

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.9.1>

УДК: 621.396.67

РАЗЛОЖЕНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ В СПЕКТР СКАЛЯРНЫХ ПЛОСКИХ ВОЛН

Н.В. Аниютин

**ПАО «НПО «Алмаз»
125190, Москва, Ленинградский проспект, д. 80, корп. 16
Московский физико-технический институт
141700, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9**

Статья поступила в редакцию 10 июня 2024 г.

Аннотация. В статье рассматриваются ограничения, которые возникают при разложении электромагнитного поля в спектр скалярных и векторных волн. Показано, что значения диаграммы направленности излучения можно принять за амплитуды скалярных плоских волн, которые распространяются в соответствующих направлениях. Предложена весовая функция, которая осуществляет выбор единственной линейной комбинации из двух распространяющихся навстречу друг другу скалярных плоских волн. Благодаря этому была значительно повышена точность разложения волнового поля во всем пространстве в один спектр скалярных плоских волн. Также было предложено использовать разбиение сферы единичного радиуса на треугольные фасеты с последующим вычислением дифракционных интегралов по каждому фасету. Такое решение позволило значительно увеличить расстояние, на котором волновое поле может быть представлено конечной суммой скалярных плоских волн. Предложенное разложение в спектр скалярных плоских волн позволяет рассчитывать волновое поле вплоть до его источников. Проведенные оценки показали, что методические ошибки вне минимальной сферы, которая может

быть описана вокруг источников, эквивалентны помехе на уровне не выше -40 дБ.

Ключевые слова: плоские волны, сферические волны, интеграл Кирхгофа, ближняя зона, дальняя зона, преобразование электромагнитного поля, измерение характеристик антенн, диагностика антенн, диаграмма направленности.

Автор для переписки: Анятин Николай Викторович, anyutinnv@mail.ru

Введение

Для технологий радиосвязи, радиолокации и радионавигации антенны и антенные решетки являются критически важными элементами, от электромагнитного излучения которых зависит исправная работа всего технического средства. В реальных условиях эксплуатации расстояния между антеннами или между антенной и источником отражений электромагнитных волн достаточно велики, что позволяет пользоваться приближением дальней зоны (ДЗ) излучения. По этой причине в математических моделях технических средств используется диаграмма направленности (ДН) излучения, которая получается теоретически или экспериментально [1].

Существует ряд задач, для решения которых требуется знать электромагнитное поле антенн или антенных решеток в ближней зоне (БЗ) их излучения: диагностика неисправных элементов и дефектов изготовления, расчет переотражений электромагнитных волн от окружающих элементов конструкции, расчет взаимных связей между антеннами и т.д. Использование источников электромагнитного поля в БЗ в качестве исходных данных для решения не всегда возможно. Точные геометрические размеры и материалы антенн являются коммерческой тайной, что не позволяет воссоздать достаточно адекватную электродинамическую модель. В случае же измерений характеристик антенн даже методами БЗ на выходе алгоритмов оказывается только ДН – сферическая часть напряженности электрического поля в ДЗ.

Задача нахождения векторов электромагнитного поля по ДН излучения является некорректной. С одной стороны, в ДЗ теряется вся информация

о реактивной части электромагнитного поля [2]. С другой стороны, согласно принципу эквивалентности Лава, любая замкнутая поверхность, которая охватывает все источники электромагнитного поля, может быть принята за эквивалентные источники [3]. Таким образом, одна и та же ДН излучения может соответствовать множеству вариантов источников электромагнитного поля.

Классическое решение задачи нахождения векторов электромагнитного поля по ДН излучения осуществляется через разложение в спектр ортогональных векторных волн, которые являются собственными функциями векторного уравнения Гельмгольца и называются модами [4]. Найдя коэффициенты соответствующего модального разложения, электромагнитное поле можно рассчитать в любой интересующей точке свободного от источников пространства. В случае векторных плоских волн источники электромагнитного поля располагаются между двумя параллельными плоскостями, цилиндрических – внутри цилиндра с бесконечными направляющими, сферических – внутри сферы. Таким образом, на расстоянии меньше протяженности антенны в случае несовпадения ее формы с одной из канонических поверхностей (части плоскости, цилиндра или сферы) расчет электромагнитного поля названными методами затруднителен.

На поверхности антенны или любой другой удобной замкнутой поверхности можно рассмотреть эквивалентные источники электромагнитного поля и решить относительно их излучения систему интегральных уравнений [5]. Такой подход устраняет недостаток методов, которые основываются на модальном разложении, однако приводит к значительному увеличению вычислительной сложности алгоритмов и необходимости тщательного исследования обусловленности решаемой системы уравнений.

Для расчета электромагнитного поля снаружи замкнутой поверхности, которая охватывает все его источники, рядом преимуществ обладает интеграл Кирхгофа. Его реализация в алгоритмах позволяет существенно уменьшить их вычислительную сложность, а также затраченное на разработку время [6]. Последнее особенно актуально при работе с результатами

электродинамического моделирования в коммерческих программах или измерений с помощью современных позиционеров с большим числом степеней свободы. Реализация в алгоритмах одного простого метода позволяет работать с распределениями электромагнитного поля на любых поверхностях, в том числе канонических: плоской, цилиндрической и сферической.

Расчет электромагнитного поля внутри замкнутой поверхности, которая содержит его источники, с помощью интеграла Кирхгофа может приводить к значительным методическим ошибкам [7]. Интеграл Кирхгофа выводится из второй формулы Грина в объеме без источников поля, где справедливо только однородное волновое уравнение. Поэтому его вычисление в точках внутри замкнутой поверхности, т.е. в объеме с источниками поля, может давать ошибочное значение. Однако в ряде случаев, например, для остронаправленного электромагнитного излучения апертурных антенн, результат имеет достаточную для решения практических задач точность [8].

Назовем сферу, радиус которой стремится к бесконечности, сферой в ДЗ. Если записать интеграл Кирхгофа по сфере в ДЗ для произвольной точки внутри нее, то после справедливых в ДЗ упрощений можно прийти к разложению в спектр скалярных плоских волн. В отличие от классического решения через векторные плоские волны, коэффициенты этого разложения не требуют вычисления – они с точностью до константы совпадают со значениями ДН. Однако, вследствие вычисления интеграла Кирхгофа для точек внутри замкнутой поверхности, вдоль любой прямой навстречу друг другу распространяются две скалярные плоские волны. Их суперпозиция в случае слабонаправленного излучения приводит к появлению ошибок в виде стоячих волн [7], а в задней полусфере остронаправленного излучения – доминированию волн из передней полусферы.

Цель работы – повышение точности разложения волнового поля во всем пространстве в спектр скалярных плоских волн. Для ее достижения решается задача отбора для каждой точки пространства единственного решения в виде линейной комбинации из двух скалярных плоских волн, которые

распространяются навстречу друг другу. Сначала формулируется и обосновывается правило выбора линейной комбинации из двух коллинеарных плоских волн. Затем это правило апробируется на точном решении – электромагнитном излучении точечного диполя. В конце проведена апробация по расчетному и измеренному электромагнитному полю рупорной антенны.

1. Разложение электромагнитного поля в спектр векторных волн

Из уравнений Максвелла в свободном от источников электромагнитного поля пространстве следует, что напряженности электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ поля удовлетворяют векторному уравнению Гельмгольца в случае зависимости от времени t по гармоническому закону $e^{i\omega t}$, где ω – циклическая частота. Решение этого уравнения строится с помощью функции f , которая является решением скалярного уравнения Гельмгольца, и следующих векторов [9]:

$$\mathbf{L} = \nabla f, \quad \mathbf{M} = \nabla \times (f \mathbf{e}), \quad \mathbf{N} = (\nabla \times \mathbf{M})/k,$$

где $\mathbf{e}$ – произвольный единичный вектор; k – волновое число.

Векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ ортогональны и удовлетворяют уравнениям Максвелла в свободном от источников электромагнитного поля пространстве, поэтому с их помощью строится следующая фундаментальная система решений:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \sum_{p,q} \left(a_{pq} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{pq}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{N}_{pq}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} + b_{pq} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{pq}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{M}_{pq}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \right), \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где a_{pq} и b_{pq} – коэффициенты модального разложения.

Векторные плоские волны в декартовых координатах $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ определяются следующим образом [4]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_q(\mathbf{r}) \\ \mathbf{N}_q(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = -ik \begin{pmatrix} \mathbf{e} \times \mathbf{m}_q \\ \mathbf{m}_q \times \mathbf{e} \times \mathbf{m}_q \end{pmatrix} e^{-ik\mathbf{m}_q \cdot \mathbf{r}}, \quad (2)$$

где $\mathbf{m} = \mathbf{k} / k$ – вектор распространения электромагнитной волны.

При этом, все векторы распространения $\mathbf{m}_q$ должны быть направлены в одно полупространство. В противном случае, найдутся две плоские волны,

которые распространяется навстречу друг другу. Их скалярное произведение не будет тождественно равно нулю, а значит, такая система векторных плоских волн (2) будет линейно зависимой и не может являться фундаментальной системой решений (1).

Избежать обозначенную проблему можно, если определить векторные плоские волны только в одном полупространстве [10]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{pq}(x, y, z) \\ \mathbf{N}_{pq}(x, y, z) \end{pmatrix} = -ik \begin{pmatrix} \mathbf{e} \times \mathbf{m}_{pq} \\ \mathbf{m}_{pq} \times \mathbf{e} \times \mathbf{m}_{pq} \end{pmatrix} e^{-ik(u_p x + v_q y \pm \sqrt{1-u_p^2-v_q^2} z)}, \quad (3)$$

$$\mathbf{m}_{pq} = \left\{ u_p \quad v_q \quad \pm \sqrt{1-u_p^2-v_q^2} \right\}.$$

При этом источники электромагнитного поля располагаются между двумя параллельными плоскостями в области $z_1 < z < z_2$. Нижний знак в формуле (3) соответствует решению в полупространстве $z \leq z_1$, а верхний – $z \geq z_2$. Спектры векторных плоских волн в разных полупространствах в явном виде не связаны.

