулевой результат интегрирования, так как в этом случае интеграл можно замкнуть по бесконечной полуокружности в верхней полуплоскости. В этом случае вместо (44)

$$(\vec{E}, \vec{H}) = j \frac{Zk^2}{8\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_{-m}^{(1,j)}(s') \cdot \left(e_m^{(2,j)}(s), h_m^{(2,j)}(s) \right) \left[g(s_{\min}) \right]_{g_2(s_{\max})} dt e^{-jm(\varphi-\varphi')}, \quad (45)$$

где [] означает, что в функциях $\vec{e}_m^{(ij)}, \vec{h}_m^{(ij)}$ следует использовать функцию g_2 от $s_{\max} = \max(s, s')$ и функцию g от $s_{\min} = \min(s, s')$. Функцию g выразим через g_1 и g_2 :

$$g(s) = \frac{1}{2j} [g_1(s) - g_2(s)], \quad (46)$$

Тогда:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(2)}, \quad (47)$$

где $\mathbf{E}^{(i)}, \mathbf{H}^{(i)}$ определяются (45) при замене g на $g_i/2j$.

Функции $g_{1,2}$ так же, как и g можно представить в интегральном виде:

$$g_{1,2}(s) = \pm j \sqrt{\frac{k}{\pi}} \int_{C_{1,2}} \left(\frac{dv^2}{ds} \right)_{s=s(p)}^{-\frac{1}{2}} e^{\pm jk\Phi_2(p,s)} dp, \quad (48)$$

где:

$$\Phi_2(p, s) = \int_{s_0}^{\overset{\circ}{s}(p)} v(s') ds' + p \left[s - \overset{\circ}{s}(p) \right]. \quad (49)$$

Контур интегрирования C_1 идет по мнимой оси от $-j\infty$ до нуля и далее по вещественной оси от нуля до ∞ ; C_2 – ему комплексно-сопряженный контур; $\overset{\circ}{s}(p)$ удовлетворяет уравнению $v\left(\overset{\circ}{s}(p)\right) = p$.

Подставим (48) в (45). Для $i = 1$

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)}) = & \frac{Zk^3}{16\pi^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm(\varphi-\varphi')} \sum_{j=1}^2 \int_{C_1} \int_{C_2} \int_{s=s(p)}^{\infty} \left(v_s^2 \right)_{s=s(p)}^{-\frac{1}{2}} \left(v_s^2 \right)_{s=s(p')}^{-\frac{1}{2}} \times \\ & \times \vec{h}_{-m}^{(1j)}(s', \tilde{p}') \cdot \left(\vec{e}_m^{(2j)}, \vec{h}_m^{(2j)} \right)(s, \tilde{p}) e^{-jk[\Phi_2(p, s_{\max}) - \Phi_2(p', s_{\min})]} dt dp' dp, \quad (50) \end{aligned}$$

для $i = 2$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{H}^{(2)}) = & -\frac{Zk^3}{16\pi^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm(\varphi-\varphi')} \sum_{j=1}^2 \iint_{C_2} \iint_{C_2-\infty}^{\infty} \left(v_s^2\right)_{s=s(p)}^{-\frac{1}{2}} \left(v_s^2\right)_{s=s(p')}^{-\frac{1}{2}} \times \\
 & \times \tilde{h}_{-m}^{\rightarrow(1j)}(s', -p') \cdot \left(\tilde{e}_m^{\rightarrow(2j)}, \tilde{h}_m^{\rightarrow(2j)} \right)(s, p) e^{-jk[\Phi_2(p,s)+\Phi_2(p',s')]} dt dp' dp, \quad (51)
 \end{aligned}$$

где:

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{e}_m^{(i1)}(s, p) &= \frac{jp}{M\sqrt{Mk\rho(\kappa^2+p^2)}} \begin{cases} w_2'(t-z) \\ \psi_1'(t, z) \end{cases} \\
 \tilde{e}_m^{(i1)}(s, p) &= \frac{j\kappa_m}{M\sqrt{Mk\rho(\kappa^2+p^2)}} \begin{cases} w_2'(t-z) \\ -\psi_1'(t, z) \end{cases} \\
 Z\tilde{h}_m^{(i1)}(s, p) &= \frac{\kappa_m}{\sqrt{Mk\rho(\kappa^2+p^2)}} \begin{cases} w_2(t-z) \\ \psi_1(t, z) \end{cases} \\
 Z\tilde{h}_m^{(i1)}(s, p) &= -\frac{p}{\sqrt{Mk\rho(\kappa^2+p^2)}} \begin{cases} w_2(t-z) \\ -\psi_1(t, z) \end{cases}
 \end{aligned} \right\}, \quad (52a)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{e}_m^{(i2)}(s, p) &= -\frac{\kappa_m}{\sqrt{Mk\rho(\kappa^2+p^2)}} \begin{cases} w_2(t-z) \\ -\psi_2(t, z) \end{cases} \\
 \tilde{e}_m^{(i2)}(s, p) &= \frac{p}{\sqrt{Mk\rho(\kappa^2+p^2)}} \begin{cases} w_2(t-z) \\ \psi_2(t, z) \end{cases} \\
 Z\tilde{h}_m^{(i2)}(s, p) &= \frac{jp}{M\sqrt{Mk\rho(\kappa^2+p^2)}} \begin{cases} w_2'(t-z) \\ -\psi_2'(t, z) \end{cases} \\
 Z\tilde{h}_m^{(i2)}(s, p) &= \frac{j\kappa_m}{M\sqrt{Mk\rho(\kappa^2+p^2)}} \begin{cases} w_2'(t-z) \\ \psi_2'(t, z) \end{cases}
 \end{aligned} \right\}, \quad (52b)$$

нижние функции соответствуют $i = 1$, верхние – $i = 2$;

$$\tilde{p}' = \begin{cases} p', & s' < s \\ -p, & s' > s \end{cases}, \quad \tilde{p} = \begin{cases} p, & s' < s \\ -p', & s' > s \end{cases}.$$

При преобразовании учтено, что в точках стационарной фазы $p^2 = v^2(s_{\max})$,

$p'^2 = v^2(s_{\min})$, так что можно положить $\sqrt{1+t/M^2} = \sqrt{\kappa^2+p^2}$,

$\sqrt{1+t/M'^2} = \sqrt{\kappa^2+p'^2}$.

При $s \approx s'$ в (50) можно выполнить замену переменной интегрирования t на:

$$u = \frac{\sigma - \sigma'}{s - s'} = \frac{\int_{s'}^s v(s', t) ds'}{s - s'} \cong \sqrt{1 - \kappa(s)\kappa(s') + \frac{t}{M(s)M(s')}}. \quad (53)$$

Точное и приближенное выражения для u симметричны относительно перемены мест s и s' и имеют общий предел при $s = s'$. Используем приближенное выражение (53) для определения аргумента t функций Эйри в (52):

$$t = -M(s)M(s')(1 - \kappa(s)\kappa(s') - u^2), \quad (54)$$

Производная новой переменной по старой:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\int_{s'}^s \frac{ds''}{2vM^2}}{s - s'} = \frac{x - x'}{k(s - s')} \cong \frac{1}{2M(s)M(s')\sqrt{v(s)v(s')}}. \quad (55)$$

Точное и приближенное выражения для производной симметричны по s, s' , имеют общий предел при $s = s'$ и одинаковую особенность при $s = s' = s_0$. В результате замены переменной интегрирования:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)}) &= \frac{Zk^3}{8\pi^3} M(s)M(s') \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm(\varphi-\varphi')} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{C_1} \int_{C_2} \sqrt{v(s)v(s')} (v_s^2)_{s=s(p)}^{-\frac{1}{2}} (v_s^2)_{s=s(p')}^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \vec{h}_{-m}^{(1j)}(s', \vec{p}') \cdot \left(\vec{e}_m^{(2j)}, \vec{h}_m^{(2j)} \right) (s, \vec{p}) e^{-jk[\Phi_2(p, s_{\max}) - \Phi_2(p', s_{\min})]} dp' dp du. \quad (56) \end{aligned}$$

