УДК 519.216

МЕТОД МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ЧАСТОТЫ В РАДИОВОЛНОВЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

В. К. Игнатьев, А. В. Никитин

Волгоградский государственный университет, кафедра радиофизики

Получена 17 октября 2011 г., после доработки - 21 ноября 2011 г.

Аннотация. Показано, что если для волны существует квазигармоническое представление с ограниченной медленно меняющейся частотой, то оно единственно. Необходимым и достаточным условием существования волны с медленно меняющимися амплитудой и частотой является медленное изменение параметров среды, в которой распространяется волна, и то, что источником волны является осциллятор с медленно меняющимися параметрами.

Ключевые слова: волна, квазигармоническое представление, медленно меняющаяся частота, единственность.

Abstract. It is shown that in case quasiharmonious representation for a wave with the limited slowly varying frequency exists, then it is unique. Necessary and sufficient condition for the wave’s with slowly varying amplitude and frequency existence is a slow varying parameters of the environment through the wave propagates, and that the wave’s source is the oscillator with slowly varying parameters.

Key words: wave, quasiharmonious representation, slowly varying frequency, uniqueness.

Введение

Наиболее точно измеряемой физической величиной является частота, современные атомные часы имеют относительную нестабильность порядка 10^{-15} и ожидается создание квантовых стандартов частоты с нестабильностью на уровне 10^{-17} [1]. В радиоволновых измерениях частотный метод заключается в извлечении информации об измеряемой величине из мгновенной частоты квазигармонической волны вида

$$x(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t)\cos[\theta(\mathbf{r}, t)], \tag{1}$$

причем частная производная по времени полной фазы $\theta(\mathbf{r}, t)$ называется мгновенной частотой $\omega(\mathbf{r}, t) = \partial\theta(\mathbf{r}, t)/\partial t$, а ее градиент – волновым вектором $\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \partial\theta(\mathbf{r}, t)/\partial\mathbf{r}$ [2]. Однако спектр квазигармонической волны может меняться при ее распространении, например, из-за движения среды, в которой волна распространяется [3]. В результате мгновенная частота, регистрируемая приемником, будет отличаться от мгновенной частоты излучателя. Поэтому при извлечении информации из распространяющегося электромагнитного поля с точностью, которая обеспечивается современными квантовыми стандартами частоты [4] и требуется для систем радиоастрономии, радиоэлектронного противодействия, радиоволновых датчиков и контролируемых с помощью электромагнитных волн параметров технологических процессов [5, 6], необходимо определять динамику не только мгновенной частоты, но и волнового вектора квазиграмонической волны, например, с помощью радиоинтерферометров [7].

Волны с медленно меняющейся мгновенной частотой

Рассмотрим для примера задачу акустической локации. Пусть в системе координат, связанной с приемником по траектории $\mathbf{r}_0(t)$ движется точечный источник гармонического сигнала с частотой ω_0, а однородная несжимаемая среда перемещается со скоростью $\mathbf{V}(t) = d\mathbf{r}_1(t)/dt$, где $\mathbf{r}_1(t)$ – координата элемента среды в системе отсчета, связанной с приемником. В системе отсчета, связанной со средой, волновое уравнение будет иметь вид [8]

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\exp(i\omega_0 t)\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0'(t)), \tag{2}$$

где $\varphi(\mathbf{r}', t)$ – потенциал колебательной скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}', t) = -\nabla\varphi$, c – скорость звука в неподвижной среде, $\mathbf{r}_0'(t) = \mathbf{r}_0(t) - \mathbf{r}_1(t)$ – координата источника в системе отсчета, связанной со средой.

