

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.9.7>

УДК: 621.397

## АЛГОРИТМЫ МЕТОДА АМПЛИТУДНЫХ ИТЕРАЦИЙ И РОСС ДЛЯ РЕКОНСТРУКЦИИ РАЗРЕЖЕННЫХ ДВУМЕРНЫХ СИГНАЛОВ

Кокошкин А.В.

ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Фрязинский филиал  
141190, Фрязино, пл. Введенского, 1

Статья поступила в редакцию 31 августа 2022 г.

**Аннотация.** В работе представлены алгоритмы метода амплитудных итераций (МАИ) и метода проекций на выпуклые множества (projections onto convex sets, РОСС) адаптированные для реконструкции разреженных двумерных сигналов. В качестве примеров для практического применения МАИ и РОСС выбраны цифровые изображения с существенно отличающимися друг от друга автокорреляционными функциями (АКФ). Проведенные вычисления позволяют сделать заключение о принципиальной возможности применения МАИ и РОСС для восстановления разреженных изображений как в целях реконструкции лакун, так и в целях уменьшения объема данных.

**Ключевые слова:** дистанционное зондирование, разреженные цифровые изображения, обработка изображений, метод амплитудных итераций, метод проекций на выпуклые множества.

**Финансирование:** Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН № 075-01133-22-00.

**Автор для переписки:** Кокошкин Александр Владимирович, [shvarts65@mail.ru](mailto:shvarts65@mail.ru)

## Введение

Восстановление (реконструкция) изображений искаженных различного вида потерями (лакунами) очень актуальна. Они встречаются во многих практических задачах обработки сигналов и изображений [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Например, при дистанционном зондировании Земли с помощью аэрокосмических аппаратов в пространственно-временной структуре данных зачастую возникают лакуны (незаполненные данными области). Они могут возникать из-за методик измерений, технических особенностей аппаратуры и по другим причинам. Иногда сознательно уменьшают число данных, прореживая их. Это бывает необходимо, когда требуется большой объём памяти для регистрации измерений.

В [10], при реконструкции одномерных акустических сигналов по неполным данным, был предложен метод амплитудных итераций (МАИ) для одномерных сигналов. Там же была продемонстрирована его эффективность при реконструкции разреженных сигналов (из неравномерно расположенных выборок) и сигналов искаженных потерями смежных отсчетов (сплошными лакунами). В предлагаемой работе представлен алгоритм реализации МАИ применительно к изображениям (двумерным сигналам).

Предлагаемая работа, аналогично сделанному в [11] для метода интерполяции последовательно вычисляемого спектра Фурье (МИПВС), использует МАИ при реконструкции разреженных цифровых изображений с высокой степенью разреженности (отсутствует 90 процентов информации). Только для сравнения результатов, в качестве альтернативы, здесь используется не сплайн-интерполяция, а широко известный метод проекций на выпуклые множества (англ. projections onto convex sets, POCS). Этот метод был введен в [12, 13]. Чтобы получить итеративное решение POCS, полагают, что интересующие сигналы не являются бесконечными во времени и ограничены по частоте [10, 12, 13].

В случае одномерного сигнала тестирование сделано на примере достаточно сложного искажения. Это выборки из тестового сигнала случайно и

нерегулярно расположенные с известным распределением (Nonuniform Jittering Sampling with Known Distribution). Нами смоделирован тестовый сигнал длиной 256 отсчетов подобный "речевому" сигналу, использованному в [14]. На рис. 1 красными столбиками показаны случайно выбранные отсчеты из исходного сигнала показанного синим пунктиром. Отсутствующие данные приравнены нулю. Нерегулярно расположенные образцы  $\{x(n_i)\}$  получены из исходного сигнала  $x(n)$  от  $x(n_i)=x(\lfloor n(N/L)+\tau \rfloor)$ , где  $\tau$  это джиттер синхронизации с нормальным распределением  $N(0, \sigma^2)$  а также  $\lfloor \cdot \rfloor$  обозначает ближайшее целое число, и  $L$  является фактором прореживания. В нашем примере  $L=8$ ,  $\tau \sim N(0, 1/2)$ , т.е. известен один отсчет из восьми возможных. В [10] было показано, что для решения задачи восстановления одномерного сигнала применение традиционных методов интерполяции не будет эффективным, особенно при достаточно большой разреженности сигнала. Однако применение МИПВС, РОКС и МАИ дают весьма хорошие результаты.