Теперь вычислим интегралы по dp' и dp методом стационарной фазы. Стационарные точки $p = v(s_{\max})$, $p' = v(s_{\min})$; вторые производные фазовых функций в этих точках $\Phi_2'' = \left(\frac{-2v}{v_s^2} \right)_{s_{\max}, s_{\min}}$. Значения фазовой функции в стационарных точках $\Phi_2(p) = \sigma(s_{\max})$, $\Phi_2(p') = \sigma(s_{\min})$, их разность в силу (53)

$\sigma(s_{\max}) - \sigma(s_{\min}) = u(s_{\max} - s_{\min})$. В результате:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)}) &\cong \frac{Zk^2}{8\pi^2} M(s)M(s') \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm(\varphi-\varphi')} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \times \\ &\times \vec{h}_{-m}^{(1j)}(s', \pm v(s')) \cdot \left(\vec{e}_m^{(2j)}, \vec{h}_m^{(2j)} \right) (s, \pm v(s)) \exp(-jk|s - s'|u) du, \quad (57) \end{aligned}$$

где знаки «плюс» соответствуют $s' < s$, «минус» – $s' > s$. В экспоненциальном множителе теперь можно отказаться от вычисления модуля $|s - s'|$ и заменить в медленноменяющихся множителях $\vec{e}_m^{(ij)}(s)$, $\vec{h}_m^{(ij)}(s) \pm v(s')$ и $\pm v(s)$ на u

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)}) &\cong \frac{Zk^2}{8\pi^2} M(s)M(s') \times \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm(\varphi-\varphi')} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \vec{h}_{-m}^{(1j)}(s', u) \cdot \left(\vec{e}_m^{(2j)}, \vec{h}_m^{(2j)} \right)(s, u) \exp(-jk(s-s')u) du \end{aligned} \quad (58)$$

При $s' < s$ контур интегрирования в (58) можно замкнуть полуокружностью бесконечно большого радиуса в нижней полуплоскости. При этом его значение будет определяться полюсами подынтегральной функции, расположенными в четвертой четверти комплексной плоскости u . При $s' > s$, его можно аналогично замкнуть в верхней полуплоскости и вычислить как сумму полюсов, расположенных во второй четверти. В обоих случаях результат будет совпадать с результатом вычисления аналогичным способом интегралов в (57). Отметим, что нули вторых производных фазовой функции в особых стационарных точках $p = v(s_0) = 0$, $p' = v(s_0) = 0$ компенсировались нулями амплитудного множителя $\sqrt{v(s)v(s')}$, так что конечное выражение является аналитическим в этих точках.

Аналогичные преобразования дают:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{H}^{(2)}) &\cong -j \frac{Zk^2}{8\pi^2} M(s)M(s') \times \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm(\varphi-\varphi')} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \vec{h}_{-m}^{(1j)}(s', -u) \cdot \left(\vec{e}_m^{(2j)}, \vec{h}_m^{(2j)} \right)(s, u) e^{-jk(\sigma+\sigma')} du \end{aligned} \quad (59)$$

Если точки s, s' удалены от каустики, вклад этого слагаемого в суммарное поле мал благодаря наличию быстро осциллирующего множителя $e^{-jk(\sigma+\sigma')}$.

Выражения (58) – (59) сохраняют аналитичность на каустике $s' = s_0$ или $s = s_0$. В отличие от выражений (41) – (45), аналитичность сохраняется также и в изолированной точке образующей, в которой $\alpha = 0$ (экватор конечной замкнутой поверхности), или на множестве таких точек (цилиндрический участок поверхности). Как показано ниже, полученные на основе (58), (59) значения

взаимной проводимости щелей на сфере, достаточно хорошо согласуются с точными значениями.

Если точки источника и наблюдения в (44) удалены от каустики, то $\mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{H}^{(2)}$ можно пренебречь, а для функций g_i использовать асимптотику (28). Полагая, что главная область интегрирования находится при $t \sim 1$,

$$k|\sigma - \sigma'| = k \int_{s'}^s v ds \cong k|\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}'| + |x - x'|t, \quad (59)$$

где:

$$\tilde{\sigma} = \int_{s_0}^s \sqrt{1 - \kappa^2} ds', \quad (60)$$

$$x = \frac{k}{2} \int_{s_0}^s \frac{ds'}{\sqrt{1 - \kappa^2} M^2}, \quad (61)$$

s_0 – произвольно, поскольку сокращается при вычислении разности значений. В итоге при отсутствии каустики поверхностных лучей (45) принимает вид:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \cong & \frac{Zk^2}{(4\pi)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}_{-m}^{(1,j)}(s', \pm v(s')) \cdot \left(\tilde{e}_m^{(2,j)}, \tilde{h}_m^{(2,j)} \right)(s, \pm v(s)) \times \\ & \times \frac{e^{-j|x-x'|t}}{v(s')v(s)} dt e^{-j[k|\tilde{\sigma}-\tilde{\sigma}'|+m(\varphi-\varphi')]} \end{aligned}, \quad (62)$$

где знаки «плюс» соответствуют $s' > s$, «минус» – $s > s'$, а в амплитудных множителях можно положить $v \cong \sqrt{1 - \kappa^2}$.

Это выражение можно далее преобразовать к виду, соответствующему равномерной геометрической теории дифракции (ГТД) [2, 3]. Для этого преобразуем ряд по азимутальным гармоникам с помощью формулы суммирования Пуассона:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \cong & \frac{Zk^2}{(4\pi)^2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j[k|\tilde{\sigma}-\tilde{\sigma}'|+\mu(\varphi-\varphi'+2\pi q)]} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}_{-\mu}^{(1,j)}(s', \pm v(s')) \cdot \left(\tilde{e}_{\mu}^{(2,j)}, \tilde{h}_{\mu}^{(2,j)} \right)(s, \pm v(s)) \frac{e^{-j|x-x'|t}}{v(s')v(s)} dt d\mu \end{aligned}. \quad (63)$$

Вычислим интегралы по μ методом стационарной фазы. Фазовая функция:

$$\Phi = k|\tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_1| + \mu(\varphi - \varphi' + 2\pi q) = k \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} \sqrt{1 - \left(\frac{\mu}{k\rho}\right)^2} ds + \mu(\varphi - \varphi' + 2\pi q). \quad (64)$$

Уравнение для точки стационарной фазы $\Phi' = 0$:

$$\frac{\mu}{k} \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} \frac{ds}{\rho \sqrt{\rho^2 - \left(\frac{\mu}{k}\right)^2}} = \varphi - \varphi' + 2\pi q, \quad (65)$$

при $q = 0$ представляет собой уравнение геодезической линии на поверхности вращения [13], проходящей через точки (s, φ) и (s', φ') , а при $q \neq 0$ не имеет решений. Вторая производная фазовой функции в стационарной точке:

$$\Phi''_0 = -k^2 \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} \frac{\rho ds}{\left[(k\rho)^2 - \mu^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (66)$$

В результате применения формулы метода стационарной фазы [10]:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \cong & \frac{Zk^2}{(4\pi)^2} \sqrt{\frac{2\pi}{|\Phi''_0|}} \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2(s)}\sqrt{1 - \kappa^2(s')}} e^{-j\left[k|\tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_1| + \mu(\varphi - \varphi') - \frac{\pi}{4}\right]} \times \\ & \times \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}_{-\mu}^{(1j)}(s', \pm v(s')) \cdot \left(\tilde{e}_{\mu}^{(2j)}, \tilde{h}_{\mu}^{(2j)} \right)(s, \pm v(s)) e^{-j|x-x'|t} dt \end{aligned} \quad (67)$$

где μ – решение уравнения (65) при $q = 0$. Интегралы (67) сводятся к поверхностным функциям Фока.

