

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.9.12>

УДК: 535.231.16

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИГНАЛА ПРИ СМЕЩЕНИИ ФУНКЦИИ
РАССЕЯНИЯ ТОЧКИ В ВИДЕ ГАУССОИДЫ ВРАЩЕНИЯ,
ВПИСАННОЙ В ЧЕТЫРЕ ПИКСЕЛА МАТРИЧНОГО
ФОТОПРИЕМНИКА И СРАВНЕНИЕ С СИГНАЛОМ
ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ РАССЕЯНИЯ ТОЧКИ**

И.В. Знаменский, Е.О. Зотьев, А.Т. Тунгушпаев

АО «Научно-производственная корпорация «Системы прецизионного
приборостроения»
111024, Москва, Авиамоторная, 53

Статья поступила в редакцию 17 июня 2025 г.

Аннотация. Предмет исследования. Изменение уровня сигнала пиксела матрицы при смещении функции рассеяния точки в виде гауссоиды вращения относительно точки стыка четырех пикселей фоточувствительной матрицы.

Цель работы. Определение зависимости величины сигнала от смещения функции рассеяния точки, вписанной в четыре пиксела фоточувствительной матрицы, для распределения облученности в виде гауссоиды вращения и сравнение с сигналом для цилиндрической функции рассеяния точки.

Метод. В основу расчета положен метод разбиения функции рассеяния точки на каждом пикселе матрицы на отдельные области, по которым производятся вычисления сигнала. Смещение функции рассеяния точки на Δx по оси X и на Δy по оси Y берется в нормированном к радиусу пятна виде. Спектральная чувствительность пиксела постоянна в пределах площади пиксела и для разных пикселей. Для создания двумерного графика зависимости сигнала пиксела от смещения функции рассеяния точки по осям X , Y введена ось смещения функции

рассеяния точки η . **Основные результаты.** Разработан алгоритм расчета изменения уровня сигнала пикселя матрицы при смещении функции рассеяния точки в виде гауссоиды вращения относительно стыка четырех пикселей фоточувствительной матрицы. Построена зависимость нормированного сигнала пикселя матрицы от относительного смещения функции рассеяния точки η под углом 45° и 0° (90°) для вышеуказанного случая облученности. Построена зависимость суммарного нормированного сигнала для гауссоиды вращения при смещении ФРТ под углом 45° : а) при бинировании пикселей, б) при сумме пяти пикселей в виде креста. Проведена сравнительная оценка сигналов для двух видов функции рассеяния точки: гауссоида вращения и цилиндр. **Практическая значимость.** При смещении функции рассеяния точки относительно стыка четырех пикселей матрицы происходит падение сигнала, снимаемых с этих пикселей, что при малом отношении сигнал/шум может приводить к срыву сопровождения или увеличению погрешности измерения угловых координат космических объектов. При энергетическом расчете оптико-электронных систем падение сигнала из-за смещения функции рассеяния точки на величину η позволит определить минимальный сигнал и, следовательно, минимальное отношение сигнал/шум. Аналитическое выражение сигналов с пикселей будет полезно при моделировании приема смеси сигнала и шума.

Ключевые слова: дифракция, матрица, пиксель, гауссоида вращения, функция рассеяния точки.

Автор для переписки: Знаменский Игорь Всеволодович

igorznamenskii@yandex.ru

Введение

В системах наведения и сопровождения космических объектов широко используются матричные фотоприемники [1-3].

Аппроксимация облученности в фокальной плоскости объектива в виде гауссоиды вращения широко используется при математическом моделировании оптико-электронных средств (ОЭС) [3-6].

В [5,6] рассмотрено смещение функции рассеяния точки (ФРТ), вписанную в один пиксел. В [6] рассмотрено смещение ФРТ под углом 45° и 0° , 90° . В [5] рассмотрено смещение ФРТ под любым углом. В работах представлены зависимости уровня сигнала от величины смещения.

В [7] показано, что одинаковый входной сигнал от объекта приводит к различным представлениям изображения объекта т.е. к разным центроидам. В статье получены строгие выражения для вычисления дисперсии центроида с использованием нижней границы Рао-Крамера (ГКР). Выражения зависят от отношения сигнала к шуму, размера пикселя и размера площади облученности сигнала объекта относительно пикселей.

В [8] рассмотрены два положения пятна относительно середины ближайшего пикселя:

- 1) центр пятна совпадает с серединой пикселя;
- 2) центр пятна лежит на стыке четырех пикселей.

При размерах эффективного диаметра функции рассеяния объектива, соизмеримых с размерами фоточувствительных элементов ПЗС-матрицы, форма согласованного фильтра будет зависеть от местоположения центра пятна относительно середины ближайшего пикселя.

В [9-12] рассмотрена погрешность определения центра ФРТ в зависимости от соотношения между размером пикселя и диаметром ФРТ, а также отношения сигнал-шум. В [10] выбирается оптимальный порог. В [11] для моделирования положен метод многократных статистических испытаний Монте-Карло, позволяющий наиболее точно отобразить шумовые процессы, возникающие при

приеме и преобразовании оптической информации в оптико-электронном тракте координатного устройства.

В [13] проанализировано влияние начального смещения центра изображения малоразмерного объекта относительно центра пиксела на точность определения его положения с учетом фона и шума считывания. Для определения координат центра изображения малоразмерного объекта использован метод центра тяжести.

В работах [14,15] координаты энергетического центра изображения звезды вычисляются с субпиксельной точностью с использованием метода среднего взвешенного на этапе локализации звездных объектов. Точность определения энергетического центра звезды зависит от размеров пиксела ПЗС-матрицы и от отношения сигнал/шум. В работе [15] рассмотрен метод измерения с помощью взаимно корреляционной функции и наиболее часто применяемый метод взвешенных сумм.

В работе [16] проведено моделирование и определена погрешность вычисления центроида точечного источника. Исследовалась методическая погрешность, которая возникает при определении энергетического центра тяжести изображения точечного объекта из-за дискретности структуры. Исследовалось взаимное положение изображения точечного объекта и пикселей ПЗС-матрицы.

В работе [17] для протяженного источника при вычислении сигнала на выходе оптической системы используется двухмерный интеграл свертки. В результате получено распределение яркости изображения в фокальной плоскости оптической системы. Процесс пространственной выборки представлен как свертка функции освещенности в плоскости матрицы и гест-функции (чувствительности) умноженные на функцию выборки.

В [18] разработан алгоритм вычисления сигнала (от точечного источника), зависящий от смещения ФРТ, вписанной в четыре пиксела матрицы для равномерного распределения облученности в ФРТ.