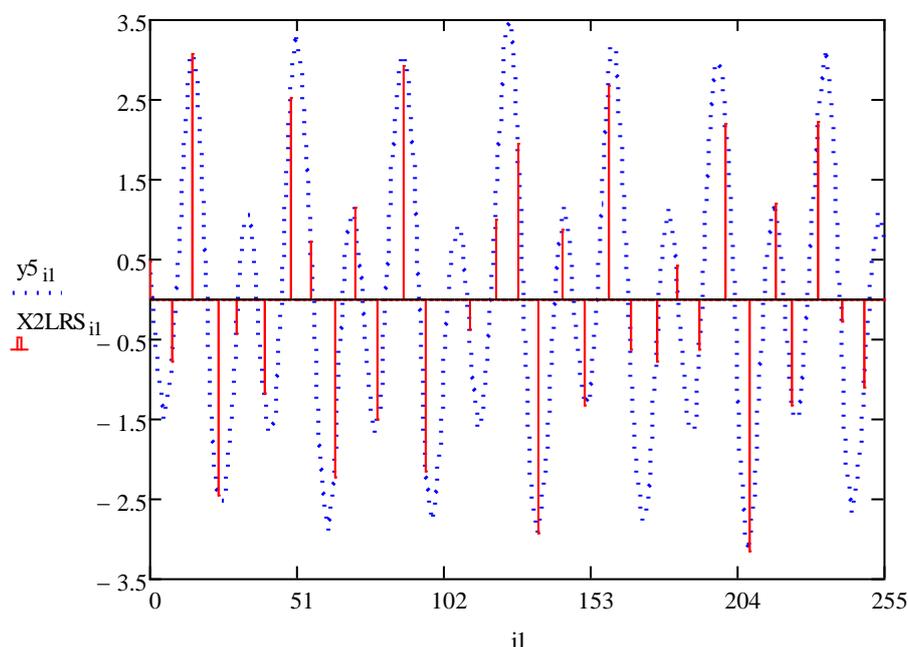


Рис. 1. Исходный (синий пунктир) и разреженный (красные столбики) сигналы

На рис. 2а показаны (в логарифмическом масштабе) амплитудные спектры исходного неискажённого одномерного сигнала (синий пунктир) и разреженного сигнала (красный). На рис. 2б изображается разница между абсолютными (без логарифмического масштаба) амплитудами спектров рис. 2а.

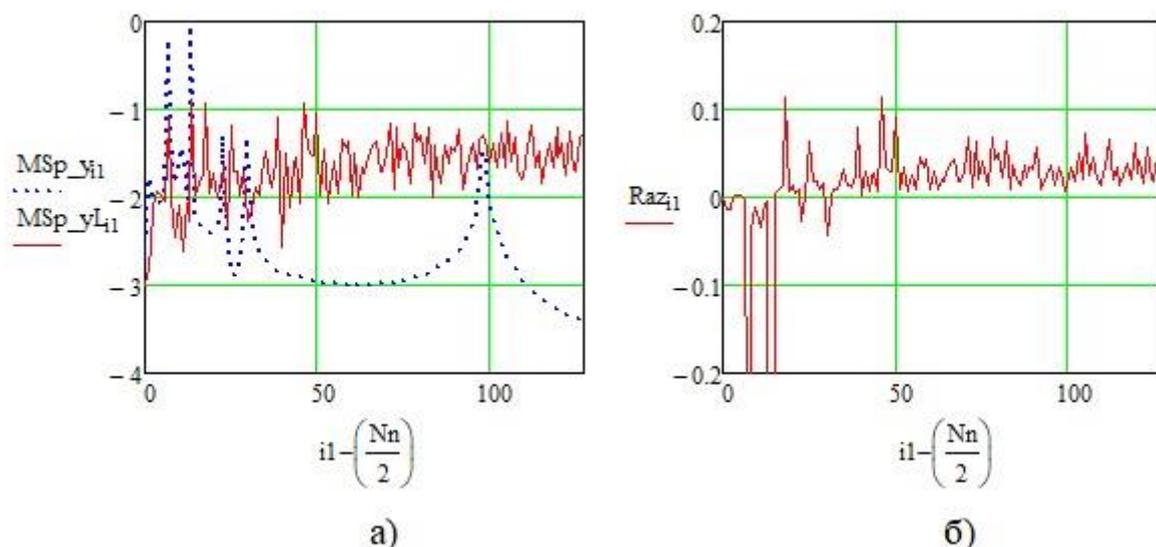


Рис. 2. Амплитудные спектры (в логарифмическом масштабе) исходного (синий пунктир) и разреженного (красный) сигналов – а). Разница между абсолютными (без логарифмического масштаба) амплитудами спектров рис. 2а – б)

На рис. 3 показаны исходный (синий пунктир) и восстановленный с помощью МАИ (красный) разреженный сигналы.