2. Взаимная проводимость щелей на выпуклой поверхности вращения

Взаимная проводимость двух щелей с эквивалентными магнитными токами

\vec{J}_1^m и \vec{J}_2^m :

$$Y_{21} = - \int_{S_{a2}} \vec{J}_2^{m*} \vec{H} \left[\vec{J}_1^m \right] dS, \quad (68)$$

где $\vec{H} \left[\vec{J}_1^m \right]$ – магнитное поле, создаваемое эквивалентным магнитным током первой щели, S_{a2} – поверхность второй щели.

Для случая бесконечно узких «одномодовых» щелей с известным распределением поля в щели $e(l)$, l – продольная локальная декартова координата вдоль оси щели (считаем, что локальные координаты щели в силу большого радиуса кривизны поверхности могут считаться прямолинейными) эквивалентный поверхностный магнитный ток:

$$\vec{J}^m = \vec{l} e(l) \delta(l_{\perp}), \quad (69)$$

где l_{\perp} – ортогональная ось щели декартова координата, \vec{l} – единичный вектор, направленный вдоль оси щели.

Единичные векторы локальной системы координат в щели:

$$\left. \begin{aligned} \vec{l} &= \hat{s} \sin \chi + \hat{\varphi} \cos \chi \\ \vec{l}_{\perp} &= \hat{s} \cos \chi - \hat{\varphi} \sin \chi \end{aligned} \right\}, \quad (70)$$

где χ – угол между осью щели и направляющей. Координаты ρ , φ связаны с локальными координатами обратным преобразованием:

$$\left. \begin{aligned} s - s_i &= l \sin \chi + l_{\perp} \cos \chi \\ \varphi - \varphi_i &= \frac{1}{\rho_i} (l \cos \chi - l_{\perp} \sin \chi) \end{aligned} \right\}. \quad (71)$$

С учетом этого получим:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_m^{(2j)} &= \int_S \vec{J}^m \cdot \vec{h}_{-m}^{(1j)}(s', u) e^{j(m\varphi' + kus')} dS' = \\ &= \begin{cases} \frac{2j}{Z\sqrt{M(s_1)k\rho(s_1)}} \frac{1}{w_2'(t)} f(\beta_m(s_1)) \cos(\phi_m + \chi), & j=1 \\ \frac{2}{ZM(s_1)\sqrt{M(s_1)k\rho(s_1)}} \frac{1}{w_2(t)} f(\beta_m(s_1)) \sin(\phi_m + \chi), & j=2 \end{cases}, \quad (72) \end{aligned}$$

где:

$$f(\beta) = \int_{-l_0/2}^{l_0/2} e(l) e^{j\beta l} dl, \quad (73)$$

l_0 – длина щели,

$$\beta_m = \kappa_m \cos \chi + \nu \sin \chi, \quad (74)$$

$$\phi_m = \arcsin\left(\frac{\kappa_m}{\sqrt{\kappa_m^2 + u^2}}\right), \quad (75)$$

где $\kappa_m = \kappa_m(s_1)$.

Из (45), (58), (59) с учетом (72) следует «модальное» разложение для взаимной проводимости двух щелей, центры которых расположены в точках s_1, ϕ_1 и s_2, ϕ_2 :

$$Y_{21} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_{21m} e^{-jm(\phi_2 - \phi_1)}, \quad (76)$$

где

$$Y_{21m} = Y_{21m}^{(1)} + Y_{21m}^{(2)}, \quad (77)$$

$$Y_{21m}^{(1)} = j \frac{k\sqrt{M(s_1)M(s_2)}}{2\pi Z\sqrt{\rho(s_1)\rho(s_2)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta_m(s_1))f^*(\beta_m(s_2))e^{-jk(s_2-s_1)u} \times$$

$$\times \left\{ \cos(\chi + \phi_1)\cos(\chi + \phi_2) \frac{w_2(t)}{w_2'(t)} - \frac{1}{M(s_1)M(s_2)} \sin(\chi + \phi_1)\sin(\chi + \phi_2) \frac{w_2'(t)}{w_2(t)} \right\} du, \quad (78)$$

$$Y_{21m}^{(2)} = \frac{k\sqrt{M(s_1)M(s_2)}}{2\pi Z\sqrt{\rho(s_1)\rho(s_2)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-\beta_{-m}(s_1))f^*(\beta_m(s_2))e^{-jk(s_1+s_2)u} \times$$

$$\times \left\{ \cos(\chi - \phi_1)\cos(\chi + \phi_2) \frac{w_2(t)}{w_2'(t)} - \frac{1}{M(s_1)M(s_2)} \sin(\chi - \phi_1)\sin(\chi + \phi_2) \frac{w_2'(t)}{w_2(t)} \right\} du, \quad (79)$$

$$\phi_1 = \phi_m(s_1), \quad \phi_2 = \phi_m(s_2), \quad t = -M(s_1)M(s_2)(1 - \kappa(s_1)\kappa(s_2) - u^2).$$

Физически составляющая проводимости $Y_{21m}^{(1)}$ соответствует взаимодействию щелей по кратчайшему пути между ними, $Y_{21m}^{(2)}$ – волне, прошедшей от одной до другой щели через отражение от каустики.

Фактические пределы интегрирования в этих выражениях определяются реактивными полями щелевых излучателей и практически не зависят от размера поверхности вращения. Можно показать, что для цилиндрической поверхности (78) согласуется с асимптотикой строгого решения методом собственных функций.

Выражения (76)–(79) соответствуют значениям $s_1 \approx s_2$. Другое выражение для модальной взаимной проводимости, не ограниченное этим условием, получим из (43), (44):

$$Y_{21m} = \int_{s_{a2}} \int_{s_{a1}} e(l)^* e(l') \delta(l_\perp) \delta(l'_\perp) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Y}_m(s, s', t) dt e^{jm(\varphi' - \varphi)} dS' dS e^{jm(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (80)$$

$$\hat{Y}_m(s, s', t) = -\frac{Zk^2}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \left(\vec{l}' h_{-m}^{(1j)}(s', t) \right) \left(\vec{l} h_m^{(2j)}(s, t) \right). \quad (81)$$

Раскроем эти выражения, подставив (34):

$$\begin{aligned} Y_{21m} = & j \frac{k}{\pi Z} \frac{1}{\sqrt{M(s_1)M(s_2)\rho(s_1)\rho(s_2)(1+t/M^2(s_1))(1+t/M^2(s_2))}} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\kappa_m(s_1)\kappa_m(s_2)\sin^2 \chi G(s_1)G^*(s_2) - j \sin \chi \cos \chi \times \right. \right. \\ & \times \left. \left(\kappa_m(s_1)G(s_1)G'^*(s_2) - \kappa_m(s_2)G'(s_1)G^*(s_2) \right) + \cos^2 \chi G'(s_1)G'^*(s_2) \right] \frac{w_2(t)}{w_2'(t)} - \quad (82) \\ & - \frac{1}{M(s_1)M(s_2)} \left[\sin^2 \chi G'(s_1)G'^*(s_2) + j \sin \chi \cos \chi \left(\kappa_m(s_1)G(s_1)G'^*(s_2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \kappa_m(s_2)G'(s_1)G^*(s_2) \right) + \kappa_m(s_1)\kappa_m(s_2)\cos^2 \chi G(s_1)G^*(s_2) \right] \frac{w_2'(t)}{w_2(t)} \left. \right\} dt, \end{aligned}$$

где $G'(s) = k^{-1} \partial G(s) / \partial s$,

$$G(s) = \int_{-l_0/2}^{l_0/2} e(l) g(s + l \sin \chi) e^{jk \cos \chi l} dl, \quad (83)$$