Коэффициенты модального разложения в спектр векторных плоских волн могут быть найдены из ДН излучения [11]. Однако, они не позволяют рассчитать электромагнитное поле в области $z_1 < z < z_2$. При этом источники электромагнитного поля занимают лишь малую часть этой области. В остальной части области $z_1 < z < z_2$ электромагнитное поле можно рассчитать, например, повернув систему координат и найдя коэффициенты нового модального разложения. Такой подход существенно усложняет алгоритмы, поэтому более рациональным является использование модального разложения по векторным сферическим волнам в сферической системе координат $\{\rho, \theta, \varphi\}$ [12]:

$$\mathbf{M}_{pq}(\rho, \theta, \varphi) = -z_q(k\rho) \begin{pmatrix} 0 \\ ip/\sin\theta \\ \partial/\partial\theta \end{pmatrix} P_q^p(\cos\theta) e^{ip\varphi}, \quad (4)$$

$$\mathbf{N}_{pq}(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{k\rho} \begin{pmatrix} q(q+1)/\rho \\ \partial/\partial\rho \\ \partial/\partial\rho \end{pmatrix} (\rho z_q(k\rho)) \begin{pmatrix} 1 \\ \partial/\partial\theta \\ ip/\sin\theta \end{pmatrix} P_q^p(\cos\theta) e^{ip\varphi}, \quad (5)$$

где $z_q(k\rho) = \sqrt{\pi/(2k\rho)} (J_{q+0,5}(k\rho) - iY_{q+0,5}(k\rho))$ – сферическая функция Ганкеля второго рода порядка q ; $J_{q+0,5}$ и $Y_{q+0,5}$ – функции Бесселя и Неймана порядка $q + 0,5$.

Расчет электромагнитного поля в БЗ с помощью модального разложения по векторным сферическим волнам (4) и (5) имеет свои ограничения. Функция Неймана неограниченно убывает вблизи нуля:

$$\lim_{k\rho \rightarrow 0} Y_{q+0,5}(k\rho) = -\infty.$$

При этом стремительно убывать функция Неймана начинает тем дальше от нуля, чем больше ее порядок $q + 0,5$. Таким образом, чем больше число сферических мод Q в модальном разложении, тем больше расстояние $\rho_{\min}$, начиная с которого проявляется асимптотическое поведение функций Неймана. Доминирование функций Неймана в векторных сферических модах на расстояниях меньше $\rho_{\min}$ приводит к значительным ошибкам в виде на порядки большего значения модуля векторов **Е** и **Н**. Число сферических мод Q связано с радиусом минимальной сферы $\rho_{\min}$ следующим эмпирическим соотношением [13]:

$$Q = k\rho_{\min} + 10. \quad (6)$$

2. Разложение волнового поля в спектр скалярных плоских волн

В работе [8] предложен метод расчета электромагнитного поля внутри замкнутой поверхности с его источниками через опережающие потенциалы. Приведенные результаты свидетельствуют о возможности расчета электромагнитного поля вплоть до его источников без ограничений, которые возникают в методах модального разложения. При этом эквивалентные источники электромагнитного поля располагались не на замкнутой поверхности, как того требует теория, а только на ее части в передней полусфере рупорной антенны, что было продиктовано ограничениями в эксперименте. В случае же замкнутой поверхности неизбежно возникнет интерференция волн, которые приходят в одну точку от источников с противоположных направлений [7].

Интеграл Кирхгофа позволяет разрабатывать алгоритмы преобразования электромагнитного поля с существенно меньшей вычислительной сложностью в сравнении с принципом эквивалентности и формулами Стрэттона и Чу. Если в точке $\mathbf{r}$ фаза Φ волнового поля f меняется много быстрее амплитуды $|f|$

$$\nabla f(\mathbf{r}) = i f(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r}) = -ik f(\mathbf{r}) \mathbf{m}(\mathbf{r}),$$

то в приближении волновой зоны излучения интеграл Кирхгофа принимает следующий вид [6]:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi} \oint_S \mathbf{n}' \cdot (\mathbf{m}' \pm \mathbf{v}) f(\mathbf{r}') \frac{e^{\mp ikR}}{R} dS', \quad (7)$$

где S – замкнутая поверхность, охватывающая все источники волнового поля; $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности S ; $\mathbf{v} = \mathbf{R} / R$ – единичный вектор направления от источника волнового поля к точке его расчета; $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ – радиус-вектор от точки $\mathbf{r}'$ с источником волнового поля до точки $\mathbf{r}$ его расчета.

В формуле (7) верхние знаки соответствуют решению через расходящиеся волны и используются для расчета волнового поля снаружи поверхности S . Нижние знаки соответствуют решению через сходящиеся волны и позволяют рассчитать волновое поле внутри поверхности S .

Рассмотрим в качестве поверхности S в интеграле (7) сферу радиусом r' , на поверхности которой волновое поле удовлетворяет приближению ДЗ. В случае сходящихся к точке $\mathbf{r}$ сферических волн, скалярная функция Грина G может быть вычислена приближенно по следующей формуле [1]:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{ik(r' + \mathbf{v} \cdot \mathbf{r})} / r'. \quad (8)$$

При тех же допущениях можно считать, что вектор распространения $\mathbf{m}'$ совпадает с вектором внешней нормали $\mathbf{n}'$, а вектор $\mathbf{v}$ направлен строго против вектора $\mathbf{n}'$. Таким образом, формула (7) с нижними знаками после подстановки в нее формулы (8) в случае расчета волнового поля внутри сферы в ДЗ радиусом r' принимает следующий вид:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{ie^{ikr'}}{\lambda r'} \oint_S f(\mathbf{r}') e^{-ik\mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}} dS', \quad (9)$$

где λ – длина волны.

Согласно формуле (9), волновое поле $f(\mathbf{r})$ также можно рассматривать как сумму скалярных плоских волн

$$f(\mathbf{r}) = ik \sum_q a_q e^{-ik\mathbf{n}_q \cdot \mathbf{r}} \quad (10)$$

с комплексными амплитудами

$$a_q = f_q S_q e^{ikr'} / (2\pi r').$$

Скалярные плоские волны в формуле (10), как и векторные плоские волны в формуле (2) распространяются во всех возможных направлениях $\mathbf{n}_q$, а, значит, и навстречу друг другу. Дабы не ограничиваться только одним полупространством, как это сделано в формуле (3), добавим в формулу (9) весовую функцию $w(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, которая будет выбирать линейную комбинацию из двух плоских волн, распространяющихся навстречу друг другу.

Вернемся к формуле (7) с верхними знаками, которые используются для расчета волнового поля снаружи замкнутой поверхности S . Вклад каждого элемента поверхности dS' в интеграл зависит от направлений векторов $\mathbf{n}'$, $\mathbf{m}'$, $\mathbf{v}$ и пропорционален множителю: $\mathbf{n}' \cdot (\mathbf{m}' + \mathbf{v})$. Если волна в точке $\mathbf{r}'$ распространяется в направлении $\mathbf{v}$ на точку расчета $\mathbf{r}$, то $\mathbf{m}' + \mathbf{v} = 2\mathbf{v}$. В противоположном случае $\mathbf{m}' + \mathbf{v} = 0$. При этом, скалярное произведение $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{m}'$ можно рассматривать как проекцию элемента поверхности dS' на плоскость, которая ортогональна вектору распространения $\mathbf{m}'$. Поскольку одна и та же точка $\mathbf{r}'$ может относиться ко множеству разных поверхностей S с разными векторами нормали $\mathbf{n}'$, то вклад в интеграл точки $\mathbf{r}'$ не должен зависеть от вектора $\mathbf{n}'$. Это условие выполняется, если вектор нормали $\mathbf{n}'$ совпадает с вектором распространения $\mathbf{m}'$:

$$\mathbf{n}' \cdot (\mathbf{m}' + \mathbf{v}) dS' = \mathbf{m}' \cdot (\mathbf{m}' + \mathbf{v}) \frac{dS'}{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{m}'} = (1 + \mathbf{m}' \cdot \mathbf{v}) \frac{dS'}{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{m}'}.$$

Можно ожидать, что вклад элемента поверхности сферы в ДЗ в значение волнового поля в точке БЗ такой же, как вклад элемента поверхности в БЗ от этой же точки в значение волнового поля в той же точке на сфере в ДЗ. Таким образом,

вклад сходящейся сферической волны из точки $\mathbf{r}'$ в значение волнового поля в точке $\mathbf{r}$ определяется следующей весовой функцией:

$$w(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1 + \mathbf{m}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) / |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}{2}. \quad (11)$$

Весовую функцию (11) следует добавить множителем под знак интеграла в формуле (7) с нижними знаками в случае расчета волнового поля внутри замкнутой поверхности S . При этом вектор распространения $\mathbf{m}$ в точке $\mathbf{r}$ можно найти только после расчета волнового поля $f(\mathbf{r})$ в той же точке. Однако, зная волновое поле $f(\mathbf{r}')$ на поверхности S , можно найти фазовый центр излучения $\mathbf{r}_0$ по фазе в ДЗ [14] или по градиенту фазы в БЗ [15]. Тогда вектор распространения $\mathbf{m}$ приближенно оценивается по следующей формуле:

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|. \quad (12)$$

Уточненная формула (9) после подстановки в нее формул (11) и (12) имеет следующий вид:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{ie^{ikr'}}{2\lambda r'} \oint_S \left(1 + \mathbf{n}' \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) f(\mathbf{r}') e^{-ik\mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}} dS'. \quad (13)$$