Решение волнового уравнения (2) имеет вид [8]

$$\varphi(\mathbf{r}',t)=\frac{2\exp[i\omega_0(t-R'/c)]}{|df/dR'|},\tag{3}$$

где R' – положительный корень уравнения

$$f(R') = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0(t - R'/c)|^2 - R'^2 = 0.\tag{4}$$

Возвращаясь в систему координат, связанную с приемником, положим в уравнениях (3) и (4) $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)$:

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{2\exp[i\omega_0(t-R/c)]}{|df/dR|},\tag{5}$$

$$f(R) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_0(t - R/c) + \mathbf{r}_1(t - R/c)|^2 - R^2 = 0.\tag{6}$$

Мгновенная частота и волновой вектор, регистрируемые приемником, будут при этом иметь вид

$$\omega(\mathbf{r},t)=\omega_0\left(1-\frac{\partial R/\partial t}{c}\right),\quad \mathbf{k}=\frac{\omega_0}{c}\frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}}.\tag{7}$$

Дифференцируя уравнение (6) по времени и по координатам и полагая, что скорость среды V меняется медленно и много меньше скорости звука c, получим, что в дальней зоне можно положить $R \approx r_0$, тогда в начале координат при $\mathbf{r} = 0$ получаем:

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{c(\mathbf{v}+\mathbf{a}r_0/c)\mathbf{n}}{c+(\mathbf{v}-\mathbf{V}-\mathbf{a}r_0/c)\mathbf{n}},\quad \frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}}=-\frac{c\mathbf{n}}{c+(\mathbf{v}-\mathbf{V}-\mathbf{a}r_0/c)\mathbf{n}}.\tag{8}$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{r}_0/r_0$, $\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt$, значение скорости источника $\mathbf{v}$ берется в момент времени $t - r_0/c$, а скорости среды $\mathbf{V}$ и ее ускорения $\mathbf{a}$ – в момент времени t.

Из формул (7) и (8), в свою очередь, следует, что приемник, расположенный в начале координат, зафиксирует следующие мгновенную частоту и волновой вектор:

$$\omega(t)=\omega_0\frac{1-V/c}{1-V/c-ar_0/c^2+v/c},\quad \mathbf{k}(t)=-\frac{\mathbf{n}\omega_0/c}{1-V/c-ar_0/c^2+v/c}.\tag{9}$$

Здесь $v = \mathbf{vn}$, $V = \mathbf{Vn}$, $a = \mathbf{an}$ – радиальные компоненты скорости источника $\mathbf{v}$, скорости среды $\mathbf{V}$ и ее ускорения $\mathbf{a}$.

Из формул (9) следует, что независимо от движения источника и среды волновой вектор $\mathbf{k}(t) = -k(t)\mathbf{n}$ в любой момент времени направлен от источника к приемнику, что соответствует приближению геометрической акустики [8]. Для однородной среды с медленно меняющимися параметрами, в данном случае – скоростью, условия этого приближения выполняются. Кроме того, $\omega(t) = k(t)(c - V)$, то есть скорость звука в движущейся среде, измеренная неподвижным приемником, составляет $c - V$, что соответствует правилу сложения скоростей.

Для неподвижной среды из первой формулы (9) при $V = 0$ получается классическая формула эффекта Доплера $\tilde{\omega}(t) = \omega_0 / (1 + v/c)$. Если же источник покоится относительно приемника, а среда движется неравномерно, приемник зафиксирует частоту

$$\omega(t) = \omega_0 \frac{1}{1 - ar_0 / \left(c^2 - Vc\right)},$$

а вычисление скорости источника по классической формуле Доплера покажет величину $v = -ar_0/c$. Эта величина – погрешность измерения скорости частотным методом – растет с увеличением расстояния до источника и может оказаться существенной в «порывах» ветра. Даже равномерное движение среды между движущимся источником и приемником вносит относительную погрешность в измерение скорости источника частотным методом, равную V/c.

Все эти погрешности можно исключить, если приемник фиксирует не только мгновенную частоту волны, но и мгновенное значение ее волнового вектора. Тогда из формул (9) получаем

$$v(t) = \frac{\omega_0 - \omega(t)}{k(t)} - \frac{r_0}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega(t)}{k(t)}\right), \quad V(t) = c - \frac{\omega(t)}{k(t)}. \tag{10}$$

Первое уравнение (10) можно переписать в виде линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dr_0}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega}{ck}\right) r_0 + \frac{\omega - \omega_0}{k} = 0,$$