При оценке сигнала, считанного пикселем матрицы, необходимо учитывать распределение облученности по площади ФРТ. В настоящей работе рассмотрен случай, когда ФРТ сформирована от точечного источника и учитывается только дифракция. Так же приняты следующие допущения:

- 1) ФРТ принимается симметричной относительно начала координат и относительно положения точечного излучателя в силу малости углов поля зрения оптической системы и отклонение объекта от оптической оси;
- 2) Принимается, что система изопланатическая;
- 3) Чувствительность в пределах площади пиксела постоянна;
- 4) Разброс чувствительности между пикселями представляет собой геометрический шум, который устраняется путем калибровки и корректировки неоднородности. Поэтому в данной работе не учитывается.

Началом оси смещения ФРТ относительно центра матрицы является точка 0 (рис. 1). Распределение облученности в ФРТ описывается гауссоидой вращения. ФРТ вписана в четыре пиксела с центром в точке 0. При смещении кружка рассеяния относительно пикселей матрицы на величину $\Delta x > 0$ по оси X и на $\Delta y > 0$ по оси Y , ФРТ облучает более чем четыре пиксела матрицы (рис. 1). Здесь и далее на рисунках показано 9 пикселей в исходном состоянии (нарисованы черным цветом) и 9 пикселей смещенных относительно исходного положения (нарисованы красным цветом).

В настоящей работе определим уровень сигнала пиксела матрицы в зависимости от величины смещения ФРТ в виде гауссоиды вращения на Δx и Δy по осям X и Y , соответственно.

Здесь ξ_x, ξ_y – относительное смещение ФРТ по осям X и Y , соответственно:

$$\xi_x = \Delta x / R, \quad \xi_y = \Delta y / R.$$

1. Исходные соотношения для облученности в ФРТ в виде гауссоиды вращения

Для качественной оптики на практике используется аппроксимация облученности в ФРТ гауссоидой вращения. Распределение облученности в ФРТ задается формулой [4-6]

$$g(x, y) = A_G \exp\{-(x^2 + y^2) / c^2\}$$

Константа c определяется из соотношения [5,6]

$$c^2 = R^2 / \ln[1 / (1 - p)], \quad c^2 = 2\sigma^2$$

где σ – среднеквадратическое отклонение (параметр гауссоиды), p – уровень мощности, сосредоточенной во всем кружке рассеяния с окружностью радиусом R .

$$p = 1 - \exp(-R^2 / c^2). \quad (1)$$

Принимаем $p = 0,838$ от всей принятой мощности, тогда p соответствует нормированной мощности центрального кружка при распределении облученности в ФРТ, содержащей функцию Бесселя.

Обозначим

$$k = R / c. \quad (2)$$

Константа A_G выбирается из условия нормировки [4-6]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_G \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{c^2}\right) dx dy = 1$$

где $A_G = 1 / (\pi c^2). \quad (3)$

Пространственное распределение облученности представляет собой симметричную гауссоиду. В исходном состоянии ФРТ вписана в четыре пиксела матрицы (рис. 1). При смещении кружка относительно центра пиксела матрицы на величину $\Delta x > 0$ по оси X и на $\Delta y > 0$ по оси Y , ФРТ разбивается на области девятью пикселями матрицы.

Запишем выражение сигнала пиксела в виде интеграла J в полярных координатах [19]

$$J = A_G \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} d\theta \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \exp\left\{-\left(\rho^2 / c^2\right)\right\} \rho d\rho. \quad (4)$$

Выражение (4) используем для любой области ФРТ, различаются только пределы интегрирования.

При вычислении сигнала, сформированного областью S_i пиксела матрицы, пределы интегрирования в выражении (4) зависят от номера пиксела.

Делаем замену переменных во внешнем интеграле (4)

$$t = \exp(-\rho^2 / c^2), \quad -c^2 dt / 2 = \exp(-\rho^2 / c^2) \rho d\rho. \quad (5)$$

Подставив в (4) значение ρ_1 и ρ_2 получим t_1 и t_2 , соответственно. В результате выражение (4) преобразуется к однократному интегралу

$$J = -\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} [t_2 - t_1] d\theta. \quad (6)$$

В выражении (6) величины t_2 и t_1 могут зависеть от θ , что усложняет вычисление интеграла. Поэтому часть интегралов вычислялись численным методом, используя метод Симпсона [19].

а) При угле смещения $\alpha = \pi / 4$, относительное смещение по оси X и по оси Y равны между собой, т.е. $\xi_x = \xi_y = \xi$, где $\xi_x = \Delta x / R$, $\xi_y = \Delta y / R$, Δx , Δy – абсолютное смещение матрицы по оси X и оси Y соответственно.

Прямая OZ – ось смещения матрицы относительно ФРТ.

$$\eta = (\xi_x^2 + \xi_y^2)^{0.5} \text{ или } \eta = 1,4142\xi \text{ где } 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1,4142.$$

б) При угле смещения $\alpha = 0$, т.е. относительное смещение по оси X , пиксели 1, 2, 3 не используются (рис. 1).

$$\xi_x = \Delta x / R = \xi, \quad \xi_y = 0. \quad \eta = \xi, \text{ где } 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

с) При угле смещения $\alpha = 90^\circ$, т.е. относительное смещение по оси Y , пиксели 3, 6, 9 не используются (рис. 1).

$$\xi_x = 0, \quad \xi_y = \Delta y / R = \xi, \quad \eta = \xi; \text{ где } 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

2. Вычисление сигналов при смещении ФРТ под углом 45°

2.1 Определение сигнала V_2 для гауссоиды вращения при $0 \leq \xi \leq 0,2929$

На рис. 1 представлен принцип вычисления сигнала V_2 с пиксела 2 при изменении ξ в диапазоне $0 \dots 0,2929$. Области вычисления отмечены желтым (треугольник abc) и зеленым (сектор cbd) цветом.