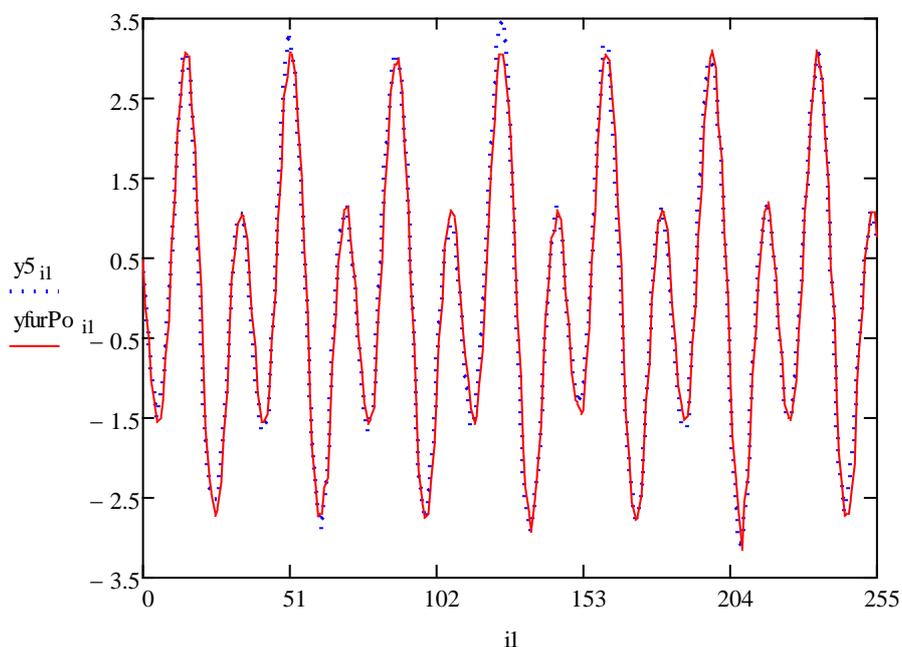


Рис. 3. Исходный (синий пунктир) и восстановленный с помощью МАИ (красный) разреженный сигналы

На рис. 4а показаны (в логарифмическом масштабе) амплитудные спектры исходного неискажённого одномерного сигнала (синий пунктир) и восстановленного с помощью МАИ (красный) разреженного сигнала. На рис. 4б

изображается разница между абсолютными (без логарифмического масштаба) амплитудами спектров рис. 4а.

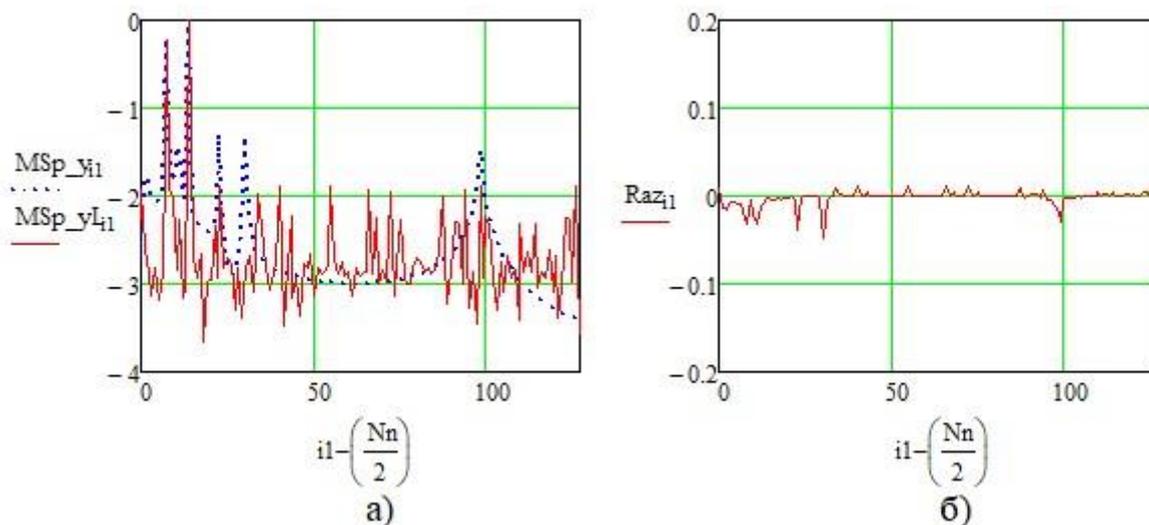


Рис. 4. Амплитудные спектры (в логарифмическом масштабе) исходного (синий пунктир) и восстановленного с помощью МАИ (красный) разреженного сигнала – а). Разница между абсолютными (без логарифмического масштаба) амплитудами спектров рис. 4а – б)

На рис. 5 показаны исходный (синий пунктир) и восстановленный с помощью РОСС (красный) разреженный сигналы.

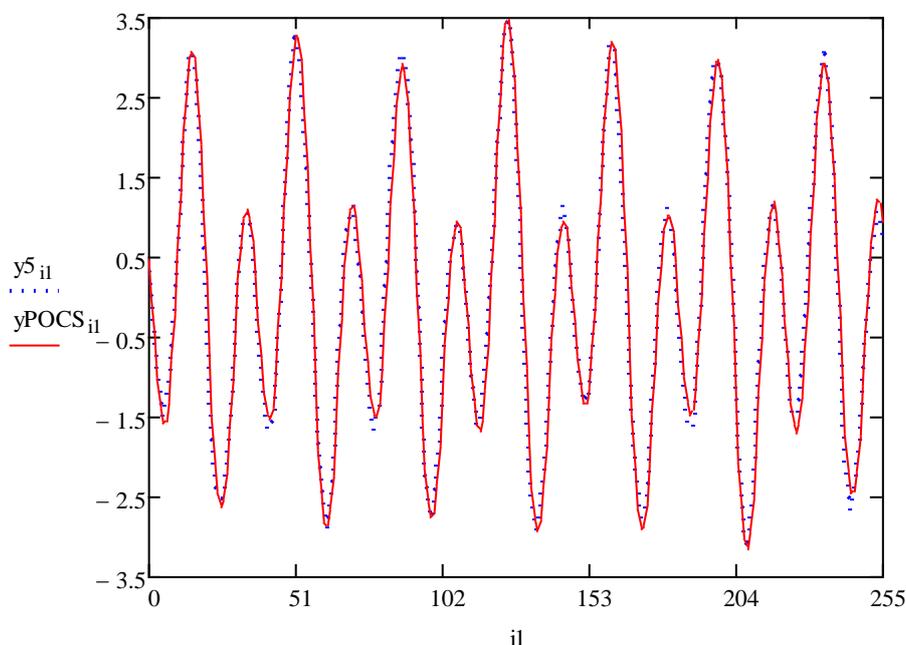


Рис. 5. Исходный (синий пунктир) и восстановленный с помощью РОСС (красный) разреженный сигналы

