DOI: https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.9.8
УДК: 621.391

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ПРОНИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА МНОГОЧАСТОТНЫХ СИГНАЛОВ

С. И. Минкин

**Севастопольский государственный университет,
299053, Севастополь, ул. Университетская, 33**

Статья поступила в редакцию 3 сентября 2021 г.

Аннотация. Рассмотрены вопросы цифрового спектрального анализа сигналов. Доказана и реализована возможность точного представления комплексной дискретной последовательности в виде линейной комбинации некратных гармоник без затухания. Предложен конечный алгоритм, модифицирующий метод Прони, с гарантированным расположением полюсов соответствующей авторегрессионной модели на окружности единичного радиуса. Разработана схема экономизации порядка модели в условиях избыточности данных по отношению к предполагаемому ограниченному количеству гармонических составляющих сигнала.

Ключевые слова: спектр многочастотного сигнала, метод Прони, эрмитово-тёплицевы матрицы, редукция модели.

Abstract. The issues of digital spectral analysis of signals were considered. The possibility of accurate representation of a complex discrete sequence in the form of a linear combination of multiple harmonics without attenuation has been proved and implemented. A finite algorithm modifying the Prony's method was proposed, with a guaranteed arrangement of the poles of the corresponding autoregressive model on the circle of a unit radius. A scheme of economization of the order of the model in conditions of data redundancy in relation to the estimated limited number of harmonic components of the signal was developed.

Key words: spectrum of a multifrequency signal, Prony's method, Hermitian-Toeplitz matrices, model reduction.

Введение.

Метод Прони [1] представления дискретной последовательности линейной комбинацией (в том числе и незатухающих) гармоник остаётся одним из наиболее надёжных и рабочих алгоритмов. Доказательством этого утверждения является его наличие в ряде пакетов математических программ. Однако, на практике нет гарантии расположения полюсов авторегрессионной модели на границе или в области устойчивости модели. Таким образом, во всех случаях рекомендуется коррекция результатов путём устранения полюсов, не подходящих для выбранной модели. Известные работы в этом направлении [2, 3, 4] сводятся к сложным вычислительным процедурам или различным рекомендациям практического характера.

Актуальность исследования связана с тем, что при решении ряда задач систем управления, электрорадиотехники, обработки сигналов [5, 8] оперируют короткими комплексными сигналами многочастотного (полигармонического состава) [7]. При этом эффективность расчётов ограничена разрешающей способностью методов Фурье. Вместе с тем, данное направление представляет и определённый теоретический интерес.

Целью работы является разработка теории и алгоритмизация представления комплексной дискретной последовательности линейной комбинацией незатухающих гармоник. Фактически, речь идёт об обобщении дискретного преобразования Фурье с неравномерным распределением частот или о решении соответствующей задачи интерполяции.

Новизна исследования заключается в обосновании и реализации точного, конечного алгоритма согласно поставленной цели.

1. Основной алгоритм.

Представленные здесь результаты основываются на обнаруженном Каратеодори и Фейером в 1910-х годах [6] факте: неотрицательно определённая эрмитово-теплицева матрица (порядка $m \cdot m,\ rank < m$) может быть факторизована в виде

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{V}^H \boldsymbol{R} \boldsymbol{V}, \ (1)$$

где $\boldsymbol{V} -$ матрица Вандермонда со всеми унимодулярными элементами, $\boldsymbol{V}^H$ −эрмитово-сопряжённая матрица, $\boldsymbol{R}$ −диагональная матрица вещественных положительных чисел.

Чтобы воспользоваться этим результатом предложено модифицировать известный метод Прони [1] путём ввода исходных данных в составе неотрицательно определённой эрмитово-тёплицевой матрицы пониженного ранга.

Итак, пусть дана последовательность $\{t_k\}_1^n$, в общем случае, комплексных чисел, которую нужно интерполировать линейной комбинацией различных незатухающих гармоник

$$t_k = \sum_{m=0}^{n-1} r_m \cdot \exp(ik\omega_m)\,; \ \ k = 1, \dots, n; \ \ \ r_m, \omega_m \in \mathrm{R};\ t_{-k} = \overline{t_k}\ . \ (2)$$

Дополним исходную последовательность положительным значением

$$t_0 > \sum_{k=1}^{n} |t_k|\ . \ (3)$$

В дальнейшем это обеспечит строгое диагональное преобладание в формируемой положительно определённой эрмитово-теплицевой матрице [9].