С учетом того, что $\nu \approx 0$ при $s \approx s_0$, изменением $g(s + l \sin \chi)$ в пределах интегрирования в этом случае можно пренебречь и получить приближенное равенство:

$$G(s) = G_m(s) \cong \frac{1}{2j} [g_1(s) f(\beta_m) - g_2(s) f(-\beta_m)], \quad (84)$$

Из представления поля в виде (45), (47) следует выражение для проводимости в виде суммы двух слагаемых (77), где:

$$Y_{21m}^{(1)} = \int_{-j\infty}^{\infty} \hat{Y}_m^{(1)}(s_2, s_1, t) dt \begin{cases} f^*(\beta_m(s_2, t)) f(\beta_m(s_1, t)), & s_2 > s_1 \\ f^*(-\beta_m(s_2, t)) f(-\beta_m(s_1, t)), & s_1 > s_2 \end{cases}, \quad (85)$$

$$Y_{21 m}^{(2)} = - \int_{-j\infty}^{\infty} \hat{Y}_m^{(2)}(s_2, s_1, t) f^*(\beta_m(s_2, t)) f(-\beta_{-m}(s_1, t)) dt, \quad (86)$$

$$\hat{Y}_m^{(i)}(s_2, s_1, t) = j \frac{k}{4\pi Z} \frac{\left[K_m^{(i)}(t, s_1, s_2) \frac{w_2(t)}{w_2'(t)} - \frac{N_m^{(i)}(t, s_1, s_2)}{M(s_1)M(s_2)} \frac{w_2'(t)}{w_2(t)} \right]}{\sqrt{M(s_1)M(s_2)\rho(s_1)\rho(s_2)}(1+t/M^2(s_1))(1+t/M^2(s_2))}, \quad (87)$$

$$K_m^{(1)}(t, s_1, s_2) = \kappa_m(s_1)\kappa_m(s_2) \sin^2 \chi g_2(s_{\max}, t)g_1(s_{\min}, t) \mp j \sin \chi \cos \chi \times \\ \times (\kappa_m(s_{\min})g_2'(s_{\max}, t)g_1(s_{\min}, t) - \kappa_m(s_{\max})g_2(s_{\max}, t)g_1'(s_{\min}, t)) +, \quad (88a) \\ + \cos^2 \chi g_2'(s_{\max}, t)g_1'(s_{\min}, t)$$

$$K_m^{(2)}(t, s_1, s_2) = \kappa_m(s_1)\kappa_m(s_2) \sin^2 \chi g_2(s_1, t)g_2(s_2, t) - j \sin \chi \cos \chi (\kappa_m(s_1) \times \\ \times g_2(s_1, t)g_2'(s_2, t) - \kappa_m(s_2)g_2'(s_1, t)g_2(s_2, t)) + \cos^2 \chi g_2'(s_1, t)g_2'(s_2, t), \quad (88b)$$

$$N_m^{(1)}(t, s_1, s_2) = \sin^2 \chi g_2'(s_{\max}, t)g_1'(s_{\min}, t) \pm j \sin \chi \cos \chi \times \\ \times (\kappa_m(s_{\min})g_2'(s_{\max}, t)g_1(s_{\min}, t) - \kappa_m(s_{\max})g_2(s_{\max}, t)g_1'(s_{\min}, t)) +, \quad (89a) \\ + \kappa_m(s_1)\kappa_m(s_2) \cos^2 \chi g_2(s_{\max}, t)g_1(s_{\min}, t)$$

$$N_m^{(2)}(t, s_1, s_2) = \sin^2 \chi g_2'(s_1, t)g_2'(s_2, t) + j \sin \chi \cos \chi \times \\ \times (\kappa_m(s_1)g_2(s_1, t)g_2'(s_2, t) - \kappa_m(s_2)g_2'(s_1, t)g_2(s_2, t)) +, \quad (89b) \\ + \kappa_m(s_1)\kappa_m(s_2) \cos^2 \chi g_2(s_1, t)g_2(s_2, t)$$

где $s_{\max} = \max(s_1, s_2)$, $s_{\min} = \min(s_1, s_2)$, $\beta_m(s, t) = \kappa_m \cos \chi + v(s, t) \sin \chi$, верхние знаки соответствуют $i = 1$, нижние – $i = 2$. Контур интегрирования в (85) идет по мнимой отрицательной полуоси от $-j\infty$ до 0 и далее до ∞ по вещественной положительной полуоси. При этом остающаяся в стороне особая точка $t = -M^2$ не препятствует численному интегрированию. Это соотношение справедливо только в случае непересекающихся проекций щелей на образующую. В частности, оно не пригодно для собственной проводимости щели, т. к. в этом случае интегрирование по поверхности щелей не сводится к произведению функций f^*f .

Интегралы (85), (86) можно вычислить по теореме о вычетах:

$$Y_{21 m}^{(i)} = \mp \frac{k}{2Z} \frac{(A_m^{(i)} - B_m^{(i)})}{\sqrt{M(s_1)M(s_2)\rho(s_1)\rho(s_2)}}, \quad (90)$$

$$A_m^{(i)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^*(\beta_m(s_2, t_k')) f(\pm\beta_{\pm m}(s_1, t_k'))}{t_k' \sqrt{(1+t_k'/M^2(s_1))(1+t_k'/M^2(s_2))}} K_m^{(i)}(t_k'), \quad (91)$$

$$B_m^{(i)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^*(\beta_m(s_2, t_k)) f(\pm\beta_{\pm m}(s_1, t_k))}{M(s_1)M(s_2)\sqrt{(1+t_k/M^2(s_1))(1+t_k/M^2(s_2))}} N_m^{(i)}(t_k), \quad (92)$$

где t_k – корни второй функции Эйри, а t_k' – ее производной. При больших радиусах кривизны поверхности множителями $1 + t/M^2$ обычно можно пренебречь, а также считать, что $\beta_m(s, t) \cong \beta_m(s) = \sin(\chi + \phi_m(s))$, где $\phi_m(s) = \arcsin(\kappa_m)$. Ряды вычетов сходятся тем быстрее, чем больше размеры поверхности и расстояние между щелями.

Выражения (82)–(92) становятся несправедливыми, если каустика приходится на одну из щелей и, одновременно, экватор или цилиндрическую область поверхности.

Для случая каустики, удаленной от обеих щелей, из (62) получим выражение для проводимости через поверхностные функции Фока $\nu(x)$ и $u(x)$ [14]:

$$Y_{21m} \cong \frac{ke^{-j\frac{\pi}{4}}}{4\sqrt{\pi Z}} \frac{e^{-jk|\tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_1|}}{\sqrt{M(s_1)M(s_2)\rho(s_1)\rho(s_2)}} \int_{s_{a2}} \int_{s_{a1}} \frac{e(l)^* e(l') e^{j\beta k(l-l')}}{\sqrt{\cos(\phi)\cos(\phi')|x-x'|}} \times \\ \times \left\{ 2\cos(\chi + \phi)\cos(\chi + \phi')\nu(|x-x'|) + \frac{\sin(\chi + \phi)\sin(\chi + \phi')}{M(s_1)M(s_2)} \frac{u(|x-x'|)}{|x-x'|} \right\} dl' dl, \quad (93)$$

При разнесенных щелях изменением функций аргументов x и x' в пределах щели можно пренебречь и:

$$Y_{21m} \cong \frac{ke^{-j\frac{\pi}{4}}}{4\sqrt{\pi Z}} \frac{f^*(\beta_m(s_2))f(\beta_m(s_1)) e^{-jk|\tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_1|}}{\sqrt{M(s_1)M(s_2)\rho(s_1)\rho(s_2)\cos(\phi_1)\cos(\phi_2)|x_2-x_1|}} \times \\ \times \left\{ 2\cos(\chi + \phi_1)\cos(\chi + \phi_2)\nu(|x_2-x_1|) + \frac{\sin(\chi + \phi_1)\sin(\chi + \phi_2)}{M(s_1)M(s_2)} \frac{u(|x_2-x_1|)}{|x_2-x_1|} \right\}. \quad (94)$$

Формула для взаимной проводимости щелей, соответствующая приближению ГТД, вытекает из представления поля (67):

$$Y_{21} \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi|\Phi''_0|}} Y_{21\mu} e^{-j\left[\mu(\phi_2 - \phi_1) - \frac{\pi}{4}\right]}, \quad (95)$$

где μ – решение уравнения (65) ($q = 0$), а $Y_{21\mu}$ – определяется (93), (94) при $m = \mu$.