На рис. 6а показаны (в логарифмическом масштабе) амплитудные спектры исходного неискажённого одномерного сигнала (синий пунктир) и

восстановленного с помощью POCS (красный) разреженного сигнала. На рис. 6б изображается разница между абсолютными (без логарифмического масштаба) амплитудами спектров рис. 6а.

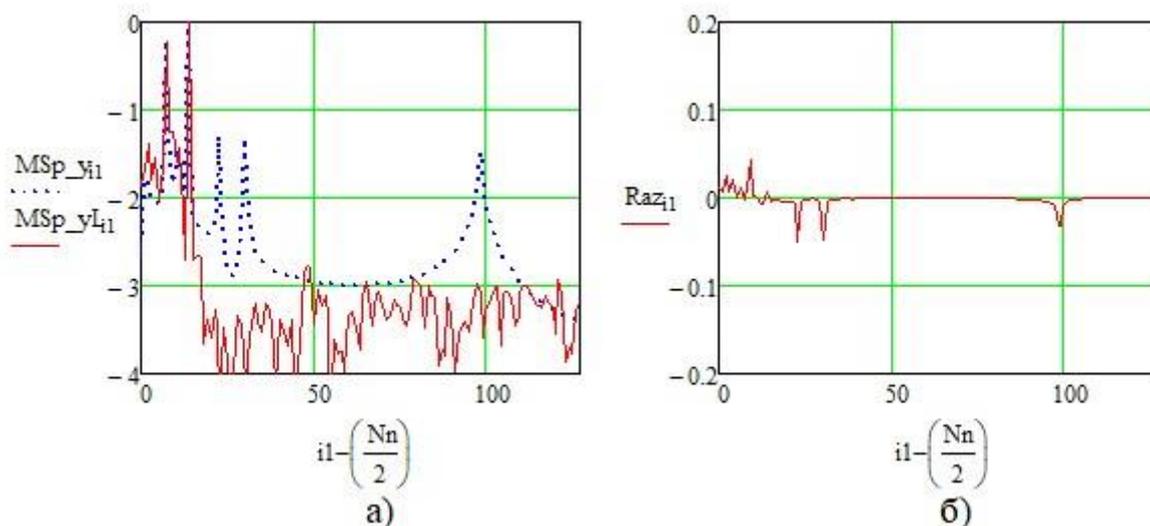


Рис. 6. Амплитудные спектры (в логарифмическом масштабе) исходного (синий пунктир) и восстановленного с помощью POCS (красный) разреженного сигнала – а). Разница между абсолютными (без логарифмического масштаба) амплитудами спектров рис. 6а – б)

В [10] было показано, что рассматриваемые методы хорошо справляются с поставленной задачей, поскольку их средние абсолютные ошибки (mean absolute error – MAE) значительно (во много раз) меньше, чем MAE для не восстановленной лакуны, но при небольшом росте средней абсолютной ошибки при увеличении разреженности.

Целью представленной здесь работы является создание алгоритмов МАИ и POCS адаптированных для работы с двумерными сигналами (изображениями).

### 1. Реализация алгоритмов МАИ и POCS для реконструкции разреженных двумерных сигналов

В [10] были опубликованы алгоритмы POCS и МАИ для одномерных сигналов. Приведём здесь аналогичные методики вычислений адаптированные для двумерных сигналов (изображений).

## 1.1. Реконструкция двумерного сигнала с помощью метода проекций на выпуклые множества (POCS)

1) Локализуем отсутствующие данные, т.е. определяем координаты всех пикселей, которые необходимо заполнить.

2) Вычисляем среднее сигнала, используя только достоверно известные пиксели (без пикселей из лакуны, по всему полю изображения). Таким образом, происходит оценка амплитуды нулевой гармоники пространственного спектра изображения.

3) Заполняем места в которых исходные данные отсутствовали значениями, вычисленными в предыдущем пункте, то есть, получаем первое приближение заполнения лакуны. При этом неискаженная часть сигнала (изначально достоверно известная) не подвергается никаким изменениям.

4) Вычисляем полный спектр изображения полученного при выполнении пункта 3 (с заполненной лакуной).

5) Создаем частотную маску (матрицу по размеру равную матрице спектра восстанавливаемого сигнала). Заполнение частотной маски нулями и единицами происходит следующим образом: определяем размер окна таким образом, чтобы для спектра сигнала вычисленного в пункте 3 основные (наибольшие по амплитуде) гармоники попадали туда с некоторым запасом (амплитуда единица – частоты внутри окна; амплитуда ноль – номера частот спектра вне этого окна).