Заметим, что последовательность $\{t_k\}_0^n$ можно интерпретировать как начальные коэффициенты разложения в ряд дробно-рациональной функции комплексного аргумента (авторегрессионной модели, точнее, АРСС модели [1]) в окрестности бесконечно удалённой точки

$$t_0 + t_1 z^{-1} + \cdots + t_n z^{-n} + \cdots = \frac{d_n z^n + d_{n-1} z^{n-1} + \ldots + d_1 z + d_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}\ . \ (4)$$

Из теории обращения дискретного преобразования Лапласа понятно, что последовательность $\{t_k\}$ имеет частотный спектр, совпадающий с корнями многочлена знаменателя (4).

Будем говорить, что последовательность $\{t_k\}$ «обнуляет» многочлен знаменателя (4), если

$$t_0a_0 + t_1a_1 + \cdots + t_{n-1}a_{n-1} + t_n = 0. \quad (5)$$

Коэффициенты многочлена, который «обнуляется» последовательностью $\{t_k\}_0^n$ (в том числе и другими последовательностями, представленными ниже строками положительно определённой эрмитово-теплицевой матрицы $\boldsymbol{T}$), удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_{n-1} & t_n \\ \overline{t_1} & t_0 & \dots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{t_{n-1}} & \overline{t_{n-2}} & \cdots & t_0 & t_1 \\ \overline{t_n} & \overline{t_{n-1}} & \cdots & \overline{t_1} & t_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В общем случае ранг матрицы (6) коэффициентов уравнений $rank(\boldsymbol{T}) = n + 1$. Чтобы воспользоваться свойством (1) попытаемся допустимым выбором t_0 (3) понизить ранг данной матрицы на единицу. Для этого факторизуем матрицу $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}^H \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{U}\,, \quad (7)$$

где $\boldsymbol{U} -$ унитарная матрица, $\boldsymbol{\Sigma}$ - диагональная вещественная матрица с положительными элементами σ_k, упорядоченными по убыванию. Далее сформируем матрицу

$$\widehat{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T} - \sigma_{min}\boldsymbol{I}, \quad (8)$$

где $\sigma_{min} -$ минимальное сингулярное число (оно же минимальное собственное значение) положительно определённой эрмитовой матрицы $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{I}$ - диагональная единичная матрица. Теперь нетрудно видеть, что наименьшее сингулярное число матрицы $\widehat{\boldsymbol{T}}$ равно нулю, так как

$$\widehat{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{U}^H \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{U} - \sigma_{min}\boldsymbol{I}, \;\; \widehat{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{U}^H(\boldsymbol{\Sigma} - \sigma_{min}\boldsymbol{I})\boldsymbol{U}. \quad (9)$$

При этом все диагональные элементы матрицы $\boldsymbol{T}$ уменьшаются до значения

$$\widehat{t_0} = t_0 - \sigma_{min}, \quad (10)$$

а вне диагональные - остаются неизменными. В результате, $\widehat{\boldsymbol{T}}$ - неотрицательно определённая эрмитово-тёплицева матрица ранга $rank(\widehat{\boldsymbol{T}}) = n$. Стоит заметить, что понижение ранга другим способом, например обнулением лишь одного минимального сингулярного числа, не позволит сохранить тёплицеву структуру матрицы коэффициентов.

Теорема:

Пусть $\boldsymbol{T}$ – квадратная эрмитово-тёплицева матрица с диагональными элементами $t_{kk} = t_0$. Тогда, матрицы $\boldsymbol{T} - \sigma_k \boldsymbol{I}$ не зависят от t_0, где σ_k - собственные значения матрицы $\boldsymbol{T}$.

Доказательство:

представим $\boldsymbol{T}$ в виде суммы

$$\boldsymbol{T} = t_0 \boldsymbol{I} + \boldsymbol{K},$$

где $\boldsymbol{K}$ – матрица, диагональ которой равна нулю. Тогда, собственные значения матрицы $\boldsymbol{T}$

$$\sigma_k = t_0 + \mu_k,$$

где μ_k - собственные значения матрицы $\boldsymbol{K}$ (не зависящие от t_0). В результате,

$$\boldsymbol{T} - \sigma_k \boldsymbol{I} = \boldsymbol{K} - \mu_k \boldsymbol{I}$$

Доказательство теоремы выполнено.

Опираясь на результаты доказанной теоремы, можно утверждать, что матрица $\widehat{\boldsymbol{T}}$ (8) не зависит от t_0 из диапазона (3). В процессе обоснований этот элемент играет только вспомогательную роль.