Численное интегрирование в формуле (13) позволяет перейти к аналогу формулы (10). Однако, при этом возникает ряд трудностей. Во-первых, действительные и мнимые части волнового поля $f(\mathbf{r}')$ на поверхности сферы в ДЗ осциллируют. По этой причине численное интегрирование возможно только в том случае, если между двумя любыми соседними точками $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ модуль разности фаз Φ волнового поля f не превышает π :

$$|\Phi(\mathbf{r}') - \Phi(\mathbf{r}'')| < \pi. \quad (14)$$

Во-вторых, помимо волнового поля $f(\mathbf{r}')$ под знаком интеграла так же осциллирует экспоненциальный множитель $e^{-ik\mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}}$. Причем, для двух соседних точек разность фаз $-k|(\mathbf{n}' - \mathbf{n}'') \cdot \mathbf{r}|$ тем больше, чем больше расстояние r . Таким образом, начиная с некоторого расстояния $\rho_{\max}$ численное интегрирование в формуле (13) оказывается невозможным даже при выполнении критерия (14). Если максимальный угол между двумя любыми соседними направлениями $\mathbf{v}'$

и $\mathbf{v}$ ” составляет $\Delta\theta_{\max}$, то численное интегрирование в формуле (13) возможно только для точек $\mathbf{r}$ внутри сферы, радиус $\rho_{\max}$ которой оценивается по следующей формуле [13]:

$$\rho_{\max} = \lambda / \Delta\theta_{\max}. \quad (15)$$

Расчет волнового поля f по формуле (13) при выполнении критерия (14) за пределами сферы радиусом $\rho_{\max}$ возможен с помощью метода, который был разработан для приближения физической оптики [16]. Представим сферу в ДЗ в виде фасеточной модели в координатах $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ (рис. 1а), которая состоит из Q треугольный фасетов (рис. 1б). Для каждого треугольного фасета с вершинами $\mathbf{v}_q^1$, $\mathbf{v}_q^2$ и $\mathbf{v}_q^3$ известно волновое поле f_q в точке пересечения медиан $\mathbf{v}_q$, которая совпадает с вектором нормали $\mathbf{n}_q$: $\mathbf{v}_q = \mathbf{n}_q$. Если волновое поле f_q удовлетворяет критерию (14), то его и весовую функцию (11) можно вынести как общий множитель из-под знака интеграла в формуле (13), примененную к поверхности одного фасета S_q :

$$\Delta f(\mathbf{r}) = \left(1 + \mathbf{n}_q \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_O}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_O|} \right) \frac{if_q e^{ik(r' - \mathbf{n}_q \cdot \mathbf{r})}}{2\lambda r'} \int_{S_q} e^{-ik(\mathbf{v}' - \mathbf{n}_q) \cdot \mathbf{r}} dS'.$$

Оставшийся дифракционный интеграл вычисляется аналитически по следующей формуле [17]:

$$I_q(\mathbf{r}) = \int_{S_q} e^{-ik(\mathbf{v}' - \mathbf{n}_q) \cdot \mathbf{r}} dS' = 2S_q \frac{(\beta_q e^{i\alpha_q} - \alpha_q e^{i\beta_q}) / (\beta_q - \alpha_q) - 1}{\alpha_q \beta_q} e^{-ik(\mathbf{v}_q^1 - \mathbf{n}_q) \cdot \mathbf{r}}, \quad (16)$$

где $\alpha_q = k(\mathbf{v}_q^1 - \mathbf{v}_q^2) \cdot \mathbf{r}$ и $\beta_q = k(\mathbf{v}_q^1 - \mathbf{v}_q^3) \cdot \mathbf{r}$.

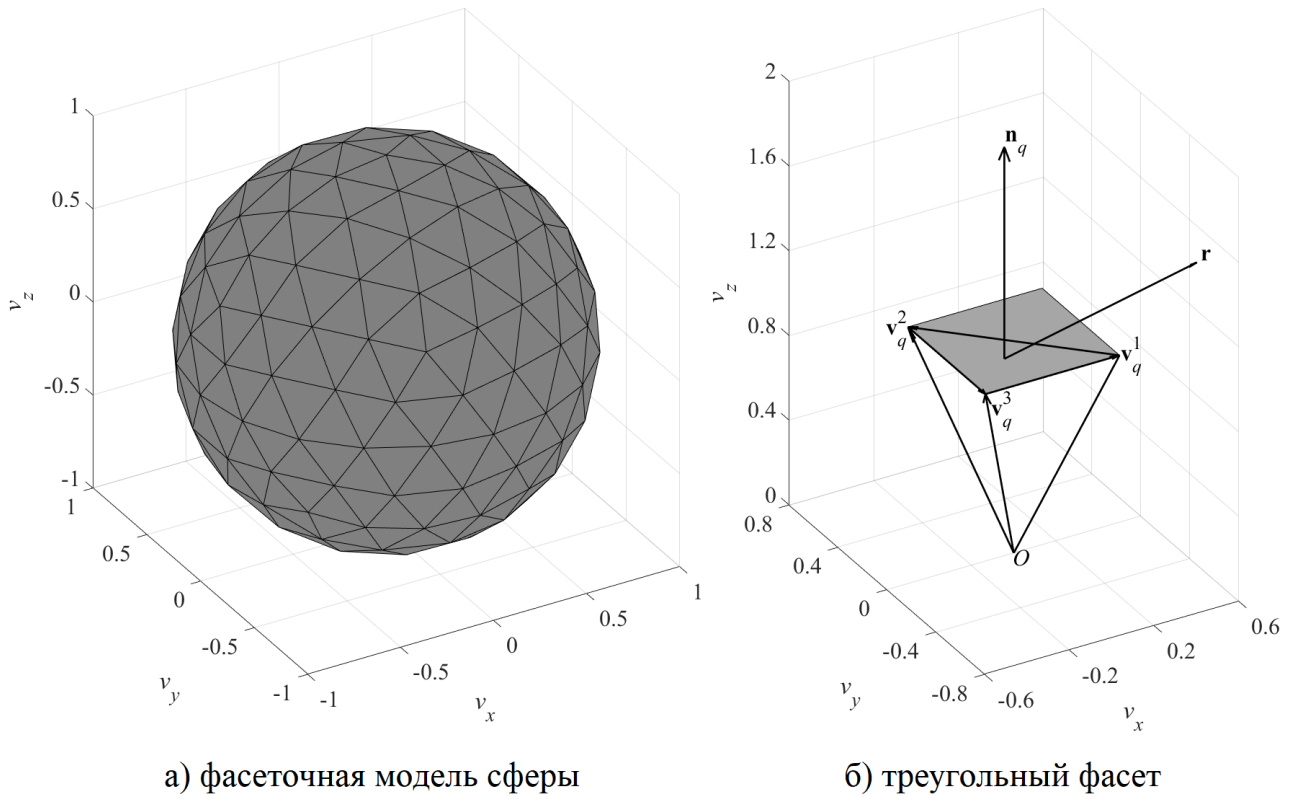


Рис. 1. Геометрическая модель сферы в ДЗ.

Численное интегрирование в формуле (13) любым методом сопряжено с появлением ошибок, значение которых уменьшается с увеличением плотности точек на сфере в ДЗ. Чем меньше максимальный угол $\Delta\theta_{\max}$ между двумя любыми соседними точками, тем меньше ошибок вносится при вынесении общего множителя из-под знака интеграла по поверхности отдельного фасета S_q . Сама поверхность S_q не является частью сферы: $v_q^1, v_q^2, v_q^3 \neq 1$. Однако, чем больше число фасетов Q , тем меньше дифракционный интеграл (16) по поверхности треугольного фасета будет отличаться от дифракционного интеграла по поверхности сферы. Окончательно, разложение в спектр скалярных плоских волн для уточненной формулы (13) принимает следующий вид:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{ie^{ikr'}}{2\lambda r'} \sum_q \left(1 + \mathbf{n}_q \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_O}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_O|} \right) f_q I_q(\mathbf{r}) e^{-ik\mathbf{n}_q \cdot \mathbf{r}}. \quad (17)$$

Дифракционный интеграл I_q в формуле (17) позволяет аналитически объединять эквивалентные моды, которые отличаются друг от друга только

множителем $e^{-ik\mathbf{n}_q \cdot \mathbf{r}}$. При выполнении критерия (14) дифракционный интеграл I_q стремится к значению площади треугольного фасета S_q :