6) Умножаем спектр полученный в предыдущем пункте на частотную маску (чтобы ввести ограничение по частоте).

7) Применяем обратное преобразование Фурье к результату предыдущего пункта.

8) Заполняем лакуны значениями вычисленными в предыдущем пункте, то есть получаем очередное приближение заполнения лакуны. При этом неискаженная часть сигнала (изначально достоверно известная) не подвергается никаким изменениям.

9) Последующие итерации – цикличное повторение действий пунктов начиная с 6-го и заканчивая 8-ым включительно.

10) Таким образом, лакуна итерационно заполняется, причем неискаженная часть сигнала (изначально достоверно известная) не подвергается никаким изменениям.

## **1.2. Реконструкция двумерного сигнала с помощью метода амплитудных итераций (МАИ)**

1) Локализуем лакуну, т.е. определяем координаты всех пикселей, которые необходимо заполнить с помощью МАИ.

2) Вычисляем среднее сигнала, используя только достоверно известные пиксели (без пикселей из лакуны, по всему полю изображения). Таким образом, происходит оценка нулевой гармоники пространственного спектра изображения.

3) Заполняем лакуну значениями, вычисленными в предыдущем пункте, то есть, получаем первое приближение заполнения лакуны. При этом неискаженная часть сигнала (изначально достоверно известная) не подвергается никаким изменениям.

4) Вычисляем полный спектр сигнала полученного при выполнении предыдущего пункта (с заполненной лакуной).

5) Создаем частотную маску (матрицу по размеру равную матрице спектра восстанавливаемого сигнала). Заполнение частотной маски нулями и единицами происходит следующим образом: определяем размер окна таким образом, чтобы для спектра сигнала вычисленного в пункте 3 основные (наибольшие по амплитуде) гармоники попадали туда с некоторым запасом (амплитуда единица – частоты внутри окна; амплитуда ноль – номера частот спектра вне этого окна).

6) Задаем количество градаций ( $N$ ) в диапазоне от максимума ( $\max$ ) до минимума ( $\min$ ) величин амплитуд гармоник спектра сигнала вычисленного в предыдущем пункте. Количество этих градаций должно быть достаточным для того чтобы значимые гармоники спектра могли быть оценены с помощью предлагаемого алгоритма. Вычисляем шаг итерации как:  $\text{step} = (\max - \min)/N$ . Номер итерации ( $N_{it}$ ) последовательно изменяется от 1 до  $N$ .

7) Умножив шаг итерации (step) на номер очередной итерации (Nit) получим число Nstep для ограничения амплитуд спектра на очередном итерационном шаге. Ограничив по всему пространству частот амплитуды спектра ( $A_{i,j}$ ) вычисленного в предыдущих пунктах значениями  $A_{i,j} \geq (\max - Nstep)$  вычисляем следующее приближение значений сигнала для заполнения лакуны.

8) Заполняем лакуну значениями сигнала, вычисленными в предыдущем пункте, и получаем следующее приближение заполнения лакуны. При этом неискаженная часть сигнала (изначально достоверно известная) не подвергается никаким изменениям.

9) Далее циклично выполняем пункты 6, 7, каждый раз последовательно, в пункте 6, увеличивая номер итерации на единицу ( $Nit = Nit+1$ ), вплоть до наивысшей возможной ( $Nit = N$ ). Таким образом, лакуна итерационно заполняется, причем неискаженная часть сигнала (изначально достоверно известная) не подвергается никаким изменениям.

## 2. Примеры реконструкции разреженных изображений

В качестве первого примера двумерного сигнала (как и в [11]) используем исходное цифровое изображение из базы данных: <https://www.goodfon.ru/download/lods-franck-portret-lea/1280x1024/>. Так же дадим этому изображению название "Портрет" и для удобства обработки сделаем его размер 512 на 512 пикселей, кроме того, преобразуем его цветность в градациях серого от 1 – условно чёрный цвет, до 255 – белый цвет. Результат преобразований показан на рис. 7а. На основании этого смоделируем разреженное изображение. Т.е., по случайно-равномерному закону удалим девяносто процентов информации из рис. 7а, таким образом получив рис. 7б.