решение которого при известном начальном положении источника имеет вид:

$$r_0(t')=r_0(0)\exp\left[\frac{\omega(t)-\omega(0)}{ck(t)-ck(0)}\right]+\exp\left[\frac{\omega(t)}{ck(t)}\right]\int_0^t\exp\left[-\frac{\omega(\tau)}{ck(\tau)}\right]\frac{\omega_0-\omega(\tau)}{k}d\tau, \quad (11)$$

где $t' = t - r_0/c$. Соответственно,

$$\begin{gathered}v(t')=\frac{\omega_0-\omega(t)}{k(t)}+\\+\frac{\omega(t)}{ck(t)}\exp\left[\frac{\omega(t)}{ck(t)}\right]\left\{r_0(0)\exp\left[-\frac{\omega(0)}{ck(0)}\right]+\int_0^t\exp\left[-\frac{\omega(\tau)}{ck(\tau)}\right]\frac{\omega_0-\omega(\tau)}{k}d\tau\right\}.\end{gathered} \quad (12)$$

Второе слагаемое в формуле (12) представляет вносимую движением среды поправку к измеренной частотным способом скорости источника, вычисляемую по измеренным значениям волнового вектора. Если скорость источника меняется медленно, в формуле (11) можно положить $r_0(t') = r_0(t)(1 - v(t)/c)$.

Заметим, что полученные результаты для звукового поля движущегося источника во многих отношениях сходны с потенциалами Ленарда – Вихерта электромагнитного поля движущегося в вакууме точечного заряда e [9]:

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')|(1-\mathbf{nv}(t')/c)}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0 e\mathbf{v}_e(t')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')|(1-\mathbf{nv}_e(t')/c)},$$

где момент времени t', в который берется координата заряда $\mathbf{r}_e$ и его скорость $\mathbf{v}_e$, связаны с моментом измерения t соотношением $ct' = ct - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|$. Если заряд совершает гармонические колебания с частотой ω_0 около положения равновесия $\mathbf{r}_0$, то есть $\mathbf{r}_e(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1\exp(i\omega_0 t)$, $|\mathbf{r}_1| << |\mathbf{r}_0|$, в дальней зоне переменная часть электрического поля будет равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=\frac{\mu_0\omega_0^2\mathbf{d}\exp(i\omega_0 t')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|(1-\mathbf{nv}(t')/c)}, \quad (13)$$

где $\mathbf{d} = e\mathbf{r}_1$, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}_0/dt$. Нетрудно видеть, что уравнение (13) для проекций электрического поля аналогично уравнению (5) для акустического поля с учетом соотношений (6) и (8).

Влияние движения среды на распространение электромагнитной волны вида (13) можно качественно учесть с помощью известного результата Физо. В движущемся со скоростью u диэлектрике с коэффициентом преломления n скорость света составляет $c' = c/n + u(1 - 1/n^2)$ [10]. Поэтому в формулу (9) вместо скорости V следует подставить $u(n - 1/n)$. Таким образом, относительная погрешность, вносимая движением среды в частотный метод радиоволновых измерений, составит $u(n - 1/n)/c$. Для тропосферы $n - 1 \approx 3{\cdot}10^{-4}$ [3], и при скорости ветра 30 м/с эта погрешность составит $6{\cdot}10^{-11}$ и может проявиться лишь в предельных измерениях. Однако для ионосферной плазмы со сложным законом дисперсии соответствующая погрешность может оказаться существенно больше и, например, увеличить погрешность в опыте по измерению скорости нейтрино [11]. Устранить эту погрешность можно измерением волнового вектора в точках синхронизации часов по сигналам GPS [12].

Радиоэлектронные системы локации и связи в большинстве случаев находятся на поверхности Земли и движутся с ней в пространстве, поэтому развитие методов траекторных измерений космических объектов и космической навигации, анализ работы высокоточных доплеровских геодезических систем и ряд других задач требует строгого учета преобразования мгновенной частоты радиосигналов за счет вращения и поступательного движения как радиопередающего и радиоприемного звеньев, так и объекта локации, а также гравитационного поля в пространстве между ними. Так, строгое решение задачи о рассеянии монохроматической (в неподвижной системе отсчета) плоской электромагнитной волны вращающимся телом показывает, что спектр поля рассеяния зависит от отношения периода вращения к времени измерения и электродинамических свойств тела, а отраженная волна является квазигармонической [13] вида (1).