Сравнение различных выражений для проводимости, их тестирование и определение границ применимости удобно провести на простом примере кольцевых щелей на поверхности сферы, что и будет сделано ниже.

3. Взаимная проводимость кольцевых щелей в проводящей сферической поверхности

Рассмотрим в качестве примера и теста полученных соотношений кольцевые щели на сфере с распределением поля в щели $e(\varphi) = e^{-jm\varphi}$. Коэффициенты Фурье распределения поля в щели (73) $f_m = 2\pi\rho\delta_{mm}$. Для сферической поверхности радиуса a длина дуги образующей $s = a\theta$, радиус кривизны поверхности $\rho = a$, $M = (ka/2)^{1/3} = \text{const}$. Угол наклона щелей $\chi = 0$.

Выражения для взаимной проводимости (76)–(78) для кольцевых щелей принимает вид (при учете конечной ширины щелей b и равномерном распределении поля поперек щели):

$$Y_{21}^{(1,2)} = j \frac{ka}{Z} \sqrt{\sin \theta_1 \sin \theta_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{kb}{2}u\right)}{\frac{kb}{2}u} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{(\kappa^2(\theta_1) + u^2)(\kappa^2(\theta_2) + u^2)}} \times$$

$$\times \left[Mu^2 \frac{w_2(t)}{w_2'(t)} \mp \frac{1}{M} \kappa(\theta_1)\kappa(\theta_2) \frac{w_2'(t)}{w_2(t)} \right] \begin{cases} e^{-jka(\theta_2 - \theta_1)u} \\ -je^{-jk(\sigma_2 + \sigma_1)u} \end{cases} du \quad , (96)$$

где $\kappa(\theta) = m/ka \sin \theta$, $t = -M^2(1 - \kappa(\theta_1)\kappa(\theta_2) - u^2)$.

Интеграл (18) берется в квадратурах:

$$\sigma = \begin{cases} \frac{m}{k} \left[\frac{1}{c} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta - c^2}}{\cos \theta} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta - c^2}}{c \cos \theta} \right) \right], & m \neq 0 \\ a\theta \sqrt{1 + \frac{t}{M^2}}, & m = 0 \end{cases} \quad , (97)$$

где:

$$c = \frac{m}{ka\sqrt{1 + \frac{t}{M^2}}}. \quad (98)$$

Соотношение (82) в случае кольцевой щели:

$$Y_{21} = j \frac{2ka}{ZM} \sqrt{\sin \theta_1 \sin \theta_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{kb}{2}v(\theta_1)\right)}{\frac{kb}{2}v(\theta_1)} \frac{\sin\left(\frac{kb}{2}v(\theta_2)\right)}{\frac{kb}{2}v(\theta_2)} \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{M^2}\right)} \times \\ \times \left\{ g'(\theta_1, t) g'(\theta_2, t) \frac{w_2(t)}{w_2'(t)} - \frac{\kappa(\theta_1)\kappa(\theta_2)}{M^2} g(\theta_1, t) g(\theta_2, t) \frac{w_2'(t)}{w_2(t)} \right\} dt \quad (99)$$

При $|\theta_2 - \theta_1| > b/a$ справедливо:

$$Y_{21} = -\frac{ka}{ZM} \sqrt{\sin \theta_1 \sin \theta_2} \int_{-j\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{kb}{2}v(\theta_1)\right)}{\frac{kb}{2}v(\theta_1)} \frac{\sin\left(\frac{kb}{2}v(\theta_2)\right)}{\frac{kb}{2}v(\theta_2)} \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{M^2}\right)} \times \\ \times \left\{ g_2'(\theta_{\max}, t) g'(\theta_{\min}, t) \frac{w_2(t)}{w_2'(t)} - \frac{\kappa(\theta_1)\kappa(\theta_2)}{M^2} g_2(\theta_{\max}, t) g(\theta_{\min}, t) \frac{w_2'(t)}{w_2(t)} \right\} dt \quad (100)$$

где θ_{\max} – максимальный, а θ_{\min} – минимальный из углов θ_1, θ_2 .

Интеграл (100) может быть вычислен по теореме о вычетах:

$$Y_{21} = \frac{j2\pi ka}{ZM} \sqrt{\sin \theta_1 \sin \theta_2} \left(\frac{\sin\left(\frac{kb}{2}v(\theta_1)\right)}{\frac{kb}{2}v(\theta_1)} \frac{\sin\left(\frac{kb}{2}v(\theta_2)\right)}{\frac{kb}{2}v(\theta_2)} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{t_k' \left(1 + \frac{t_k'}{M^2}\right)} g_2'(\theta_{\max}, t_k') g'(\theta_{\min}, t_k') - \frac{\kappa_{m1}\kappa_{m2}}{M^2 \left(1 + \frac{t_k'}{M^2}\right)} g_2(\theta_{\max}, t_k') g(\theta_{\min}, t_k') \right\}. \quad (101)$$

Вклад волны, отраженной от каустики, $Y_{21}^{(2)}$ плохо вычисляется численным интегрированием в (96), поскольку подынтегральная функция является быстроосциллирующей. Зато он может быть легко вычислен как сумма вычетов. При $m \neq ka$ не имеет смысла вычислять по теореме о вычетах интеграл (96), т. к.

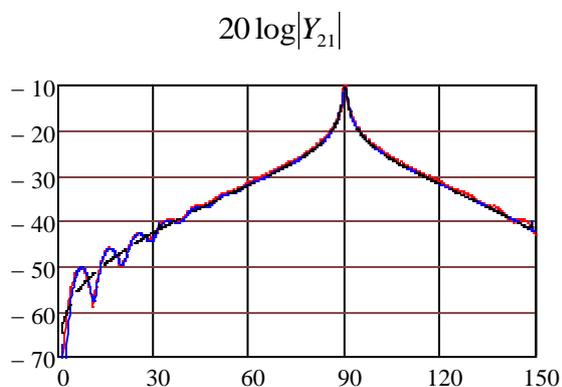
более точное выражение, справедливое при всех значениях s_1 и s_2 , получается из (101) при замене функции g и ее производной g' на $jpg_2/2$ и $jpg_2'/2$, соответственно.

Рассмотрим результаты расчетов по этим формулам для кольцевых щелей шириной $b = 0,06\lambda$ на сфере радиуса $a = 3\lambda$.