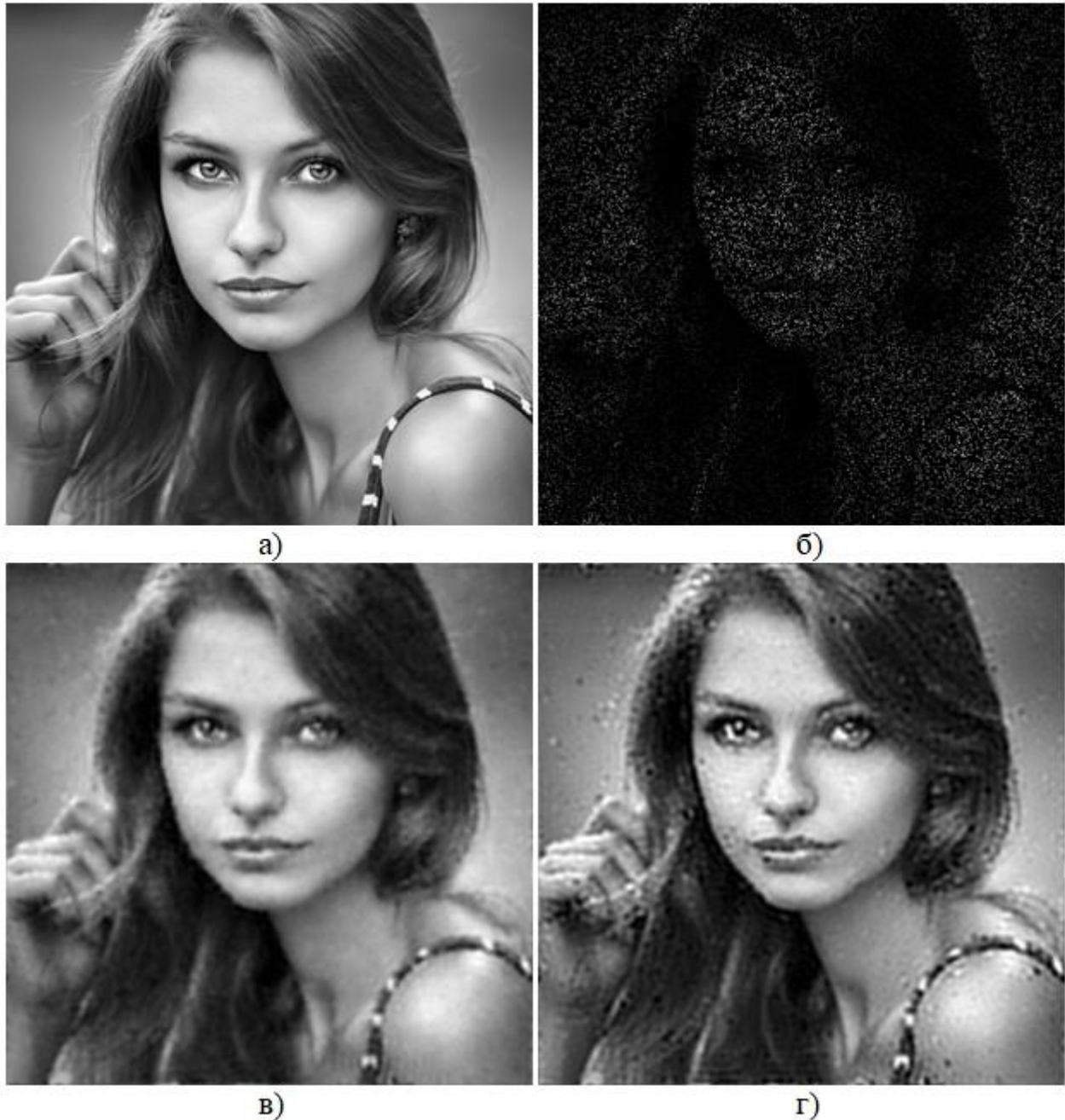


Рис. 7. Исходное цифровое изображение "Портрет" размером 512 на 512 пикселей – а); Разреженное изображение (известно 10 процентов от общего объёма данных рис. 7а) – б); Восстановление МАИ рис. 7б (частотное окно 63, 2500 итераций) – в); Восстановление POCS рис. 7б (частотное окно 63, 2500 итераций) – г)

Чёрное поле (градиация яркости = 0) на рис. 7б соответствует отсутствующим данным, а оставшиеся десять процентов информативных элементов изображения имеют свои изначальные значения как на рис. 7а (от 1 до 255).

На рис. 7в показан результат реконструкции МАИ рисунка 7б. Как и в [11] для МИПВС, не смотря на отсутствие 90 процентов информации, "Портрет" вполне узнаваем не только по экспертной оценке, но и интеллектуальная система Яндекс «поиска по картинке» безошибочно выдаёт набор сайтов с этим изображением.

При сравнении рис. 7а и рис. 7в можно установить, что на восстановленном изображении произошло снижение общей резкости (даже в большей степени чем для МИПВС в [11]). Это вполне объяснимо, поскольку в процедуре МАИ использовалось ограничение частотного окна – 63 гармоники от нулевой частоты (в отличии от максимально возможных 256 как было сделано для МИПВС [11]). Для повышения резкости возможно использование дополнительной обработки, но в данной статье это не рассматривается. Рис. 7г демонстрирует реконструкцию РОСС рисунка 7в. В этом случае, при кажущемся повышении контраста, на восстановленном изображении (рис. 7г) возникает некоторое количество мешающих артефактов. «Узнаваемость» восстановленного изображения для РОСС как по экспертной оценке, так и для системы распознавания Яндекс, находится на высокой степени надёжности.