Выражение для V_2 , для $0 \leq \xi \leq 0,2929$, имеет вид [18,19]

$$V_2 = \frac{1}{2\pi} \left[\left\{ -\exp(-k^2) \right\} \left\{ \arccos(1-\xi) + \arcsin(\xi) \right\} + J_{21} + J_{22a} - J_{22b} \right],$$

при $0 \leq \xi \leq 0,2929$, где

$$J_{21} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\exp \left\{ -\frac{k^2(1-\xi)^2}{\sin^2 \theta} \right\} \right] d\theta,$$

$$\theta_1 = \arcsin(1-\xi), \quad \theta_2 = \pi - \arccos(\xi),$$

$$J_{22a} = \int_{\theta_2}^{\theta_3} \left[\exp \left\{ -\frac{k^2(1-\xi)^2}{\sin^2 \theta} \right\} \right] d\theta,$$

$$J_{22b} = \int_{\theta_2}^{\theta_3} \left[\exp \left\{ -\frac{k^2 \xi^2}{\cos^2 \theta} \right\} \right] d\theta,$$

$$\theta_3 = \pi / 2 - \operatorname{arctg} \{ \xi / (1-\xi) \}.$$

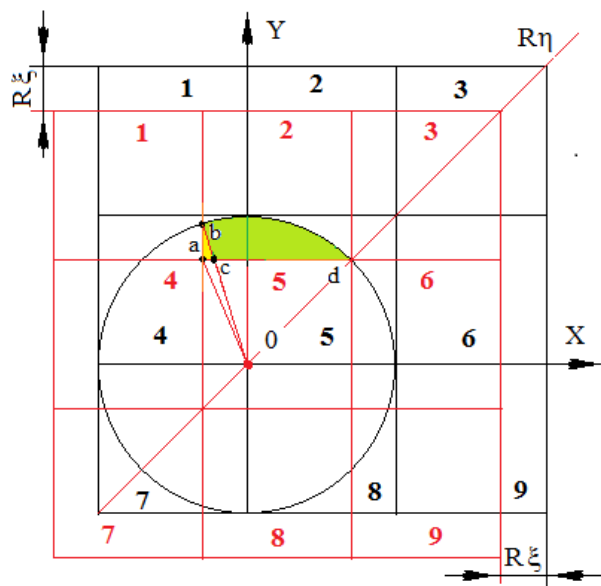


Рис. 1. Принцип вычисления сигнала V_2 с пиксела 2 при $\xi = 0,2929$.

2.2 Определение сигнала V_2 для гауссоиды вращения при $0,2929 \leq \xi \leq 1$

На рис. 2 представлен принцип вычисления сигнала V_2 пиксела 2 при изменении ξ в диапазоне $0,2929 \dots 1$. Области вычисления отмечены желтым (треугольники def и abc) и зеленым (сектор feac) цветом.

Выражение для V_2 для $0,2929 \leq \xi \leq 1$ имеет вид [18,19]

$$V_2 = \frac{1}{2\pi} \left[\left\{ -\exp(-k^2) \right\} \left\{ \arcsin(1-\xi) + \arcsin(\xi) \right\} + J_{23} + J_{24a} - J_{24b} + J_{25a} - J_{25b} \right]$$

при $0,2929 \leq \xi \leq 1$, где

$$J_{23} = \int_{\theta_4}^{\theta_2} \left[\exp \left\{ -\frac{k^2(1-\xi)^2}{\sin^2 \theta} \right\} \right] d\theta,$$

$$\theta_4 = \arccos(1-\xi),$$

$$J_{24a} = \int_{\theta_5}^{\theta_4} \left[\exp \left\{ -\frac{k^2(1-\xi)^2}{\sin^2 \theta} \right\} \right] d\theta,$$

$$J_{24b} = \int_{\theta_5}^{\theta_4} \left[\exp \left\{ -\frac{k^2(1-\xi)^2}{\cos^2 \theta} \right\} \right] d\theta,$$

$$\theta_5 = \pi/4,$$

$$J_{25a} = \int_{\theta_2}^{\theta_6} \left[\exp \left\{ -\frac{k^2(1-\xi)^2}{\sin^2 \theta} \right\} \right] d\theta,$$

$$J_{25b} = \int_{\theta_2}^{\theta_6} \left[\exp \left\{ -\frac{k^2 \xi^2}{\cos^2 \theta} \right\} \right] d\theta,$$

$$\theta_6 = \pi - \arctg \left\{ (1-\xi) / \xi \right\}.$$

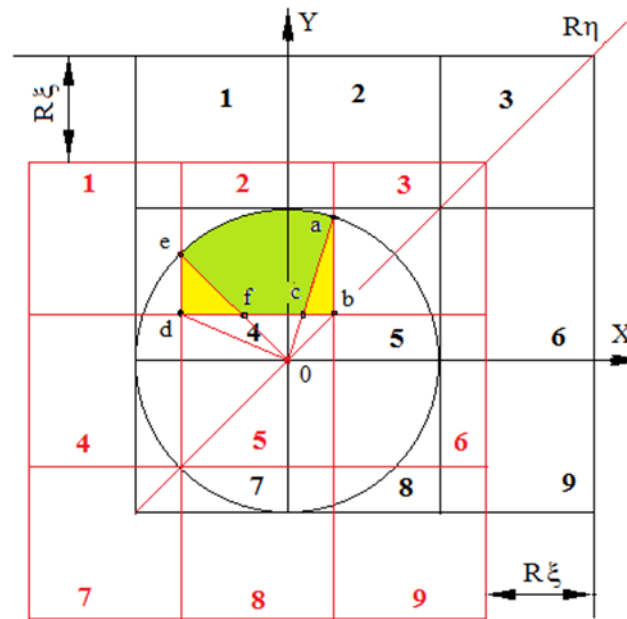


Рис. 2. Принцип вычисления сигнала V_2 пиксела 2 при $\xi = 0,7$.

Выражение для сигнала V_6 равно V_2 , т.е. $V_6 = V_2$, т.к. площадь, формирующая сигнал V_6 , симметрична площади, формирующая сигнал V_2 , относительно оси смещения.

Используя математические выражения сигнала V_2 (V_6) в зависимости от η , построен график, представленный на рис. 7.

Выражение для сигнала V_4 равно V_8 , т.е. $V_4 = V_8$, т.к. площадь, формирующая сигнал V_4 , симметрична площади, формирующая сигнал V_8 , относительно оси смещения.

Получение математических выражений сигналов V_4 (V_8) здесь не приводится, но их вычисление аналогично вычислению V_2 (формула 6).

На рис. 7 представлена зависимость сигнала V_4 (V_8) от η . Из которой видно, что график V_4 (V_8) является зеркальным отражением графика V_2 (V_6) относительно вертикали при $\eta = 0,707$.

2.3 Определение V_3 для гауссоиды вращения при $0,2929 \leq \xi \leq 1$

На рис. 3 представлен принцип вычисления сигнала V_3 с пиксела 3 при изменении ξ в диапазоне $0,2929 \dots 1$. Область вычисления отмечена зеленым цветом (сектор fde).