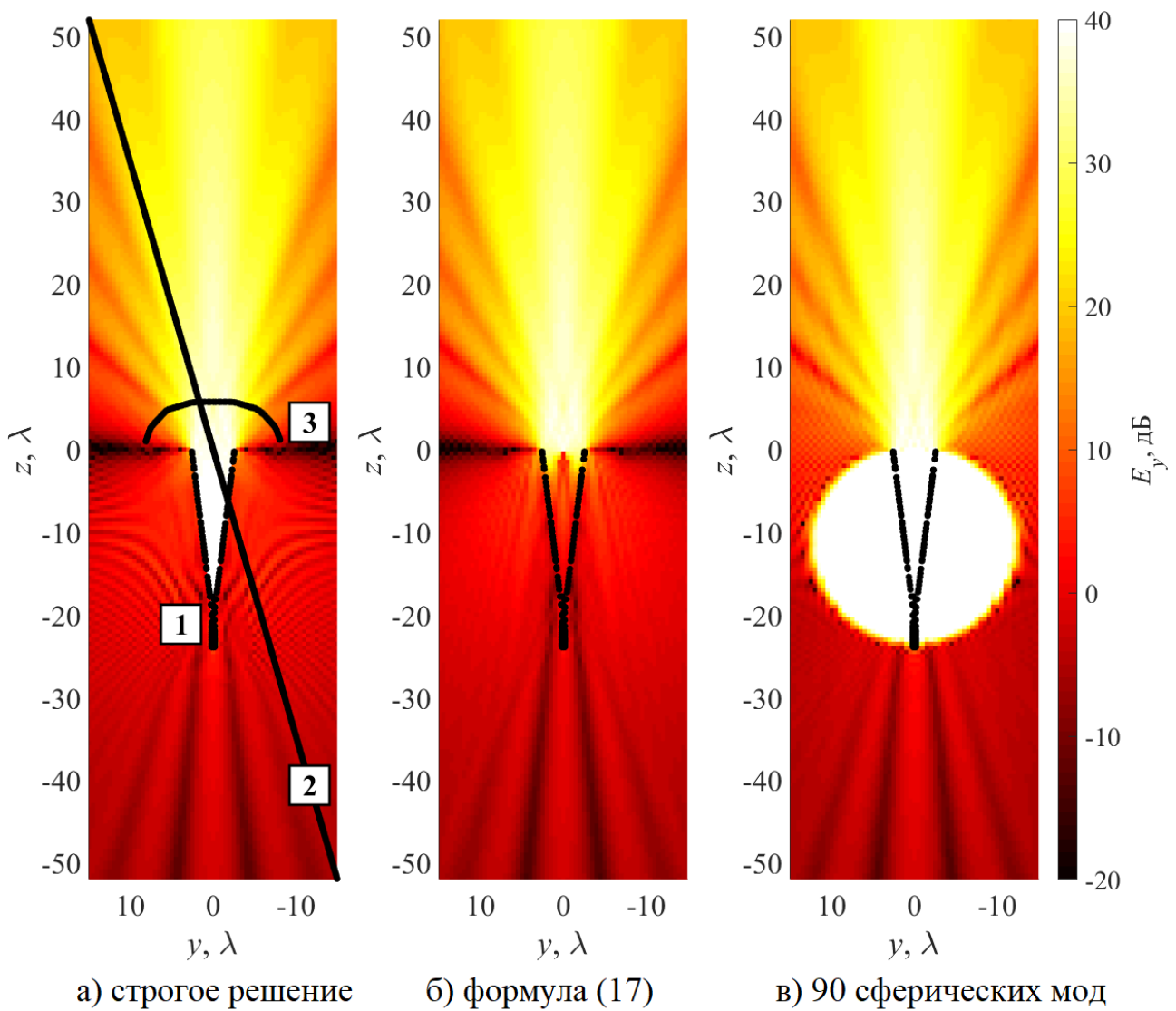
$$\lim_{S_q \rightarrow 0} I_q = S_q.$$

Хотя для расчета волнового поля f во всех точках $\mathbf{r}$ используется один и тот же набор комплексных амплитуд f_q , сам спектр изменяется путем пропускания через фильтр (11). Для каждой пары скалярных плоских волн a_q из формулы (10), которые распространяются навстречу друг другу, сумма весовых функций (11) равна единице. Таким образом, разложение (17) в спектр скалярных плоских волн по всем направлениям эквивалентно сумме разложений по двум полупространствам, для каждого из которых весовая функция (11) определяет вклад в значение волнового поля f в точке $\mathbf{r}$.

3. Апробация разложения волнового поля в спектр скалярных плоских волн

Апробация формулы (17) была проведена по следующим данным: точному решению электромагнитного излучения точечного диполя [4], строгому решению электромагнитного излучения рупорной антенны методом интегральных уравнений [18] и экспериментально измеренному коэффициенту передачи S_{21} между этой же исследуемой антенной и открытым концом прямоугольного волновода. Во всех трех случаях использовалась одна и та же схема, приведенная на рис. 2а.

Источник электромагнитного излучения на частоте 30 ГГц ($\lambda = 1$ см) размещался в начале декартовой системы координат $Oxyz$. Моделью точечного диполя являлась объемная плотность магнитного тока $\mathbf{j}_m = i\omega\{d_{mx}, 0, 0\}\delta(\mathbf{r})$ в точке $\{0, 0, 0\}$, где d_m – магнитный дипольный момент; δ – дельта-функция Дирака. Центр раскрыва фасеточной модели рупорной антенны П6-132 (1) с размером прямоугольной апертуры $6,8\lambda \times 5,4\lambda$ ($x \times y$) совпадал с началом системы координат (рис. 2а). Ось Ox направлена параллельно большей стороне раскрыва, а ось Oy – меньшей. Ось Oz перпендикулярна плоскости апертуры.

Рис. 2. Расчет поля в плоскости Oyz .

Результаты теоретических расчетов по формуле (17) анализировались вдоль прямой (2), которая проходит через начало системы координат в направлении $\theta = 16,1^\circ$ и $\varphi = 90,0^\circ$, и на прямоугольной поверхности в плоскости Oyz с центром в точке $\{0, 0, 0\}$, на которой было взято 61×209 точек ($y \times z$) в узлах прямоугольной эквидистантной сетки с шагом $\Delta x = \Delta y = \lambda / 2$ (рис. 2а).

В эксперименте измерялся коэффициент передачи S_{21} с зондовой антенной – открытым концом прямоугольного волновода сечением $0,72\lambda \times 0,34\lambda$ ($x \times y$). Зондовая антенна всегда была ориентирована одинаково против исследуемой антенны (оси Oz). Большая сторона ее раскрыва была параллельна оси Ox , а меньшая – оси Oy . Центр раскрыва зондовой антенны с помощью

коллорабративного робота с шестью вращательными степенями свободы помещался в

- 2442 точки на неканонической поверхности (3) на расстоянии 6λ от исследуемой антенны [8];

- те же точки, но смещенные на расстояние $0,1\lambda$ вдоль нормали к неканонической поверхности (3);

- 61×101 точек ($y \times z$) в узлах прямоугольной эквидистантной сетки с шагом $\Delta x = \Delta y = \lambda / 2$ и центром в точке $\{0, 0, 27\lambda\}$.

Исходными данными для формулы (17) служат значения волнового поля на сфере в ДЗ. В теоретических расчетах значения волнового поля были получены с помощью точного и строгого решений, а в экспериментальных – с помощью преобразования волнового поля в ДЗ с неканонической поверхности в БЗ. Требования к разбиению сферы в ДЗ конечным числом точек отличались. Параметры разбиений приведены в таблице 1.

Точное решение задачи излучения электромагнитного поля точечного диполя позволяет наиболее точно оценить методические ошибки расчетов по формуле (17). На рис. 3 приведены результаты расчета ко-поляризованной компоненты E_y напряженности электрического поля вдоль луча (рис. 2а). Если ограничиться только суммой по сфере №1 без весовых функций (11) и дифракционных интегралов (16), то всюду наблюдаются ошибки в виде осцилляций. В силу симметрии электромагнитного излучения точечного диполя, по формуле (10) вдоль каждой прямой навстречу друг другу распространяются равные по амплитуде скалярные плоские волны. Их синфазное сложение приводит к удвоению амплитуды, что эквивалентно значению 6 дБ на рис. 3.

Таблица 1. Параметры моделей сфер в ДЗ.

№	Разбиение	$\theta_{\max}, ^\circ$	Число точек	$\rho_{\max}, \lambda$
1	равномерное, $\Delta\theta_{\max} = 4,30^\circ$	180	5120	13,3
2	равномерное, $\Delta\theta_{\max} = 2,15^\circ$	180	20480	26,6
3	полярное $\Delta\theta = \Delta\varphi = 4^\circ$	180	3962	14,3
4	полярное $\Delta\theta = \Delta\varphi = 2^\circ$	180	16022	28,6
5	полярное $\Delta\theta = 1^\circ, \Delta\varphi = 2^\circ$	180	32222	57,7
6	полярное $\Delta\theta = 1^\circ, \Delta\varphi = 2^\circ$	70	12601	57,7

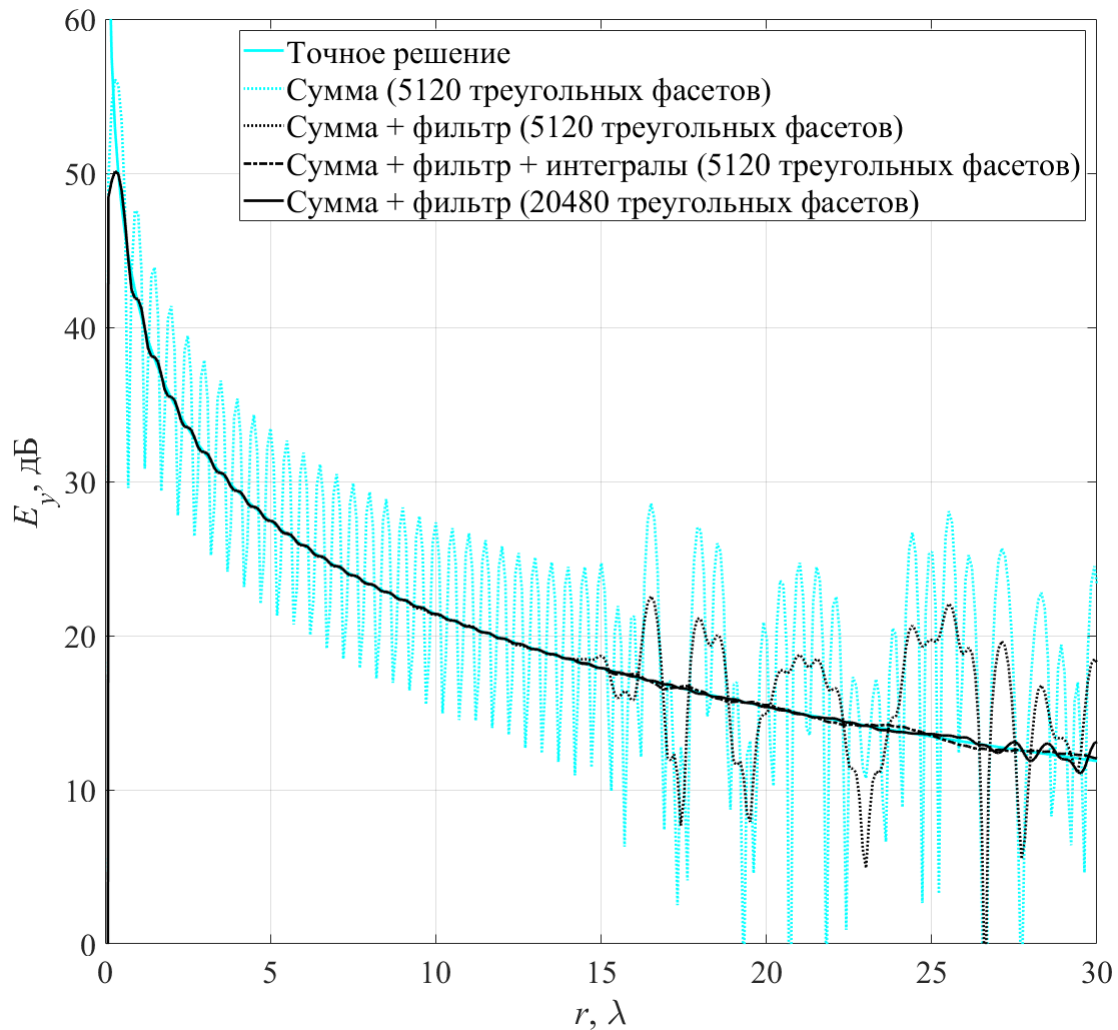


Рис. 3. Поле точечного диполя в луче как сумма скалярных плоских волн.