Аналогично [11], в качестве второго примера двумерного сигнала, возьмём оптическое изображение, полученное со спутника – фрагмент города Сан-Диего в США. Для этого использовалась общедоступная Яндекс-карта. Вырезанный фрагмент 512 на 512 пикселей переведён в чёрно-белое изображение, где яркости распределяются от 1 – условно чёрный цвет, до 255 – белый цвет. Сформированный таким образом исходный образец показан на рис. 8а, под названием "Сан-Диего". На этом аэрокосмическом изображении хорошо виден пришвартованный в порту Авианосец USS "Midway", превращённый с 1998 года в корабль-музей (расположен посередине левой стороны рисунка). На основании Рис. 8а смоделировано разреженное изображение. Т.е., как и в первом примере "Портрет", по случайно-равномерному закону удалено девяносто процентов информации из рис. 8а., таким образом получен рис. 8б.

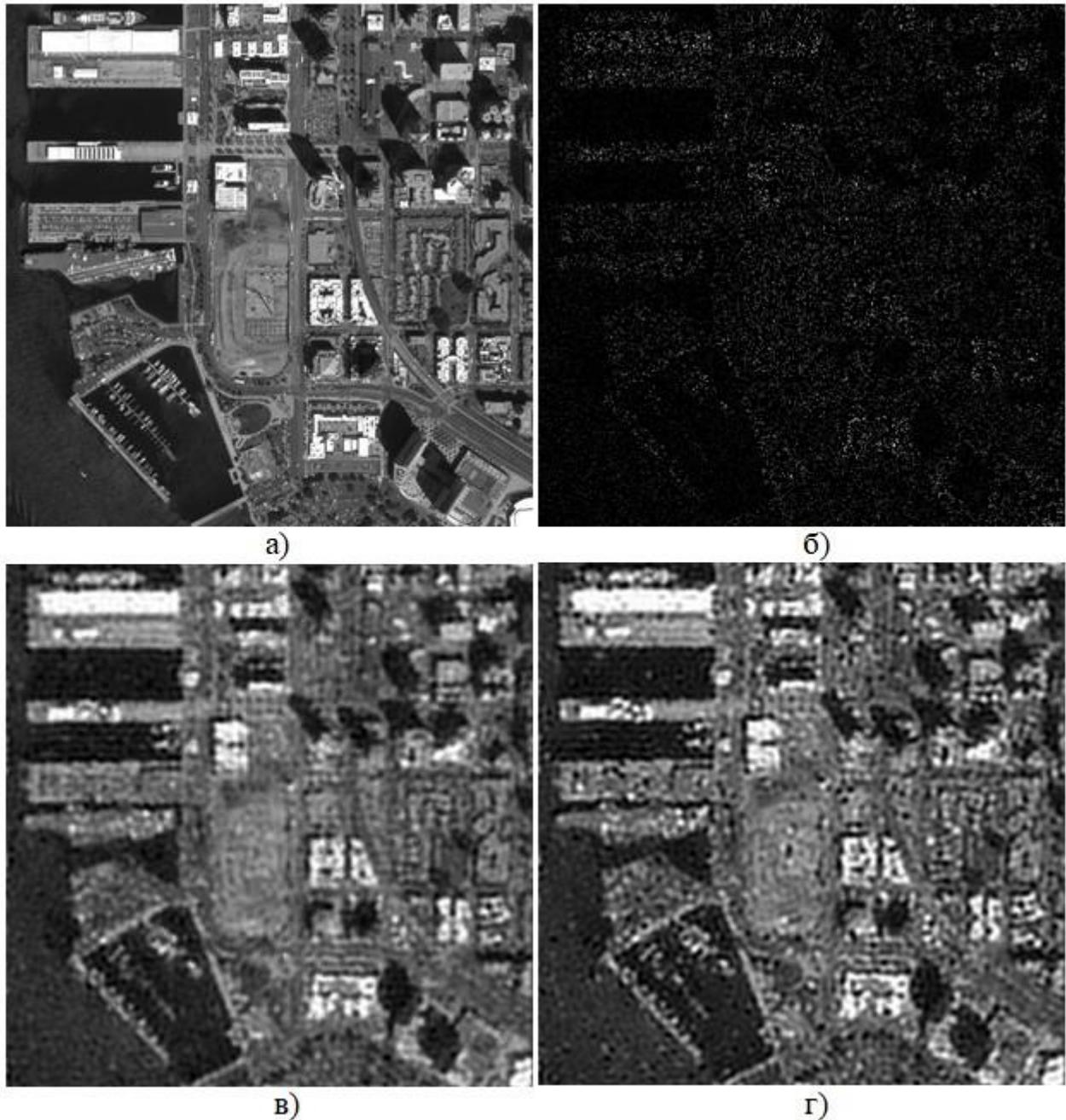


Рис. 8. Исходное цифровое изображение "Сан-Диего" размером 512 на 512 пикселей – а); Разреженное изображение (известно 10 процентов от общего объёма данных рис. 8а – б); Восстановление МАИ рис. 8б (частотное окно 63, 2500 итераций) – в); Восстановление POCS рис. 8б (частотное окно 63, 2500 итераций) – г)

Чёрное поле (градация яркости = 0) на рис. 8б соответствует отсутствующим данным, а оставшиеся десять процентов информативных элементов изображения имеют свои изначальные значения как на рис. 8а (от 1 до 255).