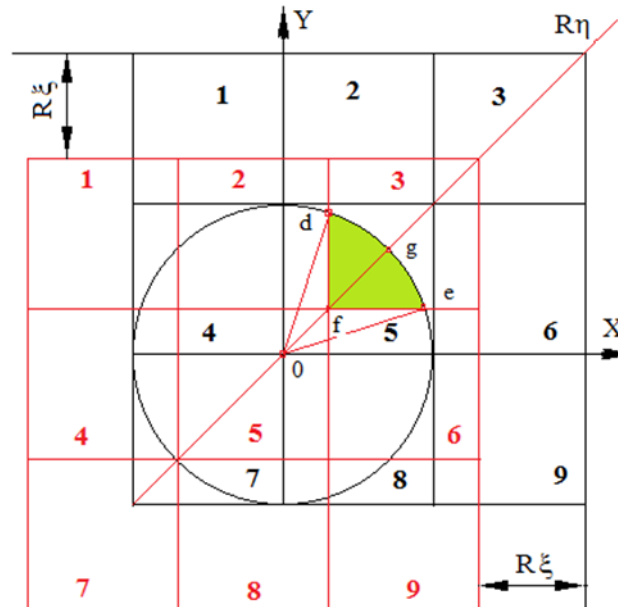


Рис. 3 – Принцип вычисления сигнала V_3 с пиксела 3 при $\eta=0,707$.

Выражение для V_3 при $0,2929 \leq \xi \leq 1$ имеет вид [19,20]

$$V_3 = \frac{1}{2\pi} \left[\exp(-k^2) \{ \arcsin(1-\xi) - \arccos(1-\xi) \} + 2J_{31} \right]$$

при $0,2929 \leq \xi \leq 1$,

$$V_3 = 0,$$

при $0 \leq \xi \leq 0,2929$, где

$$J_{31} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\exp \left\{ -\frac{k^2(1-\xi)^2}{\sin^2 \theta} \right\} \right] d\theta$$

Используя математические выражения сигнала V_3 в зависимости от η , построен график, представленный на рис. 7.

Получение математического выражения сигнала V_7 здесь не приводится, но его принцип вычисления аналогичен вычислению V_3 (формула 6).

На рис. 7 представлена зависимость сигнала V_7 от η . Из которой видно, что график V_7 является зеркальным отражением графика V_3 относительно вертикали при $\eta=0,707$.

2.4 Определение V_5 для гауссоиды вращения при $0 \leq \xi \leq 0,2929$

На рис. 4 представлен принцип вычисления сигнала V_5 с пиксела 5 при изменении ξ в диапазоне $0 \dots 0,2929$. Области вычисления в виде треугольников отмечены желтым (a0b, g0c), зеленым (a0f, b0c) и сиреневым (сектор f0g) цветом.

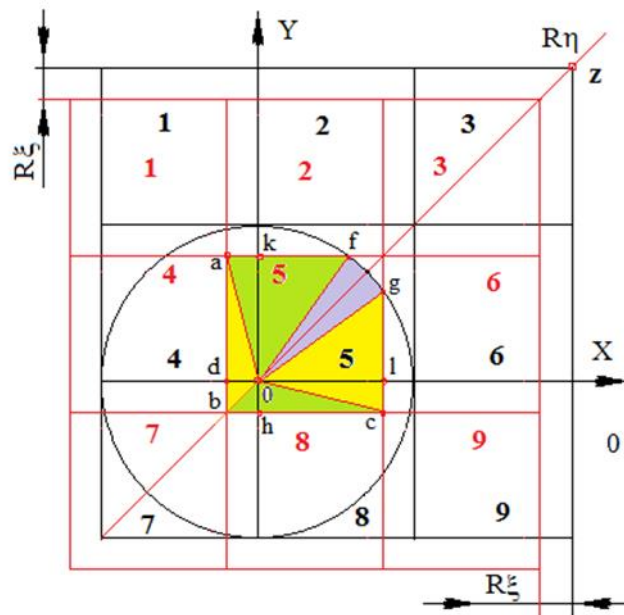


Рис. 4 – Принцип вычисления сигнала V_5 с пиксела 5 при $\xi = 0,2$.

Выражение для V_5 , при $0 \leq \xi \leq 0,2929$, имеет вид [19,20]

$$V_5 = 1 + \frac{1}{2\pi} \left[(1-p) \{ \arccos(1-\xi) - \arcsin(1-\xi) \} - 2(J_{51b} - J_{53b}) \right]$$

при $0 \leq \xi \leq 0,2929$, где

$$J_{51b} = \int_{\theta_9}^{\theta_{11}} \left[\exp \left\{ -\frac{k^2 \xi^2}{\cos^2 \theta} \right\} \right] d\theta,$$

$$J_{53b} = \int_{\theta_1}^{\theta_9} \left[\exp \left\{ -\frac{k^2 (1-\xi)^2}{\sin^2 \theta} \right\} \right] d\theta.$$

2.5 Определение V_5 для гауссоиды вращения при $0,2929 \leq \xi \leq 0,7071$

На рис. 5 представлен принцип вычисления сигнала V_5 с пиксела 5 при изменении ξ в диапазоне $0,2929 \dots 0,7071$. Области вычисления в виде треугольников отмечены желтым ($a0b, m0c$) и зеленым ($a0m, b0c$) цветом.

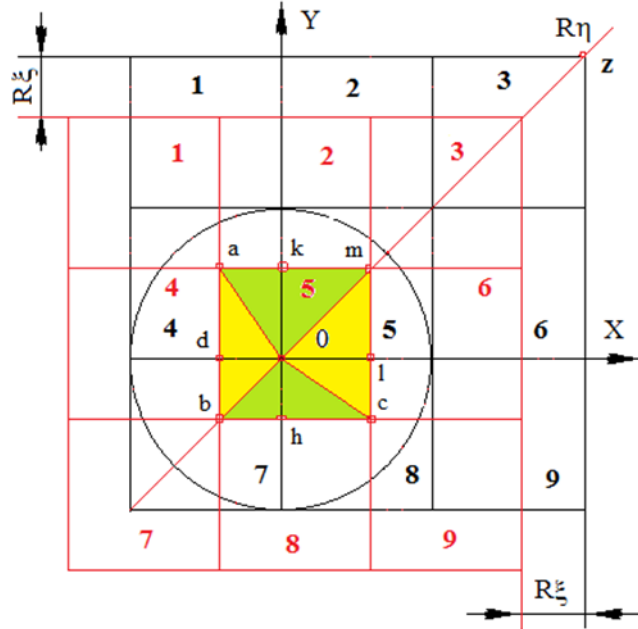


Рис. 5. Принцип вычисления сигнала V_5 с пиксела 5 при $\xi=0,4$.