Добавление весовых функций (11) к той же сумме по сфере №1 устраняет на рис. 3 осцилляции до расстояния $r = 15,0\lambda$, что несколько больше рассчитанного по формуле (15) значения $r_{\max} = 13,3\lambda$. На больших расстояниях невыполнение критерия (14) проявляется в виде ошибок до 10 дБ.

Наконец, вычисление всей суммы по формуле (17) с весовыми функциями (11) и дифракционными интегралами (16) на рис. 3 устранило ошибки, обусловленные невыполнением критерия (14). Альтернативный способ устранения этих ошибок заключается в увеличении плотности точек на сфере в ДЗ. Увеличение на сфере №2 в 4 раза числа слагаемых в сумме без дифракционных интегралов (16) на расстояниях $r < 27,0\lambda$ дало такой же эффект по сравнению с суммой по сфере №1 с дифракционными интегралами (16).

Представляет интерес сравнение разложения (17) волнового поля в спектр скалярных плоских волн с широко применяемым разложением (1)

электромагнитного поля в спектры векторных волн. Среди последних, для сферы в ДЗ, а, значит, и ДН антенны наиболее удобными являются векторные сферические волны (4) и (5). Коэффициенты соответствующего модального разложения в этом случае вычисляются из условия ортогональности с помощью интегралов по поверхности сферы [9].

На рис. 4 также приведены результаты расчета ко-поляризованной компоненты E_y напряженности электрического поля вдоль луча (рис. 2а). Если электромагнитное поле на сфере №3 разложить по $Q = 70$ сферическим модам, то значительные ошибки возникают на расстояниях $r < 10,0\lambda$, что сопоставимо со значением $\rho_{\min} = 9,5\lambda$ по формуле (6).

Увеличение для той же сферы №3 числа сферических мод до $Q = 130$ приводит к увеличению радиуса минимальной сферы до $\rho_{\min} = 19,1\lambda$ по формуле (6). В то же время, формула (15) дает оценки $\rho_{\max} = 14,3\lambda$. Из рис. 4 видно, что в случае превышения радиусом $\rho_{\min}$ минимальной сферы радиуса $\rho_{\max}$ максимальной сферы, возникают значительные ошибки до 10 дБ. На этом же рисунке приведены результаты вычисления суммы (17) по той же сфере №3 с весовыми функциями (11), но без дифракционных интегралов (16). Видно, что ошибки вычисления этой суммы при $r > \rho_{\max}$ качественно согласуются с ошибками разложения по $Q = 130$ сферическим модам при $r > \rho_{\min}$. Таким образом, при вычислении коэффициентов разложения электромагнитного поля в спектр векторных сферических волн с помощью интегрирования по поверхности сферы должен выполняться критерий (14) [9]. Число сферических мод Q при разложении электромагнитного поля на сфере радиусом ρ ограничивается следующим неравенством:

$$\rho_{\min} \leq (Q-10)/k \leq \min(\rho, \rho_{\max}), \quad (18)$$

где $\rho_{\min}$ – радиус минимальной сферы с центром в начале системы координат, которая описана вокруг источников электромагнитного поля; $\rho_{\max}$ вычисляется по формуле (15).

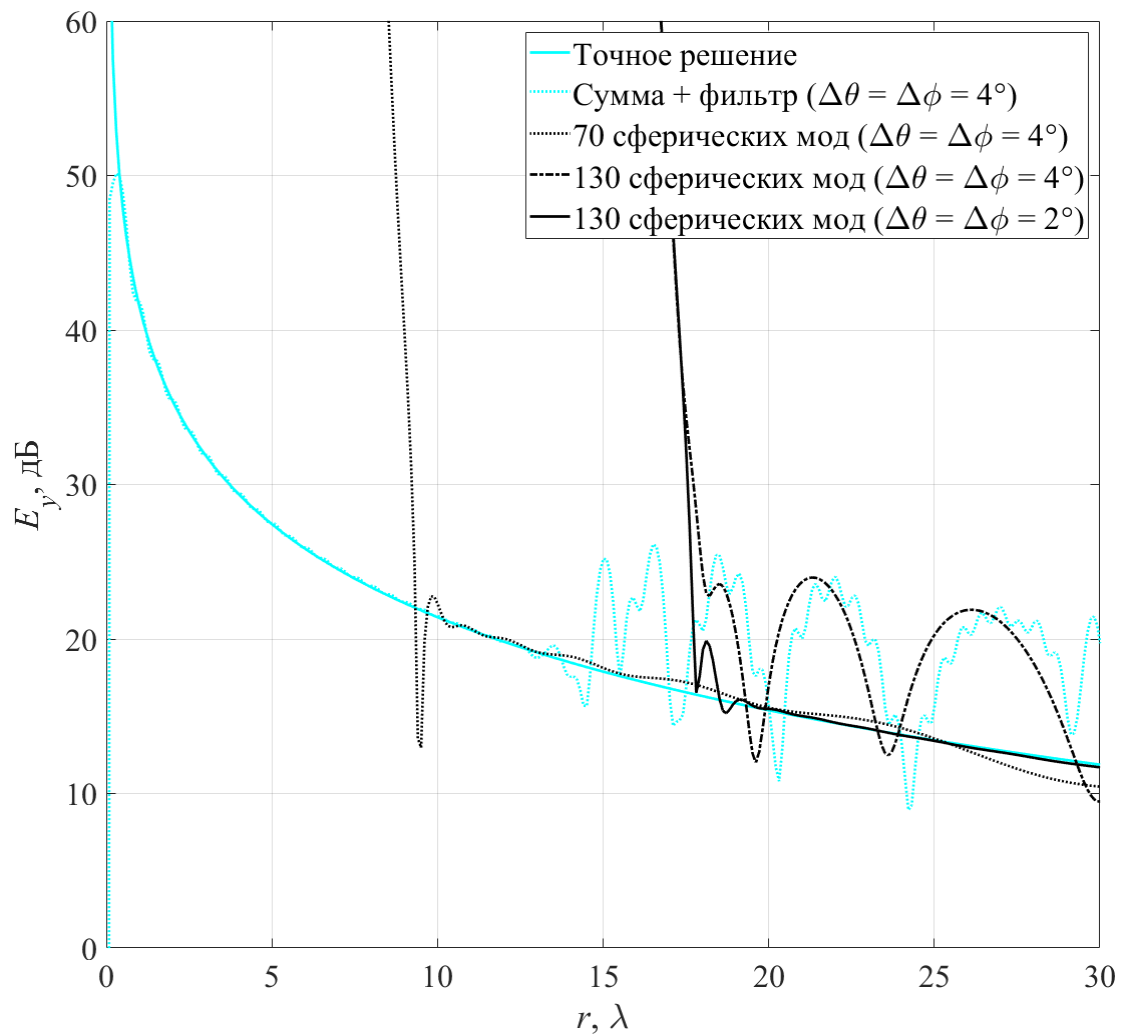


Рис. 4. Поле точечного диполя в луче как сумма векторных сферических волн.

Из неравенства (18) для сферы №4 максимальное число сферических мод может составлять $Q_{\max} = 170$. В связи с этим, разложение на ней электромагнитного поля по $Q = 130$ сферическим модам на рис. 4 не приводит к существенным ошибкам на расстояниях $r > 19,0\lambda$, что согласуется с оценкой $\rho_{\min} = 19,1\lambda$ по формуле (6).

На рис. 5 приведены отклонения результатов расчета ко-поляризованной компоненты ΔE_y напряженности электрического поля от точного решения вдоль луча (рис. 2а). При расчете суммы по сфере №1 с весовыми функциями (11) и дифракционными интегралами (16) методические ошибки до расстояния $r = 15,0\lambda$ монотонно уменьшаются до эквивалентной помехи на уровне -45 дБ. На больших расстояниях добавляются дополнительные методические ошибки, которые обусловлены вычислением дифракционных интегралов (16), отчего эквивалентная помеха увеличивается до уровня -30 дБ.