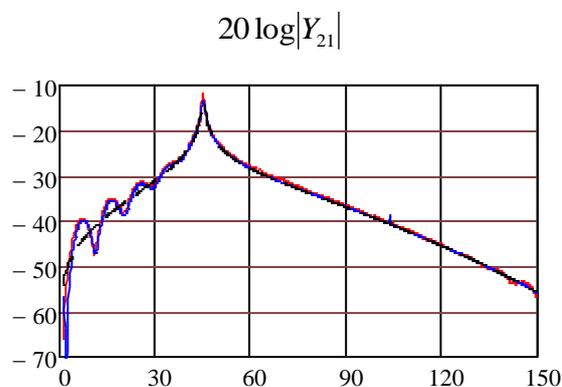
Зависимости модуля (дБ) и фазы взаимной проводимости кольцевых щелей от угла расположения первой щели θ_1 при расположении второй щели при $\theta_1 = 90^\circ$ и $\theta_1 = 45^\circ$, для нескольких значений номера моды возбуждения m , полученные численным интегрированием по верхней формуле (96) и ряду вычетов для $Y_{21}^{(2)}$, приведены на рис. 1 и 2, соответственно. Для сравнения приведены результаты, полученные строгим методом собственных функций [6], а также отдельно вклад прямой волны между щелями $Y_{21}^{(1)}$ без учета вклада волны, отраженной от каустики поверхностных лучей $Y_{21}^{(2)}$. Результаты расчета по асимптотическим формулам хорошо совпадают с результатами строгого решения для не слишком разнесенных щелей. Число членов ряда вычетов $K = 10$ может быть дополнительно уменьшено, а второе слагаемое в (101) для данной поляризации может быть отброшено без ухудшения результатов. Наличие частых осцилляций строгого решения (рис. 1 ж, з) обусловлено, вероятно, многократным обходом электромагнитной волны вокруг сферы, для учета которого в асимптотическом решении необходимо полное асимптотическое решение, тогда как в данной работе найден только его главный член. Впрочем, эти осцилляции имеют очень низкий уровень по амплитуде и уменьшаются при увеличении радиуса сферы. Вклад ряда вычетов, описывающего влияние волны, отраженной от каустики, также невелик. Он проявляется в виде осцилляций взаимной проводимости достаточно удаленных щелей и не меняет общего характера убывания связи щелей. При расчете эффектов взаимной связи в многоэлементных антенных решетках его можно не учитывать, используя в этом случае только одну формулу (78).

Результаты расчета путем численного интегрирования (100) и суммирования вычетов (101) превосходно согласуются между собой. Поэтому дальнейшие расчеты выполнены методом суммирования вычетов, что

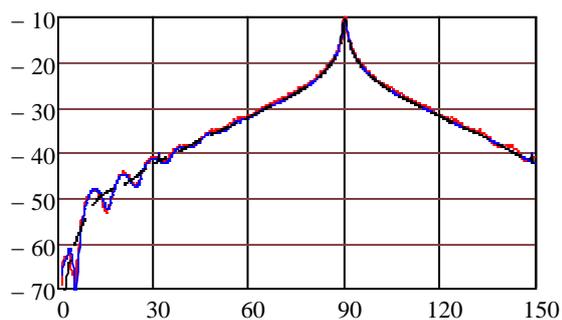
значительно проще. На рис. 3 приведены зависимости модуля взаимной проводимости кольцевых щелей, выполненные по формуле (101) и методом собственных функций. Как видно, асимптотические результаты расчета везде хорошо совпадают со строгим решением, кроме узкой области углов, в которой щели перекрываются между собой.



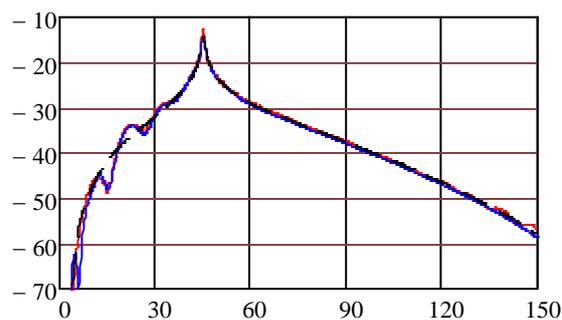
а) $m = 0, \theta_2 = 90^\circ$



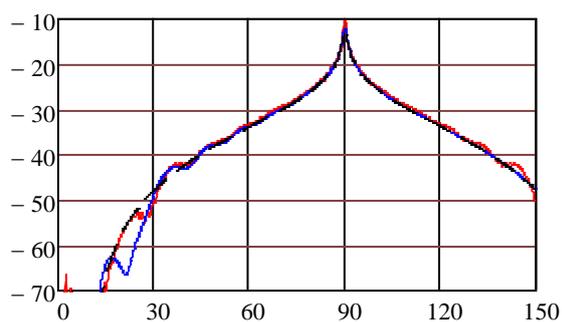
б) $m = 0, \theta_2 = 45^\circ$



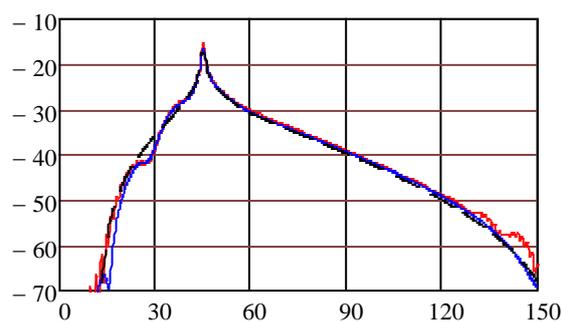
в) $m = 1, \theta_2 = 90^\circ$



г) $m = 4, \theta_2 = 45^\circ$



д) $m = 8, \theta_2 = 90^\circ$



е) $m = 8, \theta_2 = 45^\circ$

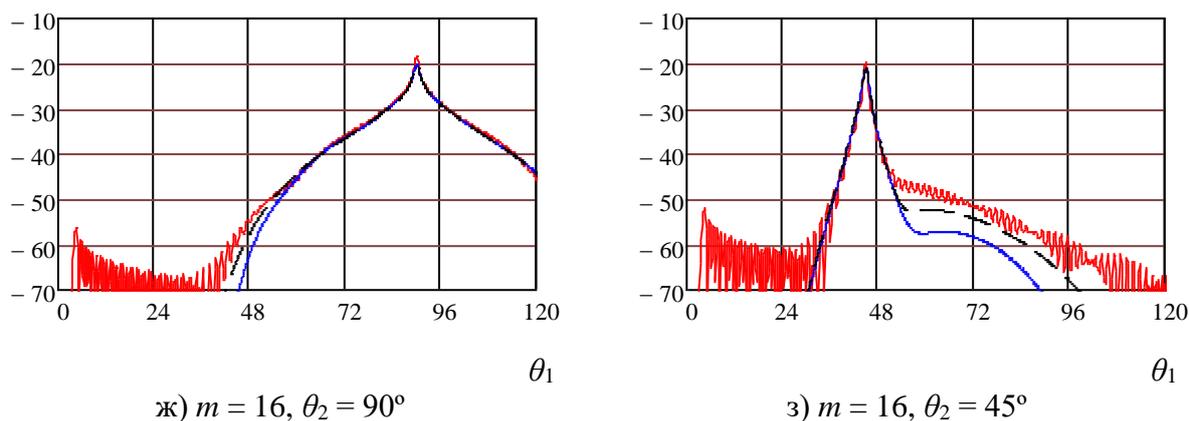


Рис. 1. Модуль взаимной проводимости кольцевых щелей: красная линия – метод собственных функций, синяя линия – $Y_{21}^{(1)}(96) + Y_{21}^{(2)}(101)$, чёрная пунктирная линия – вклад прямой волны $Y_{21}^{(1)}$.