Выражение для V_5 для $0,2929 \leq \xi \leq 0,7071$ имеет вид [19,20]

$$V_5 = 1 - \frac{1}{\pi} \left[2 \left(J_{5_{-1b}} + J_{5_{-2b}} \right) \right]$$

при $0,2929 \leq \xi \leq 0,7071$, где

$$J_{5_{-1b}} = \int_{\theta_5}^{\theta_6} \left[\exp \left\{ -\frac{k^2 (1-\xi)^2}{\sin^2 \theta} \right\} \right] d\theta,$$

$$J_{5_{-2b}} = \int_{\theta_9}^{\theta_{11}} \left[\exp \left\{ -\frac{k^2 \xi^2}{\cos^2 \theta} \right\} \right] d\theta.$$

2.6 Определение V_5 для гауссоиды вращения при $0,7071 \leq \xi \leq 1$

На рис. 6 представлен принцип вычисления сигнала V_5 с пиксела 5 при изменении ξ в диапазоне $0,7071 \dots 1$. Области вычисления в виде треугольников отмечены желтым (a0b, g0c), зеленым (a0f, b0c) и сиреневым (сектор f0g) цветом.

Выражение для V_5 при $0,7071 \leq \xi \leq 1$ имеет вид [19,20]

$$V_5 = 1 + \frac{1}{2\pi} \left[(1-p) \{ \arccos(\xi) - \arcsin(\xi) \} - 2(J_{56b} + J_{58b}) \right]$$

при $0,7071 \leq \xi \leq 1$, где

$$J_{56b} = \int_{\theta_5}^{\theta_6} \left[\exp \left\{ -\frac{k^2(1-\xi)^2}{\sin^2 \theta} \right\} \right] d\theta,$$

$$J_{58b} = \int_{\theta_{15}}^{\theta_{16}} \left[\exp \left\{ -\frac{k^2 \xi^2}{\sin^2 \theta} \right\} \right] d\theta$$

$$\theta_{15} = \pi + \arcsin(1-\xi), \quad \theta_{16} = 3\pi / 2 + \arctg \{ (1-\xi) / \xi \}.$$

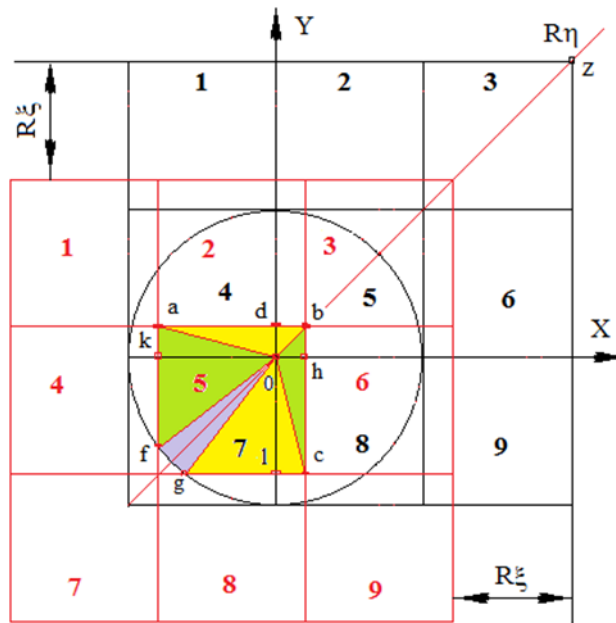


Рис. 6. Принцип вычисления сигнала V_5 с пиксела 5 при $\xi = 0,8$.

Используя математические выражения сигнала V_5 в зависимости от η , построен график, представленный на рис. 7.

3. Графики зависимостей сигналов с пикселей от η при угле смещения ФРТ 45°

На рис. 7 представлена зависимость сигналов с пикселей $V_2 \dots V_8$ от η при $0 \leq \eta \leq 1,4142$. Здесь угол смещения ФРТ равен 45° .

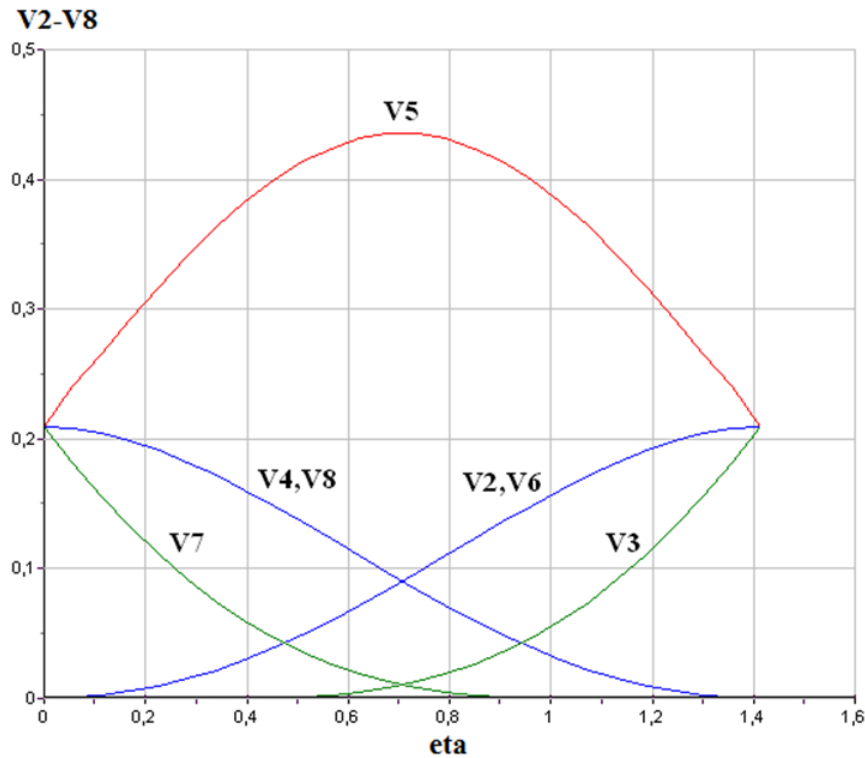


Рис. 7. Зависимость сигналов с пикселей $V_2 \dots V_8$ от η при $0 \leq \eta \leq 1,4142$.

Сигнал V_5 с пикселя 5 изменяется в 2,076 раза в диапазоне $0 \leq \eta \leq 1,4142$. Максимальное значение сигнала V_5 равно 0,435, а минимальное – 0,2095. Сигналы V_4 , V_8 и V_2 , V_6 равны друг другу, при $\eta = 0,707$, и их максимальное значение равно 0,2095. Сигналы V_7 , V_3 равны друг другу, при $\eta = 0,707$, и их максимальное значение равно 0,2095.