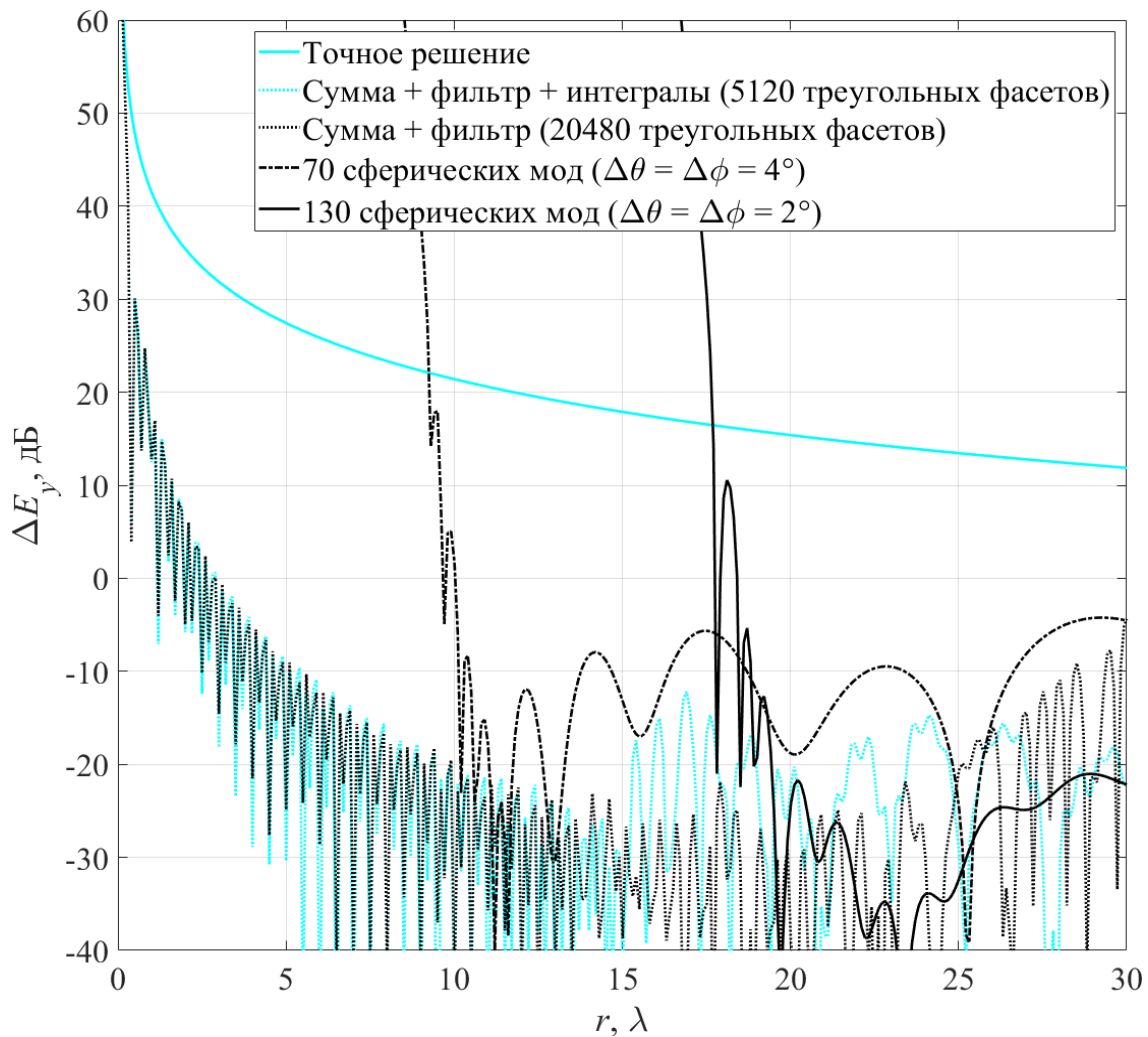


Рис. 5. Отклонение поля точечного диполя в луче от точного решения.

Увеличение числа слагаемых в сумме по сфере №2 в 4 раза в сравнении со сферой №1 без вычисления дифракционных интегралов (16) позволило удерживать методические ошибки в пределах эквивалентной помехи на уровне -40 дБ до расстояния $r = 25,0\lambda$.

Методические ошибки разложения электромагнитного поля на сфере №3 по $Q = 70$ сферическим модам эквивалентны помехе на уровне -20 дБ, начиная с расстояния $r = 10,0\lambda$. Уменьшение шага по полярным и азимутальным углам в сфере №4 в сравнении со сферой №3 позволило разложить электромагнитное поле по $Q = 130$ сферическим модам. При этом методические ошибки значительно уменьшились до эквивалентной помехи с уровнем не больше -35 дБ, что сравнимо с точностью вычисления суммы скалярных плоских волн по сфере №2 с весовыми функциями (11), но без дифракционных интегралов (16). Таким образом, методические ошибки вычислений по

формуле (17) соизмеримы с методическими ошибками разложения (1) по векторным сферическим волнам (4) и (5). При этом точность вычислений по формуле (17) зависит только от плотности точек на сфере в ДЗ и не зависит от дополнительных параметров, как, например, число сферических мод Q .

Строгое решение задачи излучения электромагнитного поля рупорной антенны методом интегральных уравнений [18] позволяет оценить погрешность измерений в эксперименте. Для расчета волнового поля по формуле (17) требуется знать фазовый центр излучения $\mathbf{r}_O$. Для прямоугольных рупорных антенн фазовый центр $\mathbf{r}_O$ зависит от сечения ДН. Плоскость Oyz на рис. 2 соответствует E -сечению, фазовый центр $\mathbf{r}_O = \{0, 0, -0,2\lambda\}$ был найден по геометрическим размерам рупорной антенны [19]. Значения волнового поля были взяты на сфере №5, параметры которой позволяют обойтись без вычисления дифракционных интегралов (16).

На рис. 2б приведены результаты расчета по формуле (17) ко-поляризованной компоненты E_y напряженности электрического поля. Основные отличия от строгого решения на рис. 2а заключаются в отсутствии значительного уровня поля внутри рупорной антенны, а также в существенных осцилляциях в области $z < 0$. Последние, по всей видимости, относятся к реактивной части поля, информация о которой отсутствует в ДН излучения.

Разложение электромагнитного поля рупорной антенны в спектр векторных сферических волн (4) и (5) было проведено на той же сфере №5 в системе координат с началом в точке $\{0, 0, -11,5\lambda\}$. Это позволило уменьшить минимальную сферу до радиуса $\rho_{\min} = 12,5\lambda$ и число сферических мод до $Q = 90$. Результаты соответствующих расчетов приведены на рис. 2в. Границы минимальной сферы отчетливо видны по уровню поля 40 дБ, причем рупорная антенна находится в их пределах. Как и на рис. 2б существенные осцилляции в области $z < 0$ отсутствуют. Другим заметным отличием поля на рис. 2в от рис. 2а и рис. 2б является отсутствие провала вблизи оси Oy .

С целью более детального сравнения на рис. 6 приведены результаты расчета ко-поляризованной компоненты E_y напряженности электрического поля

вдоль луча (рис. 2а). Методические ошибки вычислений по формуле (17) в передней полусфере $r > 0$ эквивалентны помехе на уровне не больше -30 дБ. Внутри рупорной антенны $-7\lambda < r < 0$ результаты расчета неудовлетворительные, однако снаружи в области реактивного поля $-15\lambda < r < -7\lambda$ уровень эквивалентной помехи не превышает -10 дБ, а при $r < -40\lambda$ не больше -30 дБ.

Методические ошибки разложения (1) в спектр векторных сферических волн (4) и (5) эквивалентны помехе на уровне не больше -30 дБ при $r > 5\lambda$ и $r < -40\lambda$. Внутри и вблизи минимальной сферы $-24\lambda < r < \lambda$ результаты расчета неудовлетворительные. В задней полусфере в области $-40\lambda < r < -24\lambda$ методические ошибки разложения (1) по векторным сферическим волнам (4) и (5) совпадают с методическими ошибками вычислений по формуле (17).