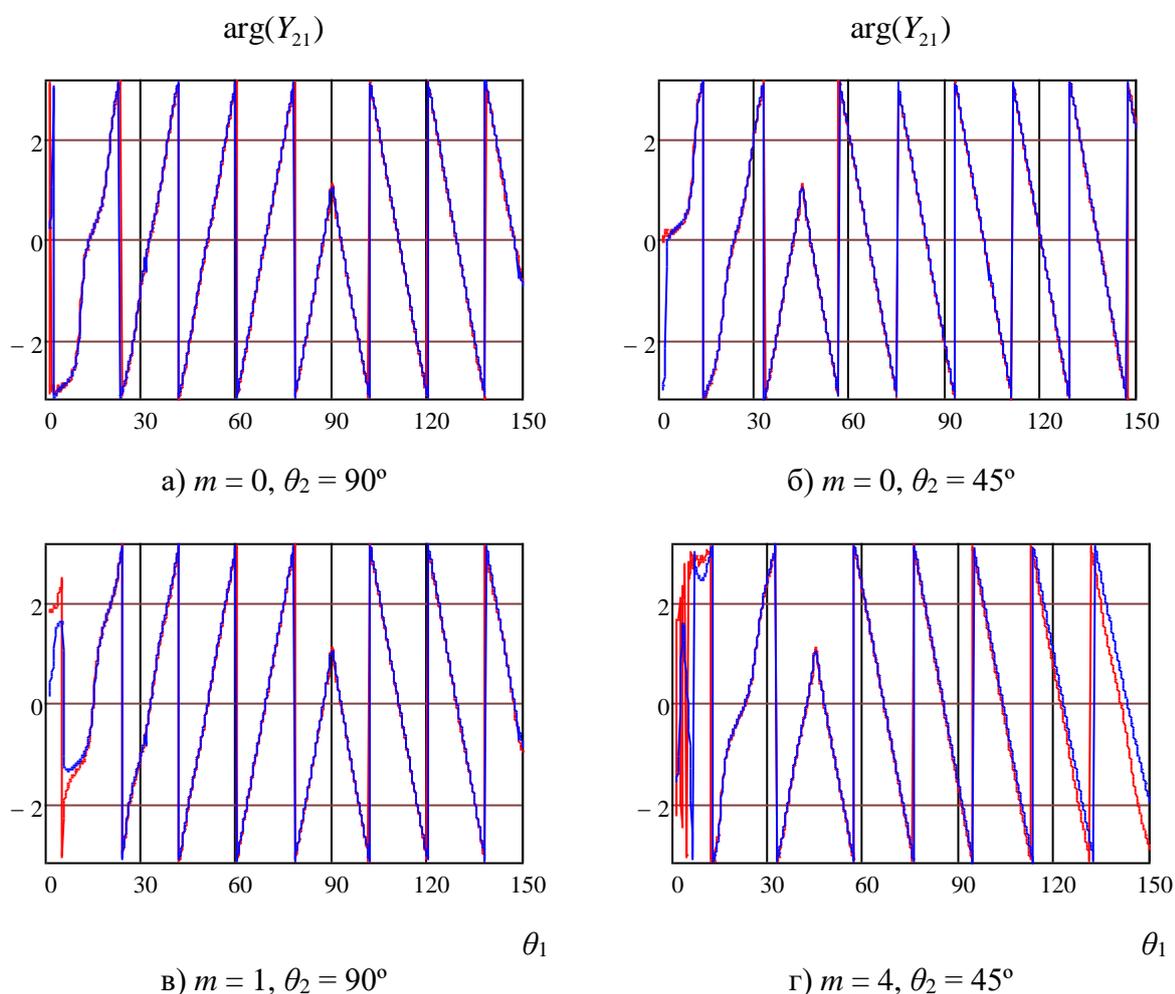


Рис. 2. Фаза взаимной проводимости щелей: красная линия – метод собственных функций, синяя линия – $Y_{21}^{(1)}(96) + Y_{21}^{(2)}(101)$.

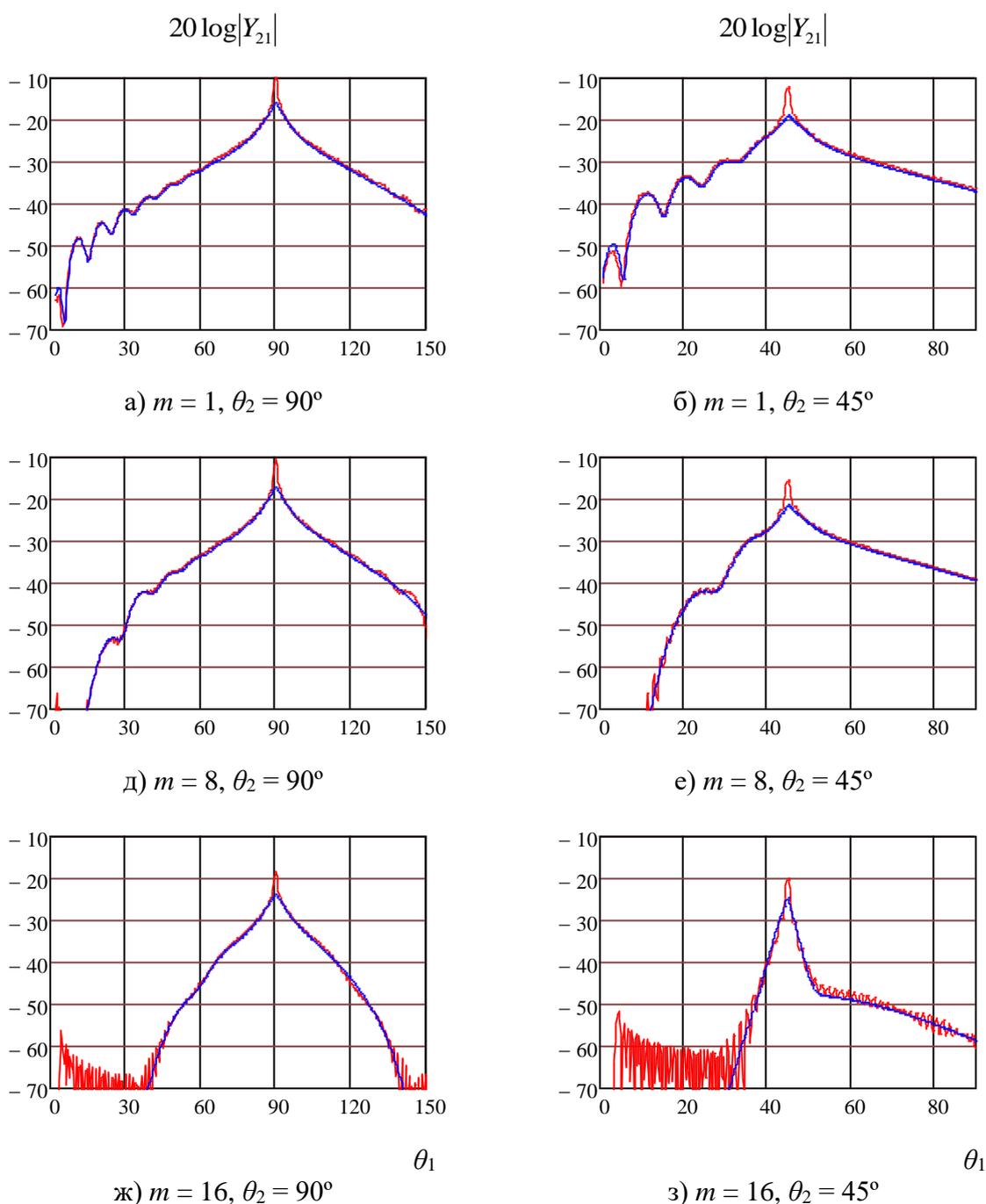


Рис. 3. Модуль взаимной проводимости щелей: красная линия – сумма вычетов (103); синяя линия – метод собственных функций.

При пересекающихся щелях выражение (101) несправедливо и нужно воспользоваться формулой (99), в которой интеграл в окрестности точки $t = -M^2$ понимается в смысле главного значения. Ее применение затрудняется сложностью выбора ветвей многозначных функций при $t < -M^2$ и медленной сходимостью при больших положительных значениях t . Тем не менее, результаты расчета приведены на рис. 4 в сравнении со строгим расчетом и

расчетом по (96) и (101). Как видим, наилучшие результаты получаются по наиболее простой формуле (96).