В рамках общей теории относительности неинерциальность системы отсчета может быть учтена введением дополнительных локальных гравитационных полей, гравитация же в отношении своего воздействия на электромагнитное поле играет роль среды с переменными электрической и магнитной проницаемостями [14]. Таким образом, в неинерциальных системах отсчета и с учетом гравитации даже вакуум следует рассматривать как неоднородную среду, формирующую сложную зависимость между волновым вектором и частотой распространяющейся в нем волны (1). В современный радионавигационных системах обычно учитывается влияние гравитационного поля только на мгновенную частоту, но не на волновой вектор электромагнитной волны [4, 12].

Для однозначного описания волны (1) с помощью двух функций – амплитуды (огибающей) $A(\mathbf{r}, t)$ и полной фазы $\theta(\mathbf{r}, t)$ необходимо то или иное дополнительное условие. Если в любой точке пространства полная фаза определяется как аргумент аналитического сигнала

$$z(\mathbf{r},t) = A(\mathbf{r}, t)\exp[i\theta(\mathbf{r}, t)] = x(\mathbf{r}, t) + iy(\mathbf{r}, t),$$

построенного на основе исследуемой волны $x(\mathbf{r}, t)$ с помощью преобразования Гильберта [15]:

$$y(\mathbf{r},t) = \hat{H}\left[x(\mathbf{r},t)\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\mathbf{r},\tau)}{t-\tau}d\tau = A(\mathbf{r},t)\sin\left[\theta(\mathbf{r},t)\right], \qquad (14)$$

то огибающая $A(\mathbf{r}, t)$ и мгновенная частота $\omega(\mathbf{r}, t)$ волны (1) равны

$$\begin{gathered} A(\mathbf{r},t) = \sqrt{x^2(\mathbf{r},t) + y^2(\mathbf{r},t)}, \\ \omega(\mathbf{r},t) = \frac{\partial\theta(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \frac{x(\mathbf{r},t)\partial y(\mathbf{r},t)/\partial t - y(\mathbf{r},t)\partial x(\mathbf{r},t)/\partial t}{x^2(\mathbf{r},t) + y^2(\mathbf{r},t)}. \end{gathered} \qquad (15)$$

Можно показать [16, 17], что преобразование Гильберта (14) является единственным непрерывным линейным преобразованием, связывающим функции $x(\mathbf{r}, t)$ и $y(\mathbf{r}, t)$. Применяются и другие определения полной фазы [18], которые, как и определение Габора [15], являются формально-математическими и могут приводить к физическим противоречиям [19].

Отметим, что вопрос о единственности представления волны в форме (1) существенен, если огибающей и (или) мгновенной частоте сопоставляются измеряемые физические величины, например, огибающая определяет энергию волны, а мгновенная частота связана со скоростью объекта, как в задаче доплеровской локации.

Рассмотрим модельную задачу. Пусть излучателем является электрический диполь, ориентированный вдоль оси y и движущийся равномерно и прямолинейно вдоль оси x со скоростью $v \ll c$. Если дипольный момент совершает гармонические колебания с постоянной частотой ω_0 и постоянной амплитудой p_0, то напряженность магнитного поля в начале координат в приближении дальней зоны и без учета релятивистских эффектов в будет равна [9]

$$H_z(0,t) = \frac{\omega_0^2 p_0}{c^2 vt} \sin(\omega_0 t). \tag{16}$$

Здесь $x(t)$ – текущая координата диполя и принято, что в момент времени $t = 0$ излучатель проходит точку $x = 0$ с нулевой начальной фазой колебания. Если диполь движется с постоянной скоростью, то $x(t) = vt$, при $v << c$ можно пренебречь доплеровским сдвигом частоты и вычислить преобразование Гильберта (14) для сигнала (16) аналитически:

$$y(t) = \frac{p_0 \omega_0^2}{c^2 vt} [\cos(\omega_0 t) - 1],$$

Для огибающей и полной фазы в этом случае по формулам (15) получим

$$A(t) = \frac{2 p_0 \omega_0^2}{c^2 vt} \sin(\frac{\omega_0 t}{2}), \quad \theta(t) = -\frac{\omega_0 t}{2}. \tag{17}$$