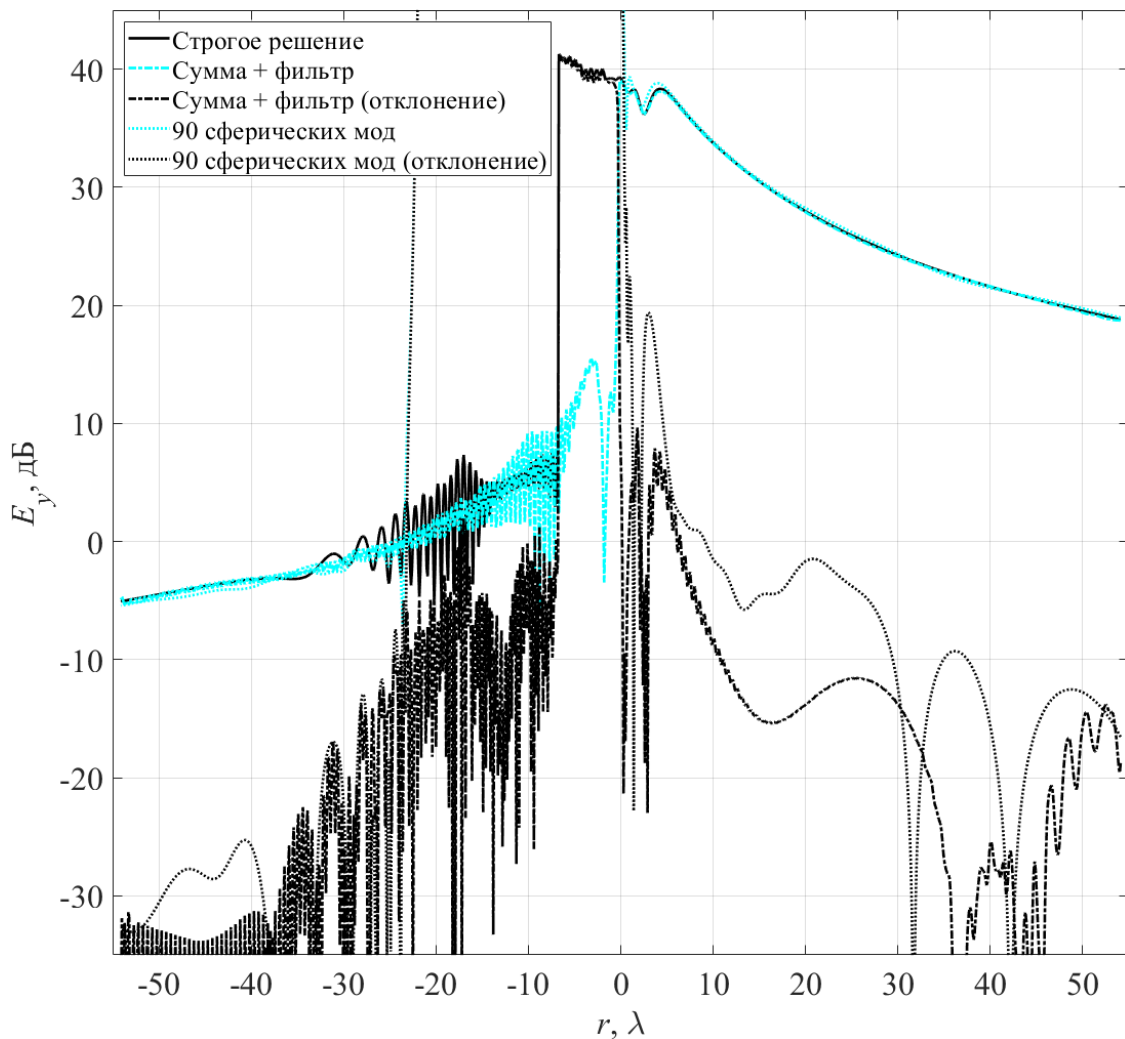


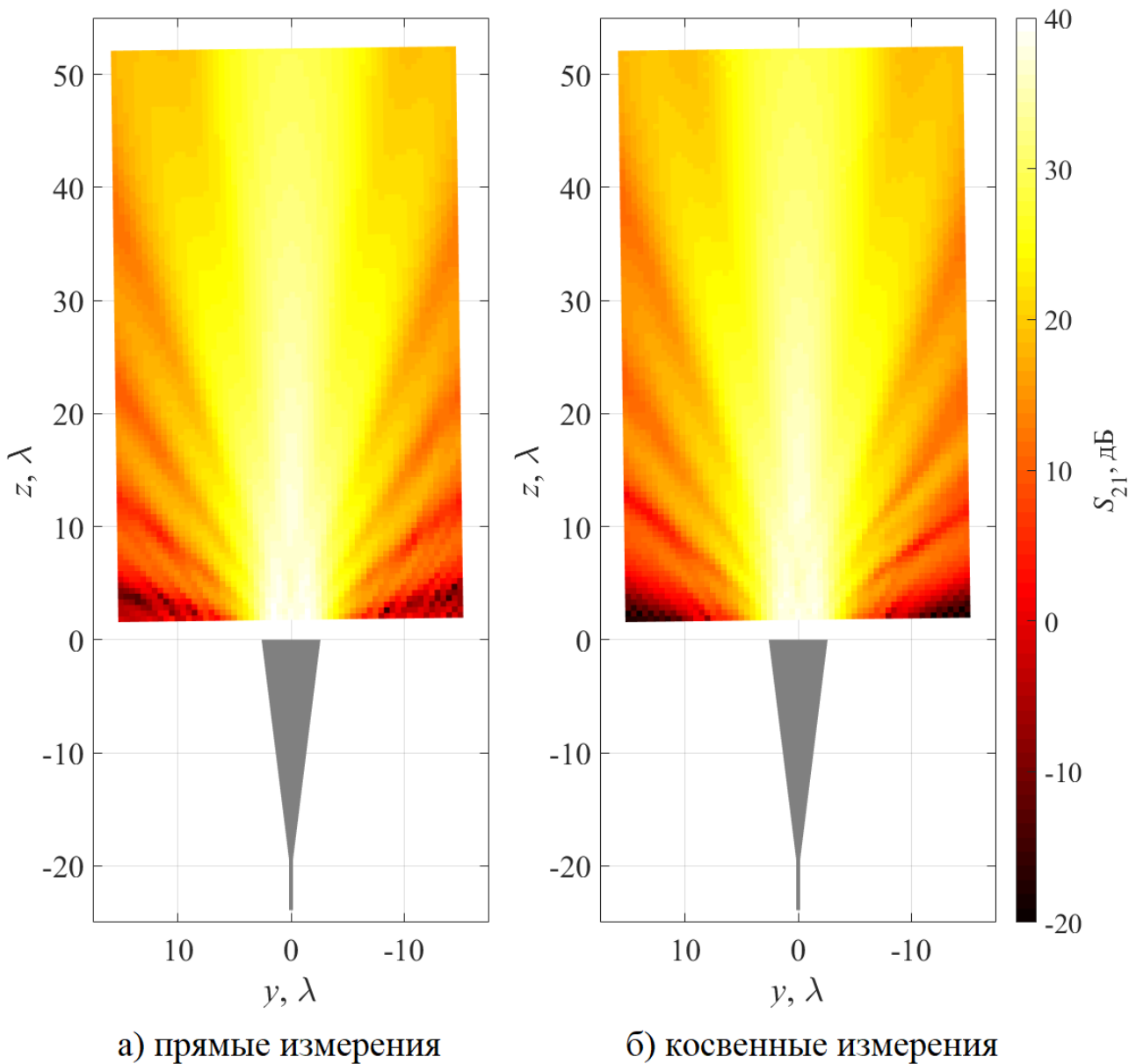
Рис. 6. Поле рупорной антенны в луче.

Таким образом, методические ошибки вычислений по формуле (17) вне минимальной сферы не превышают методические ошибки разложения (1) по векторным сферическим волнам (4) и (5). При этом формула (17) позволяет рассчитывать волновое поле вплоть до его источников с точностью, достаточной для решения задач диагностики антенн и антенных решеток.

Экспериментальная апробация была проведена только для формулы (17) по данным измерений коэффициента передачи S_{21} между рупорной антенной и открытым концом прямоугольного волновода на двух близких неканонических поверхностях на расстоянии 6λ и в сечении Oyz . В первом приближении можно считать, что коэффициент передачи S_{21} пропорционален ко-поляризованной компоненте E_y напряженности электрического поля, а влиянием диаграммы направленности зондовой антенны на результаты измерений можно пренебречь. С целью избегания столкновений зондовой антенны с исследуемой антенной и ее опорой, измерения коэффициента передачи S_{21} были проведены только в области $z > 2\lambda$ (рис. 7). Антенны друг относительно друга удалось выставить с конечной точностью. При обработке результатов экспериментов было установлено, что наилучшее согласие с расчетами на рис. 2 достигается при повороте точек измерений коэффициента передачи S_{21} на угол $-0,8^\circ$ вокруг оси Ox (рис. 7).

На рис. 7а приведены результаты прямых измерений коэффициента передачи S_{21} в сечении Oyz . Существенные отличия от расчетных значений ко-поляризованной компоненте E_y напряженности электрического поля на рис. 2а не наблюдаются.

На рис. 7б приведены результаты косвенных измерений коэффициента передачи S_{21} после преобразования волнового поля с неканонической поверхности в БЗ на сферу №6 в ДЗ и последующего обратного преобразования в сечение Oyz по формуле (17) без дифракционных интегралов (16). Видно хорошее согласие с результатами прямых измерений на рис. 7а.

Рис. 7. Поле в плоскости Oyz в экспериментах.

С целью более детального сравнения на рис. 8 и рис. 9 приведены распределения коэффициента передачи S_{21} в отдельных сечениях. Разность результатов косвенных и прямых измерений позволяет оценить составляющие погрешности измерений, обусловленные областью применимости формулы (17) и несовпадением истинных координат с расчетными на рис. 7.

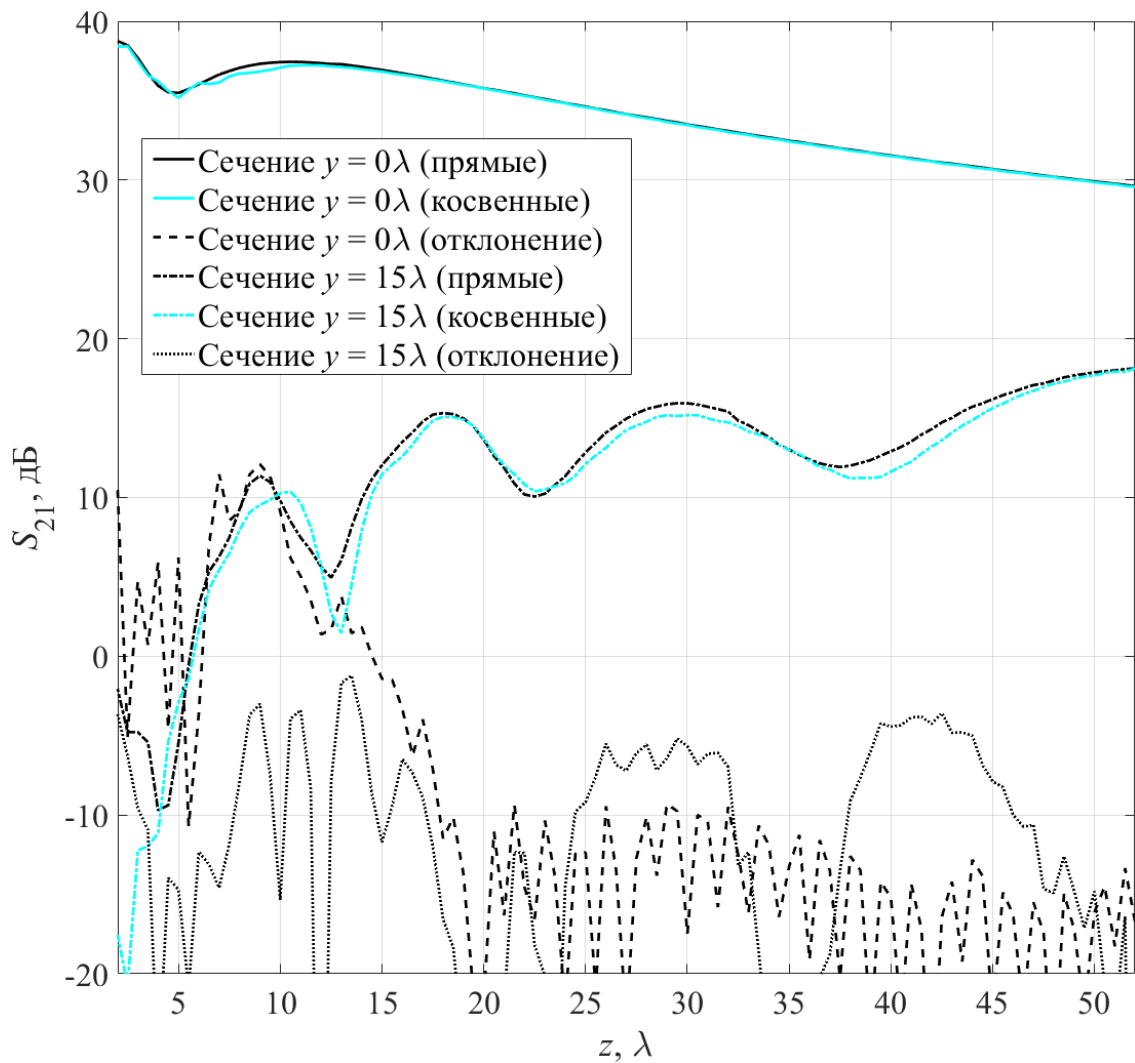


Рис. 8. Поле рупорной антенны в z -сечениях в экспериментах.