Восстановление рис. 8б с помощью МАИ показано на рис. 8в. Как и в случае с рис. 7в для реконструкции разреженного изображения методом амплитудных итераций взято частотное окно 63 гармоники от нулевой пространственной частоты и 2500 итераций. Увеличение размеров частотного окна и количества итераций никакого существенного выигрыша не дают. Несмотря на артефакты все значимые объекты (крупные городские постройки, очертание порта, авианосец) имеют вполне узнаваемый вид. Однако относительно небольшие элементы изображения (автомобили, самолёты на борту авианосца и т.п.) не восстанавливаются. Это, как и в [11] для МИПВС, объясняется тем, что изображения, взятые в качестве исходных, имеют существенно отличные друг от друга автокорреляционные функции (АКФ). Если достаточное для реконструкции мелких деталей изображения количество пикселей разреженного изображения не укладывается в радиус АКФ, то и восстановления не произойдёт, таким образом, допустимую разреженность необходимо выбирать для каждой конкретной технической задачи, и под определённый тип изображений [11].

## **Заключение**

В этой работе предлагаются реализации алгоритмов метода амплитудных итераций (МАИ) и метода проекций на выпуклые множества (projections onto convex sets, POCS) адаптированные для реконструкции разреженных двумерных сигналов. Эффективность процедур тестируется на изображениях разных типов с высокой степенью разреженности (при отсутствии 90 процентов исходных данных). Возможность восстановления искажённого разреженностью изображения, с необходимой для конкретной технической задачи степенью информативности, как и при использовании МИПВС [11], необходимо оценивать по радиусу корреляции АКФ, характерному для используемых типов изображений. Проведенные вычисления позволяют сделать заключение о принципиальной возможности применения МАИ и POCS для восстановления

разреженных двумерных сигналов (изображений) как в целях реконструкции, так и в целях уменьшения объёма данных.

**Финансирование:** Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН № 075-01133-22-00.

### Литература

1. Yeh S., Stark H. Iterative and one-step reconstruction from nonuniform samples by convex projections. *Journal of the Optical Society of America*. 1990. V.7. №3. P.491-499. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.7.000491>
2. Stasiński R., Konrad J. Improved POCS-based image reconstruction from irregularly-spaced samples. *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP '00)*. 2002. P.1-4.
3. Park J., Park D-C, Marks R.J. II, El-Sharkawi M.A. Block loss recovery in DCT image encoding using POCS. *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. 2002. <https://doi.org/10.1109/ISCAS.2002.1010686>
4. Huang H., Makur A. A new iterative reconstruction scheme for signal reconstruction. *Proceedings of the IEEE Asia Pacific Conference on Circuits and Systems (APCCAS '08)*. 2008. <https://doi.org/10.1109/APCCAS.2008.4746028>
5. Ogawa T., Haseyama M. Adaptive reconstruction method of missing texture based on projection onto convex sets. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP '07)*. 2007. <https://doi.org/10.1109/ICASSP.2007.366003>
6. Chen J., Zhang L., Luo J., Zhu Y. MRI reconstruction from 2D partial k-space using POCS algorithm. *Proceedings of the 3rd International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering (ICBBE '09)*. 2009. <https://doi.org/10.1109/ICBBE.2009.5163089>
7. Feichtinger H.G., Kozek W., Strohmer T. Reconstruction of signals from irregular samples of its short-time Fourier transform. *Wavelet Applications in Signal and Image Processing III*. 1995. V.2569. P.140-150. <https://doi.org/10.1117/12.217570>

8. Guven H.E., Ozaktas H.M., Cetin A.E., Barshan B. Signal recovery from partial fractional Fourier domain information and its applications. *IET Signal Processing*. 2008. V.2. №1. P.15-25. <http://doi.org/10.1049/iet-spr:20070017>
9. Serbes A., Durak L. Optimum signal and image recovery by the method of alternating projections in fractional Fourier domains. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010. V.15. №3. P.675-689.
10. Кокошкин А.В., Коротков В.А., Новичихин Е.П. Реконструкция акустических сигналов по неполным данным. *Радиотехника и Электроника*. 2020. Т.65. №12. С.1181-1189. <https://doi.org/10.31857/S0033849420120104>
11. Кокошкин А.В., Новичихин Е.П. Применение метода интерполяции последовательно вычисляемого спектра Фурье к разреженным изображениям. *РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии*. 2022. Т.14. №2. С.165-174. <https://doi.org/10.17725/rensit.2022.14.165>
12. Брэгман Л.М. Нахождение общей точки выпуклых множеств методом последовательного проектирования. *Доклады Академии наук СССР*. 1965 Т.162. №3. С.487-490.
13. Gubin L.G., Polyak B.T., Raik E.V. The method of projections for finding the common point of convex sets. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1967. V.7. №6. P.1-24. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(67\)90113-9](https://doi.org/10.1016/0041-5553(67)90113-9)
14. Oh J., Senay S., Chaparro L. Signal Reconstruction from Nonuniformly Spaced Samples Using Evolutionary Slepian Transform-Based POCS. *Hindawi Publishing Corporation, EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*. V.2010. <https://doi.org/10.1155/2010/367317>

**Для цитирования:**

Кокошкин А.В. Алгоритмы метода амплитудных итераций и POCS для реконструкции разреженных двумерных сигналов. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2022. №9. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.9.7>