Возвращаясь к системе уравнений (6), можно убедиться, что для многочленов вида (5) последнее из уравнений тождественно первому. Доказательство опирается на тот факт, что в соответствии со свойством (1) решением системы уравнений (6) будут коэффициенты многочлена знаменателя (4), обладающего только унимодулярными корнями, то есть эрмитово симметрической структурой (с учётом монической формы записи многочлена $a_k = a_0 \overline{a_{n-k}}), \quad k = 0,1, \dots n$). Исключая последнее уравнение и, с учётом коррекции диагонали матрицы $\boldsymbol{T}$, преобразуем (6) к стандартному виду

$$\begin{pmatrix} \widehat{t_0} & t_1 & \cdots & t_{n-1} \\ \overline{t_1} & \widehat{t_0} & \cdots & t_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{t_{n-1}} & \overline{t_{n-2}} & \cdots & \widehat{t_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} t_n \\ t_{n-1} \\ \cdots \\ t_1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

Вычисление амплитудного спектра можно осуществить аналогично классическому методу Прони [1] после вычисления корней многочлена (5), а именно, - формируя систему линейных алгебраических уравнений с матрицей коэффициентов в виде матрицы Вандермонда. Однако, на этом этапе можно обойтись и без вычисления корней и обращения матрицы Вандермонда, предложив более простой в вычислительном отношении путь. Перемножив левую часть равенства (4) и знаменатель правой части, приравниваем коэффициенты полученного произведения и числителя правой части при одинаковых степенях независимой переменной. В результате формируем систему уравнений последовательного определения коэффициентов числителя дробно-рационального выражения (4):

$$d_n = \widehat{t_0}$$
$$d_{n-1} = \widehat{t_0} a_{n-1} + t_1 \quad (12)$$
$$d_{n-2} = \widehat{t_0} a_{n-2} + t_1 a_{n-2} + t_2$$
$$d_0 = \widehat{t_0} a_0 + t_1 a_1 + \ \dots + t_n$$

Как видно, последнее из соотношений (12) совпадает с (5) и, таким образом, $d_0 = 0$. Это обеспечивает корректность обращения дискретного преобразования Лапласа при переходе от изображения (4) к оригиналу (2) по теореме вычетов. В итоге, прямым вычислением можно убедиться, что для последовательности $\{t_k\}_1^n$ верно представление (2).

Интересно отметить, что дефект задачи в представленном алгоритме равен нулю, то есть количество исходных данных $\{t_k\}_1^n$ равно количеству вычисляемых (4) параметров модели - $\{a_k\}_0^{n-1}$; при этом коэффициенты числителя модели определяются однозначно (12).

2. Редукция модели.

Практически, количество исходных данных может превышать предполагаемое количество гармонических составляющих сигнала. В этом случае возникает задача редукции модели (4), осуществлять которую нужно повторным применением алгоритма. Так, например, здесь следующим шагом будет понижение ранга матрицы $\widehat{\boldsymbol{T}}$ на единицу, и т.д. Однако, в связи с зашумлённостью экспериментальных данных порядок модели следует оставлять относительно завышенным. При этом вклад каждой гармоники (в том числе и шумовой составляющей) будет оцениваться коэффициентами линейной комбинации (2). Если в качестве тестовых сигналов использовать набор гармоник без шума, то при однократном применении алгоритма ранг матрицы коэффициентов может понизиться сразу на несколько единиц; тогда нужно синхронно уменьшать количество уравнений и неизвестных в (11).

3. Пример.

Пусть задана незначительно зашумлённая числовая комплексная последовательность, состоящая из трёх гармоник:

$$\exp(\mathrm{i}),\ \ 2\exp(1.3\mathrm{i}),\ \ 3\exp(3\mathrm{i});$$

$$\{t_k\}_1^6 = \{-1.99 + 3.19i;\ 0.64 + 1.10i;\ -5.36;\ 2.98 - 4.13i;\ 0.01 + 1.42i; 2.93 - 0.54i\}.$$

С помощью детерминантного критерия Сильвестра можно убедиться, что дополнение этой последовательности, например, достаточно большим элементом $t_0 = 25.69$, преобразует соответствующую эрмитово-теплицеву матрицу T коэффициентов уравнений (6) в положительно определённую. Её сингулярные значения (они же собственные значения) и ранг

$$\{\sigma_k\}_0^6 = \{41.14;\ 39.36;\ 21.03;\ 19.99;\ 19.57;\ 19.45; 19.28\}, rank(\boldsymbol{T}) = 7.$$