4. Вычисление сигналов при смещении ФРТ под углом 0°

4.1 Определение V_{4x} для гауссоиды вращения при смещении ФРТ по оси X для $0 \leq \xi \leq 1$

Вычисление сигналов при смещении ФРТ по оси X определяется выражением (6).

Выражение для сигнала V_{4x} имеет вид

$$V_{4x} = \frac{1}{2\pi} \left[J_{4x} - (1-p) \arccos(\xi) \right]$$

при $0 \leq \xi \leq 1$, $\eta = \xi$,

$$J_{4x} = \int_{\theta_2}^{\theta_{18}} \left[\exp \left\{ -\frac{k^2 \xi^2}{\cos^2 \theta} \right\} \right] d\theta,$$

$$\theta_{18} = \pi.$$

Выражение для сигнала V_{7x} равно V_{4x} , т.е. $V_{7x} = V_{4x}$, так как площадь, формирующая сигнал V_{7x} , симметрична площади, формирующая сигнал V_{4x} , относительно оси смещения X .

Используя математические выражения сигнала V_{4x} (V_{7x}) в зависимости от η , построен график, представленный на рис. 8.

4.2 Определение V_{5x} для гауссоиды вращения при смещении ФРТ по оси X для $0 \leq \xi \leq 1$

Вычисление сигналов при смещении ФРТ по оси X определяется выражением (6).

Выражение для сигнала V_{5x} имеет вид

$$V_{5x} = \frac{1}{2\pi} \left[p \{ \arcsin(\xi) + \arcsin(1-\xi) \} + \arccos(\xi) + \arccos(1-\xi) - \{ J_{52x} + J_{53x} \} \right],$$

при $0 \leq \xi \leq 1$, $\eta = \xi$,

$$J_{52x} = \int_{\theta_2}^{\theta_{18}} \left[\exp \left\{ -\frac{k^2 \xi^2}{\cos^2 \theta} \right\} \right] d\theta,$$

$$J_{53x} = \int_{\theta_{12}}^{\theta_4} \left[\exp \left\{ -\frac{k^2 (1-\xi)^2}{\cos^2 \theta} \right\} \right] d\theta,$$

$$\theta_{12} = 0.$$

Выражение для сигнала V_{8x} равно V_{5x} , т.е. $V_{8x} = V_{5x}$, так как площадь, формирующая сигнал V_{8x} , симметрична площади, формирующая сигнал V_{5x} , относительно оси смещения X .

Используя математические выражения сигнала V_{5x} (V_{8x}) в зависимости от η , построен график, представленный на рис. 8.

4.3 Определение V_{6x} для гауссоиды вращения при смещении ФРТ по оси X для $0 \leq \xi \leq 1$

Выражение для сигнала V_{6x} равно V_{9x} , т.е. $V_{6x} = V_{9x}$, так как площадь, формирующая сигнал V_{6x} , симметрична площади, формирующая сигнал V_{9x} , относительно оси смещения X .

Получение математического выражения сигнала V_{6x} (V_{9x}) здесь не приводится, но его принцип вычисления аналогичен вычислению V_{4x} (формула 6).

На рис. 8 представлена зависимость сигнала V_{6x} (V_{9x}) от η . Из которой видно, что график V_{6x} (V_{9x}) является зеркальным отражением графика V_{4x} (V_{7x}) относительно вертикали при $\eta = 0,5$.

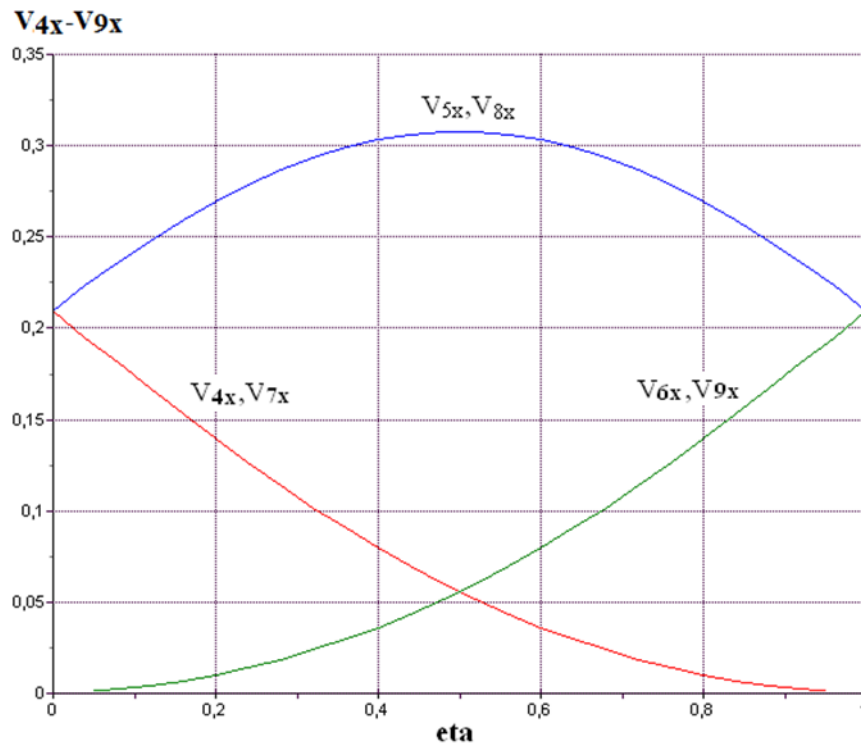


Рис. 8. Зависимость сигналов $V_{4x} \dots V_{9x}$ с пикселей 4...9 от $\eta = \xi$ при горизонтальном смещении ФРТ ($0 \leq \eta \leq 1$).

5. Графики зависимостей сигналов с пикселей от η при угле смещения ФРТ $0^\circ(90^\circ)$

На рис. 8 представлена зависимость сигналов с пикселей $V_4 \dots V_9$ от η при $0 \leq \eta \leq 1$. Здесь угол смещения ФРТ равен 0° . Индекс X обозначает горизонтальное смещение.

Аналогично графикам, представленных на рис. 8, можно получить графики при вертикальном смещении ($\alpha = 90^\circ$) ФРТ для пикселей 1, 2, 4, 5, 7, 8. На графике рис. 8: V_{4x}, V_{7x} заменяем на V_{8x}, V_{7x} ; V_{6x}, V_{9x} заменяем на V_{1x}, V_{2x} и V_{5x}, V_{8x} заменяем на V_{5x}, V_{4x} .