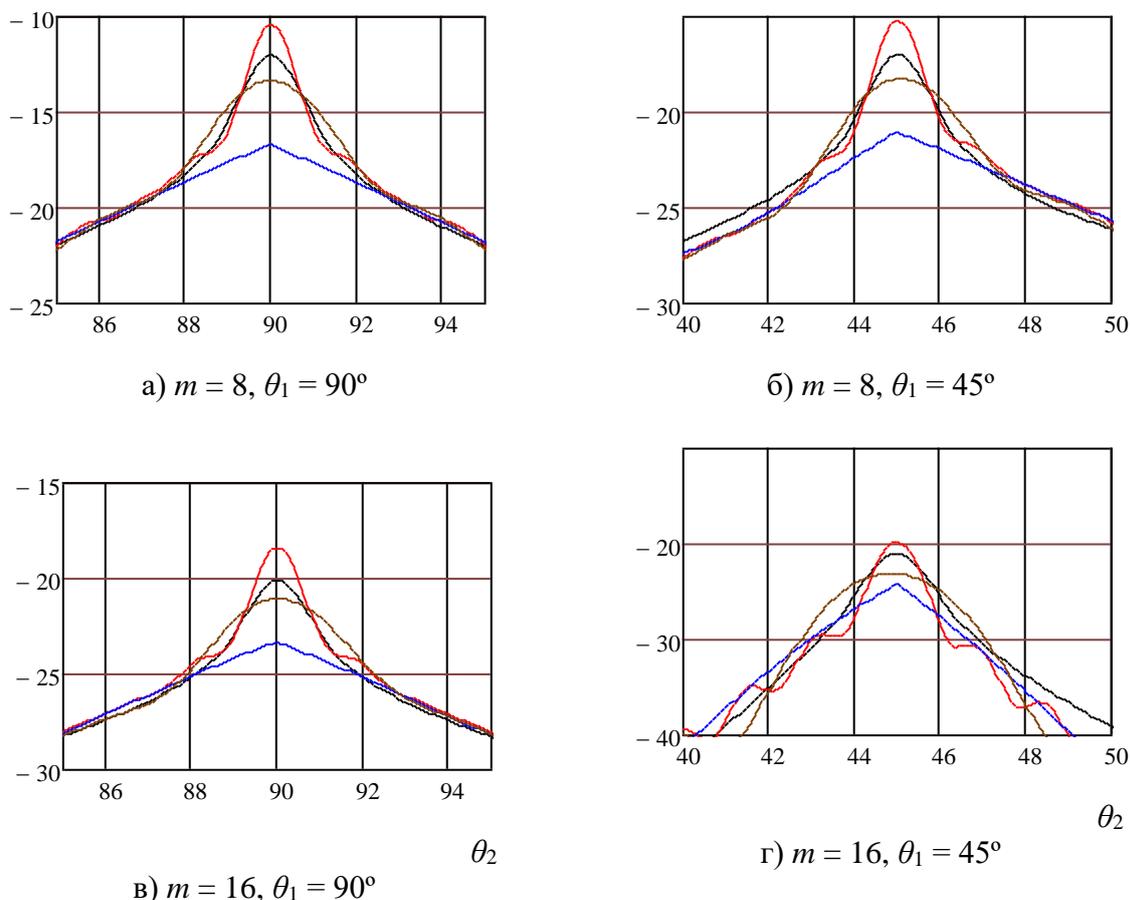


Рис. 4. Взаимная проводимость щелей:
 красная линия – метод собственных функций, синяя линия – сумма вычетов (101), чёрная линия – интегрирование по (96), коричневая линия – интегрирование по (99).

Таким образом, для расчета собственных и взаимных проводимостей щелей наилучшими асимптотическими формулами являются интегральное выражение (96) для собственной проводимости кольцевых щелей и взаимной проводимости при не слишком разнесенных щелях и сумма вычетов (101) для взаимной проводимости. Для расчетов антенных решеток достаточно использовать вклад прямой волны $Y_{21}^{(1)}$ (96). Интересно отметить, что асимптотические выражения дают прекрасные результаты несмотря на то, что для рассмотренного примера «большой параметр задачи» $M = 2,11$ не удовлетворяет условию $M \gg 1$.

Заключение

Получены асимптотические выражения для электромагнитного поля и собственных и взаимных проводимостей «одномодовых» щелей в произвольной гладкой выпуклой поверхности вращения большого размера в виде ряда по азимутальным гармоникам. Коэффициенты ряда выражаются интегралами по спектру волн, которые могут быть вычислены численно или суммированием быстроходящегося ряда вычетов. Выражения для коэффициентов равномерно справедливы на всей поверхности, кроме окрестности полюсов поверхности вращения, и не имеют разрывов на каустиках поверхностных лучей.

Полученные выражения могут быть непосредственно использованы для расчета полей и собственных и взаимных проводимостей кольцевых щелей на произвольной выпуклой поверхности вращения. В дальнейшем предполагается их использование для расчета эффектов взаимной связи в осесимметричных антенных решетках щелевых излучателей.

Для случая поверхности, допускающей разделение переменных и применение метода собственных функций, полученные асимптотические выражения позволяют избежать свойственного методу собственных функций суммирования медленно сходящихся двойных рядов и выполнить расчеты при больших размерах поверхности. Сравнение результатов расчета проводимостей кольцевых щелей в проводящей сферической поверхности, полученных предлагаемым методом и методом собственных функций, показало их хорошее совпадение даже для сравнительно небольшого радиуса сферы, равного 3λ .

В ходе дальнейшей работы автор предполагает учесть, что при отходе от поверхности электромагнитное поле не представляется суммой полей Е- и Н-типа, а также рассмотреть другие типы излучателей, например электрические вибраторы.

Литература

1. Орлова Н.С. Электромагнитные поля диполей вблизи металлического выпуклого тела больших электрических размеров. *Радиотехника и электроника*. 1974. Т.19. №7. С.1372-1377.
2. Pathak P.H., Kouyoumjian R.G. *An analysis of the radiation from apertures in curved surfaces by the geometrical theory of diffraction*. IEEE Proceedings. 1974. V.62. P.1438-1447.
3. Pathak P.H., Wang N., Burnside W.D., Kouyoumjian R.G. A Uniform GTD Solution for the Radiation from Sources on a Convex Surface. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1981. V.29. №4. P.609-622.
4. Lee S.-W., Safavi-Naini S. Approximate Asymptotic Solution of Surface Field due to a Magnetic Dipole. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1978.V.26. №4. P.593-598.
5. Lee S.-W. Mutual Admittance of Slots on a Cone: Solution by Ray Technique. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1978. V.26. №6. P.768-773.
6. Инденбом М.В., Скуратов В.А. Модальный подход в методе расчета осесимметричных антенных решеток с учетом взаимодействия щелевых излучателей на основе разложения электромагнитного поля по собственным функциям внешней области поверхности антенны. *Радиотехника*. 2021. №5. С.117-131.
7. Вайнштейн Л.А. *Электромагнитные волны*. Москва, Радио и связь. 1988. 440 с.
8. Фелсен Л., Маркувец Н. *Излучение и рассеяние волн. Том 1 / Пер. с англ. под ред. М.Л. Левина*. Москва, Мир. 1978. 547 с.
9. Маслов В.П. *Операторные методы*. Москва, Наука. 1973. 543 с.
10. Федорюк М.В. *Асимптотика. Интегралы и ряды*. Москва, Наука. 1987. 544 с.
11. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. *Возбуждение электромагнитных волн*. Москва, Радио и связь. 1983. 296 с.

12. Фок В.А. *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных*

волн. Москва, Советское радио. 1970. 520 с.

13. Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. *Основы теории антенн.* Москва, Дрофа. 2007.

491 с.

14. Lee S.-W., Safavi-Naini S. Approximate asymptotic solution of surface field due to a magnetic dipole on a cylinder. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation.* 1978. V.AP-26. №4. P.593-598.

Для цитирования:

Инденбом М.В. Приближенные асимптотические выражения для электромагнитного поля и взаимной проводимости щелей в проводящей выпуклой поверхности вращения в виде рядов по азимутальным гармоникам. *Журнал радиоэлектроники [электронный журнал].* 2021. №9.

<https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.9.12>