После вычитания минимального сингулярного числа $\sigma_{min} = 19.28$ из диагональных элементов матрицы $\boldsymbol{T}$ её ранг понизился на единицу rank($\widehat{\boldsymbol{T}}$)=6. Решение преобразованной системы уравнений (11) позволяет сформировать многочлен знаменателя (4)

$$z^6 + (0.90 + 0.07i)z^5 + (0.95 - 0.31i)z^4 + (2.03 - 0.46i)z^3 + (0.99 - 0.14i)z^2 + (0.78 - 0.45i)z + (0.90 - 0.43i),$$

корни которого все унимодулярны $\{|z_k|\}_0^5 = 1$ (точные результаты представлены здесь с округлением):

$$\{z_k\} = \{-0.99 - 0.14\mathrm{i};\ -0.99 + 0.15\mathrm{i};\ -0.08 - \mathrm{i};\ 0.24 + 0.97\mathrm{i};\ 0.41 - 0.91\mathrm{i};\ 0.52 + 0.86\mathrm{i}\}.$$

Следующий этап: вычисление коэффициентов полинома числителя дробно-рационального выражения (4) по формулам (12)

$$\{d_k\}_0^5 = \{0;\ 3.18 + 2.01\mathrm{i};\ 2.90 + 2.86\mathrm{i};\ 7.22 + 1.72\mathrm{i};\ 4.72 + 1.87\mathrm{i};\ 3.78 + 3.64\mathrm{i}\}$$

И, окончательно, по теореме вычетов применительно к (4) последовательность $\{t_k\}_1^6$ представима в виде

$$t_k = 0.18(e^{-i3})^k + 2.96(e^{i2.99})^k + 0.07(e^{-i1.65})^k + 1.84(e^{i1.33})^k - 0.06\left(e^{-i1.15}\right)^k + 1.29(e^{i1.03})^k$$

В результате искомые гармоники существенно выделяются на фоне шумовых составляющих. Пример носит тестовый иллюстративный характер. По-видимому, в каждом практическом случае оценка погрешности требует отдельного анализа.

Заключение.

Представленная модификация может быть интерпретирована как метод Прони цифрового спектрального анализа многочастотных сигналов с гарантией унимодулярности полюсов авторегрессионной модели, что отличает её от прототипа. Реализация и тестирование алгоритма на ряде тестовых примеров подтвердили его эффективное и надёжное функционирование.

Литература

1. Марпл-мл. С.Л. *Цифровой спектральный анализ и его приложения*. Москва, Мир. 1990. 584с.
2. Backstrom T. Vandermonde Factorization of Toeplitz Matrices and Applications in Filtering and Warping. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2013. V.61. №24. P.6257-6263. http://doi.org/10.1109/TSP.2013.2282271
3. Backstrom T., Fischer J., Boley D. Implementation and Evaluation of The Vandermonde Transform. *22-nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*. Lisbon, Portugal. 2014. P.71-75.

4. Choo Y., Kim Y. On the Zeros of Self-Inversive Polynomials. *Int. Journal Math. Analysis*. 2013. V.7. №4. P.187-193. http://doi.org/10.12988/ijma.2013.13016
5. Troeng O., Bernhardsson B., Rivetta C. Complex-coefficient systems in control. *In Proceedings of the 2017 American Control Conference (ACC)*. 2017. P.1721-1727. https://doi.org/10.23919/ACC.2017.7963201
6. Yang Z., Xie L, Stoica P. Vandermonde Decomposition of Multilevel Toeplitz Matrices with Application to Multidimensional Super-Resolution. *IEEE Transactions on Information Theory*. 2016. V.62. №6. P.3685-3701. https://doi.org/10.1109/TIT.2016.2553041
7. Бутырский Е.Ю., Рахуба В.П. Полигармонические сигналы и их свойства. *Национальная безопасность и стратегическое планирование*. 2020. №3(31). С.37-50. https://doi.org/10.37468/2307-1400-2020-3-37-50
8. Бондарев В., Трестер Г., Чернега В. *Цифровая обработка сигналов*. Севастополь, СевГТУ. 1999. 397с.
9. Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ*. Москва, Мир. 1989. 655с.

Для цитирования:

Минкин С.И. Модификация метода Прони спектрального анализа многочастотных сигналов. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №9. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.9.8