6. Определение суммарного сигнала для гауссоиды вращения при смещении ФРТ под углом 45° для $0 \leq \eta \leq 1,4142$

Если просуммировать сигналы с пикселей 4...9 при любом значении ξ , то сумма сигналов равна $p = 0,838$.

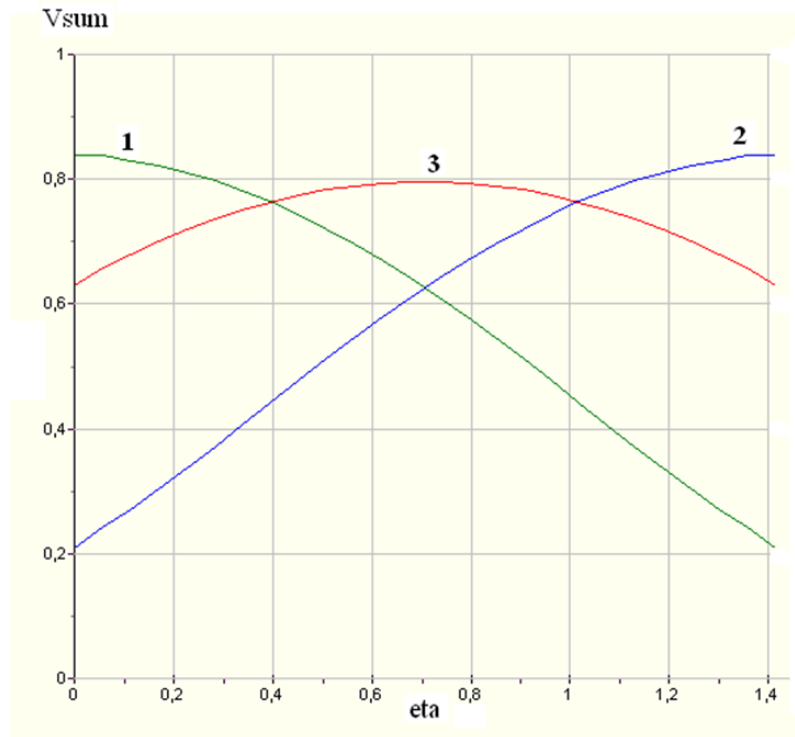


Рис. 9. Зависимость суммарного сигнала от относительного смещения η , где: 1 – бинирование, прием четырьмя пикселями (4,5,7,8) – (V_{gb1}); 2 – бинирование, прием четырьмя пикселями (2,3,5,6) – (U_{gb2}); 3 – прием пятью пикселями (2,4,5,6,8) в виде креста – (V_{gk}).

Используя полученные математические выражения для сигналов, считанных с пикселей, найдены суммарные сигналы в виде (рис. 9): 1, 2 – бинирование пикселей, 3 – крест из пикселей.

При $\eta = 0,7071$ ($\xi = 0,5$) наилучший прием (в смысле наименьшего изменения сигнала при смещении) будет на пять пикселей (см. рис. 9), а именно, на 2, 4, 5, 6, 8 пиксел, т.е. образуется крест из пяти пикселей. Сигнал максимален при ($\xi = 0,5$), т.е. когда центр ФРТ совпадает с центром пиксела 5.

При бинировании пикселей (4, 5, 7, 8), максимальный сигнал будет при $\eta = 0$, а для пикселей (2, 3, 5, 6) – при $\eta = 1,414$ (рис. 9).

7. Сравнение аппроксимаций ФРТ гауссоидой и равномерным распределением облученности пиксела

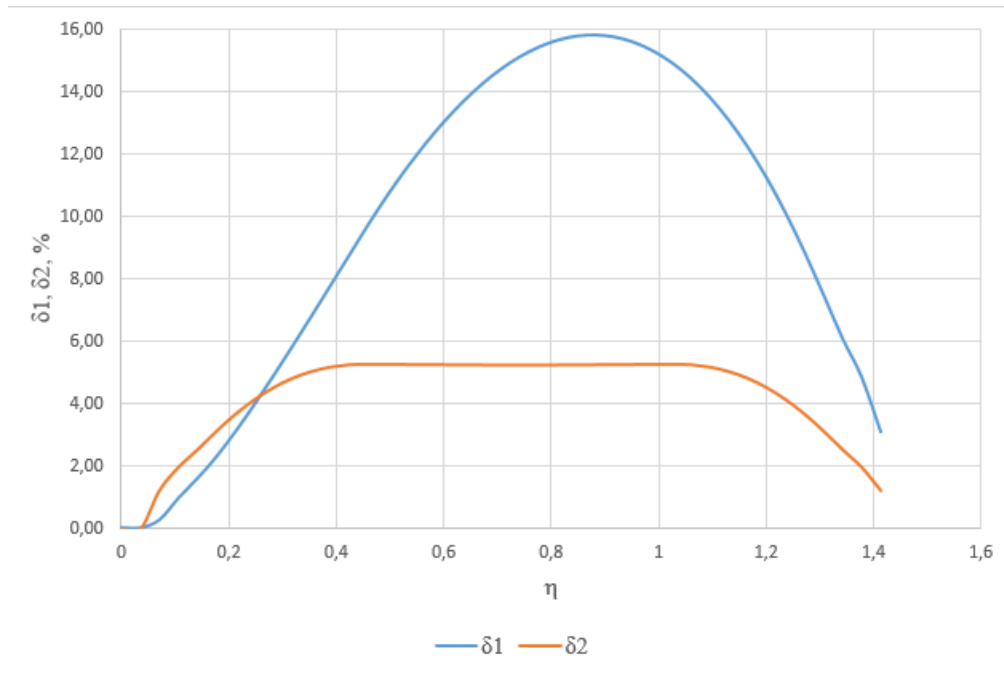


Рис. 10. δ_1 – относительная разность сигналов для ФРТ в виде гауссоиды и равномерной облученности пикселей (при бинировании), δ_2 – относительная разность сигналов для ФРТ в виде гауссоиды и равномерной облученности пикселей (для «креста»).

Для корректного сравнения графиков сигналов, представленных в [18] и данной работе (рис. 9), нужно значения сигналов в [18] умножить на коэффициент $p = 0.838$. Коэффициент p выравнивает исходные мощности сигналов (т.е. при отсутствии смещения) для гауссоиды и равномерного распределения облученности пикселей (в виде цилиндра). Затем определяется относительная разность сигналов (δ_1) для ФРТ в виде гауссоиды и равномерной облученности пикселей в зависимости от смещения (при бинировании) (рис. 10).