Из рис. 8 и рис. 9 видно, что эквивалентная помеха не превышает уровень -40 дБ относительно максимума поля всюду за исключением двух областей. На рис. 8 эквивалентная помеха с уровнем -30 дБ наблюдается в точках $\theta > 70^\circ$, т.е. за пределами точек, которые были взяты на сфере №6. На рис. 9 эквивалентная помеха с уровнем -20 дБ наблюдается в прожекторном пучке вблизи апертуры исследуемой антенны и, по всей видимости, связана с существенным уровнем электромагнитных волн, отраженных от зондовой антенны. Таким образом, методическая погрешность измерений с помощью формулы (17) оценивается эквивалентной помехой с уровнем не больше -40 дБ.

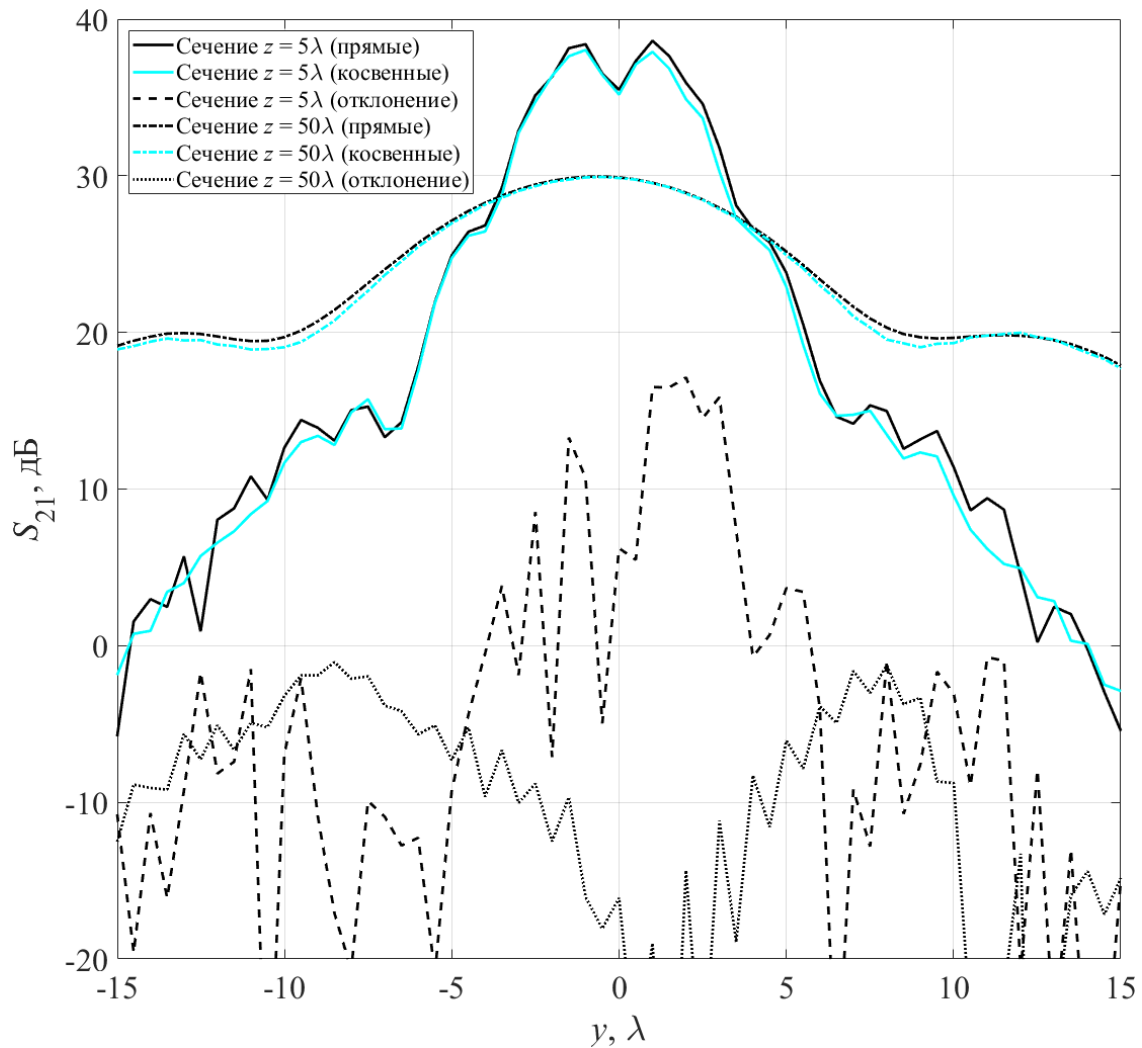


Рис. 9. Поле рупорной антенны в y -сечениях в экспериментах.

Заключение

Разложение волнового поля в спектр скалярных плоских волн чрезвычайно удобно для решения прикладных задач. Его коэффициенты получаются путем прямой подстановки значений ДН излучения, которая может быть рассчитана теоретически или измерена в эксперименте. Предложенная весовая функция осуществляет выбор единственной линейной комбинации из каждой пары плоских волн, которые распространяются навстречу друг другу. Ее добавление в разложение в спектр скалярных плоских волн позволяет существенно повысить точность, исключив появление ошибок в виде стоячих волн. Разбиение сферы единичного радиуса на треугольные фasetы и вычисление дифракционных интегралов по каждому фasetу позволяет значительно увеличить расстояние,

на котором волновое поле может быть представлено конечной суммой скалярных плоских волн.

Точность разложения волнового поля в спектр скалярных плоских волн зависит от точности оценки градиента фазы волнового поля. Наиболее доступный на практике метод основывается на расчете фазового центра излучения. Методические ошибки разложения волнового поля в спектр скалярных плоских волн зависят от расстояния и эквивалентны помехе от уровня -40 дБ на границе сходимости конечной суммы без дифракционных интегралов до уровня -10 дБ непосредственно у источников. Таким образом, точность разложения волнового поля в спектр скалярных плоских волн сравнима с точностью вычисления интеграла Кирхгофа.

Литература

1. Сазонов Д.М. и др. Антенны и устройства СВЧ. – 1988.
2. Balanis C.A. (ed.). Modern antenna handbook. – John Wiley & Sons, 2011.
3. Augustus Edward Hough Love. The integration of the equations of propagation of electric waves // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. – 1901. – Т. 197. – №. 287-299. – С. 1-45. <https://doi.org/10.1098/rsta.1901.0013>
4. Стрэттон Дж.А. и др. Теория электромагнетизма // Москва. – 1948.
5. Eibert T.F. et al. Electromagnetic field transformations for measurements and simulations // Progress In Electromagnetics Research. – 2015. – Т. 151. – С. 127-150. <https://doi.org/10.2528/PIER14121105>
6. Анютин Н.В. Метод приближенного вычисления интеграла Кирхгофа // Журнал радиоэлектроники. – 2024. – №. 4. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.4.7>
7. Zolotarev M.S. McDonald K.T. Time-Reversed Diffraction // arXiv preprint physics/0003058. – 2000.

8. Аняутин Н.В. Преобразование электромагнитного поля с описанной вокруг антенны замкнутой поверхности на апертуру антенны // Измерительная техника. – 2021. – №. 1. – С. 48-55. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-1-48-55>
9. Hansen W.W. A new type of expansion in radiation problems // Physical review. – 1935. – Т. 47. – №. 2. – С. 139. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.139>
10. Booker H.G., Clemmow P.C. The concept of an angular spectrum of plane waves, and its relation to that of polar diagram and aperture distribution // Proceedings of the IEE-Part III: Radio and Communication Engineering. – 1950. – Т. 97. – №. 45. – С. 11-17. <https://doi.org/10.1049/pi-3.1950.0002>
11. Gregson S., McCormick J., Parini C. Principles of planar near-field antenna measurements. – IET, 2007. – Т. 53.
12. Ludwig A. Near-field far-field transformations using spherical-wave expansions // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1971. – Т. 19. – №. 2. – С. 214-220. <https://doi.org/10.1109/TAP.1971.1139909>
13. Hansen J.E. (ed.). Spherical near-field antenna measurements. – Iet, 1988. – Т. 26.
14. Бородулин А.А. Определение фазового центра излучения по методу наименьших квадратов // Радиотехника. – 1958. – Т. 13. – №. 7. – С. 127-150.
15. Anyutin N., Malay I., Malyshev A. Calculation of Phase Center of Arbitrary Electromagnetic Radiation Sources in Near Field Zone // 2019 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS). – IEEE, 2019. – С. 1-4. <https://doi.org/10.1109/EWDTS.2019.8884470>
16. Gordon W. Far-field approximations to the Kirchoff-Helmholtz representations of scattered fields // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1975. – Т. 23. – №. 4. – С. 590-592. <https://doi.org/10.1109/TAP.1975.1141105>
17. Олюнин Н.Н. Фасеточная модель в задачах рассеяния электромагнитных волн на телах с импедансной поверхностью // Труды Московского физико-технического института. – 2009. – Т. 1. – №. 2. – С. 84-91.
18. Gibson W.C. The method of moments in electromagnetics. – CRC press, 2014.

19. Muehldorf E. The phase center of horn antennas // IEEE transactions on antennas and propagation. – 1970. – Т. 18. – №. 6. – С. 753-760.
<https://doi.org/10.1109/TAP.1970.1139799>

Для цитирования:

Анютин Н.В. Разложение волнового поля во всем пространстве в спектр скалярных плоских волн // Журнал радиоэлектроники. – 2025. – №. 9. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.9.1>