Выражение для определения δ_1 имеет вид

$$\delta_1 = (1 - U_{cb1} / V_{gb1}) 100, \%,$$

где V_{gb} , U_{cb1} – сигналы для ФРТ в виде гауссоиды и равномерной облученности пикселей (согласно рис. 6 в [18]), соответственно, при бинировании,

Аналогично определена относительная разность сигналов δ_2 для гауссоиды и равномерной облученности пиксела в зависимости от смещения ФРТ (для «креста») (рис. 10).

В результате расчетов получено, что при использовании режима бинирования максимальная относительная разность между гауссоидой и равномерной облученностью достигает 15,83 % при относительном смещении ФРТ равной 0,88, а при использовании режима «крест» максимальная относительная разность достигает 5.26 %.

Заключение

1) Разработан алгоритм расчета сигнала для гауссовой аппроксимации облученности четырех пикселей матрицы в зависимости от смещения центра ФРТ под углом 45° или 0° (90°) и построены графики зависимости уровня сигнала с каждого пиксела от относительного смещения η .

2) При приеме на пиксели 4,5,7,8 (режим бинирования), сигнал изменяется в четыре раза, т.е. от 0,838 до 0,2095 при смещении η от 0 до 1,4142. Аналогичный результат будет для пикселей 2,3,5,6 (режим бинирования), только сигнал изменяется от 0,2095 до 0,838.

3) При приеме на пять пикселей (2,4,5,6,8) в виде креста, сигнал изменяется в 1,266 раза, т.е. от 0,6285 до 0,7956 в диапазоне η от 0 до 1,4142.

4) В режиме бинирования максимальная относительная разность между равномерной и гауссовой аппроксимацией облученности пиксела достигает 15,83 % при относительном смещении ФРТ равной 0,88, а при использовании режима «крест» максимальная относительная разность достигает 5.26 %.

Литература

1. Федосеев В., Колосов М. Оптико-электронные приборы ориентации и навигации космических аппаратов. Москва. Логос. 2007. 247 с.
2. Бурдинов К.А., Шашкина К.М., Эхсан Шагхаей. Исследование системы автоматического управления стабилизации изображения бортовых оптико-электронных приборов наведения и слежения // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). 2022. Т.22. №2. С.150-160. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-2-150-160>
3. Барский А.Г. Оптико-электронные следящие системы: учеб. пособие. – Москва, Университетская книга. Логос. 2009. 200 с.
4. Астапов Ю.М., Васильев Д.В. Теория оптико-электронных следящих систем. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988. 328 с.
5. Знаменский И.В. Зависимость величины сигнала от смещения кружка рассеяния объектива в диапазоне углов 0° - 90° относительно центра пиксела фоточувствительной матрицы // Журнал радиоэлектроники. 2023. №10. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.10.4>
6. Знаменский И.В. Зависимость величины сигнала от смещения функции рассеяния точки относительно центра пиксела фоточувствительной матрицы // Оптический журнал. 2023. Т.90. №12. С.96-110. <https://doi.org/10.17586/1023-5086-2023-90-12-96-110>
7. Sanson F., Frueh C. Quantifying uncertainties in signal position in non-resolved object images: Application to space object observation // Advances in Space Research. 2019. V.63. №.8. P.2436-2454. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2018.12.040>
8. Фираго В.А. Определение оптимального радиуса гауссовой функции рассеяния объектива при обнаружении точечных объектов системами с дискретным представлением изображения // Вестник Белорусского государственного университета. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2006. №1. С.28-33.

9. Меденников П.А. Алгоритм обнаружения и определения координат точечного объекта // Оптический журнал. 2019. Т.86. №.8. С.65-69.
<http://doi.org/10.17586/1023-5086-2019-86-08-65-69>
10. Ma X., Rao C., Zheng H. Error analysis of CCD-based point source centroid computation under the background light // Optics express. 2009. V.17. №.10. P.8525-8541. <https://doi.org/10.1364/OE.17.008525>
11. Акилин Г.А. и др. Имитационная компьютерная модель координатора, работающего в составе биометрической системы распознавания // Интерэкспо Гео-Сибирь. XVI Международный научный конгресс. Новосибирск. 2020. Т.6. №.1. С.11-21. <http://doi.org/10.33764/2618-981X-2020-6-1-11-21>
12. Егошкин Н.А. Коррекция смаза и расфокусировки спутниковых изображений с учетом геометрических искажений // Цифровая обработка сигналов. 2016. №.3. С.37-41.
13. Баранов П.С., Манцветов А.А. Оптимизация отношения радиуса кружка рассеяния объектива к размеру пиксела для повышения точности оценки координат изображений малоразмерных объектов // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. 2016. №2. С.49-53.
14. Аванесов Г.А., Кондратьева Т.В., Никитин А.В. Исследование смещения энергетического центра изображений звезд относительно геометрического центра на ПЗС-матрице и коррекция методической ошибки. 1-ая Всероссийская. научно-техническая конференция // Механика, управление и информатика. Сборник трудов. Таруса. 2009. №1. С.421-446.
15. Осадчий И.С. Метод субпиксельного измерения координат изображений звезд для приборов астроориентации космического базирования // Журнал радиоэлектроники. 2015. №.5.
16. Старосотников Н.О., Федорцев Р.В. Моделирование методической погрешности определения центра тяжести изображения тест-объекта в оптических измерительных приборах с матричными приемниками // 7-ая Международная научно-техническая конференция «Приборостроение-2014». Минск. БНТУ, 2014. С.385-386.

17. Якушенков Ю.Г. Теория и расчет оптико-электронных приборов. Учебник. – Москва. Логос. 1999. 480 с.
18. Знаменский И.В., Зотьев Е.О., Олейников И.И., Тунгушпаев А.Т. Зависимость величины сигнала от смещения функции рассеяния точки, вписанной в четыре пиксела матрицы // Журнал радиоэлектроники. 2024. №9. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.9.3>
19. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – Москва. Наука. 1986. 544 с.
20. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: дополнительные главы. – Москва. «Наука», Главная ред. физико-математической литературы. 1986. 799 с.

Для цитирования:

Знаменский И.В., Зотьев Е.О., Тунгушпаев А.Т. Определение сигнала при смещении функции рассеяния точки в виде гауссоиды вращения, вписанной в четыре пиксела матричного фотоприемника и сравнение с сигналом для цилиндрической функции рассеяния точки // Журнал радиоэлектроники. – 2025. – № 9. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.9.12>