Если полагать, что мгновенная частота сигнала, регистрируемого приемником, определяется источником колебаний, а огибающая – расстоянием до приемника, то представление сигнала в форме (17) приводит к физически неправильному результату – источник совершает сложное колебательное движение относительно начала координат, а частота принятого сигнала вдвое меньше, чем частота излученного. Таким образом, в представлении (16) огибающая и мгновенная частота связаны с физическими параметрами системы, а в представлении (17) – нет.

В этом случае нужны физические условия однозначного определения огибающей и полной фазы. Как показано в Приложении, при естественных предположениях, что в любой точке пространства огибающая $A(\mathbf{r}, t)$ и мгновенная частота $\omega(\mathbf{r}, t)$ – положительные и непрерывные функции, а $\omega(\mathbf{r}, t)$ ограничена как сверху, так и снизу

$$0 < \omega_m \le \omega(\mathbf{r}, t) \le \omega_M , \tag{18}$$

одним из таких условий может быть ограниченность носителя спектра мгновенной частоты $\omega(\mathbf{r},\ t)$. Заметим, что представление (6) этим условиям удовлетворяет, а основанное на преобразовании Гильберта (14) представление (17) со знакопеременной огибающей – нет.

Пусть в любой точке пространства **r** мгновенная частота может быть представлена интегралом Фурье:

$$\omega(\mathbf{r},t)=\int_{-\omega_B}^{\omega_B}\tilde{\omega}(\mathbf{r},p)\exp(ipt)dp\,.$$

Тогда для производных мгновенной частоты справедлива оценка

$$\left|\omega^{(n)}(\mathbf{r},t)\right|\le P\omega_B^n,\quad P=\int_{-\omega_B}^{\omega_B}\left|\tilde{\omega}(\mathbf{r},p)\right|dp\,. \qquad (19)$$

Квазигармоническую волну (1), для которой выполняются условия (18) и (19), естественно назвать волной медленно меняющейся мгновенной частотой (ММЧ).

Существование квазигармонических волн ММЧ

На практике существование квазигармонического представления (1) с медленно меняющейся мгновенной частотой можно обосновать, например, связью параметров волны с медленно меняющимися параметрами среды, в которой распространяется волна, или породившей ее физической системы. Покажем, что для среды с медленно меняющимися во времени параметрами нормальной является волна вида (1) с медленно меняющейся мгновенной частотой. Волновое уравнение для электромагнитной волны в однородной среде без дисперсии с переменными проводимостью $\sigma(t)$, диэлектрической $\varepsilon(t)$ и магнитной $\mu(t)$ проницаемостями имеет вид [9]

$$c^2\Delta\mathbf{E}=\left(4\pi\frac{d(\sigma\mu)}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\mu\frac{d\varepsilon}{dt}\right)\right)\mathbf{E}+\left(4\pi\sigma\mu+\varepsilon\frac{d\mu}{dt}+2\mu\frac{d\varepsilon}{dt}\right)\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+(\varepsilon\mu)\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}. \qquad (20)$$

Будем искать решение уравнения (20) в виде волны с линейной поляризацией, положив $\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t)=\mathbf{e}R(\mathbf{r})T(t)$. Подставляя это выражение в уравнение (20), с помощью стандартной процедуры разделения переменных получим

$$\Delta R(\mathbf{r}) + k^2 R(\mathbf{r}) = 0, \qquad (21)$$

$$\ddot{T}(t) + p(t)\dot{T}(t) + q(t)T(t) = 0, \qquad (22)$$

где k – волновое число и обозначено

$$p(t) = 4\pi\frac{\sigma}{\varepsilon} + \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} + \frac{2}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}, \quad p(t) = \frac{1}{\varepsilon\mu}\left(c^2k^2 + 4\pi\frac{d(\sigma\mu)}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\mu\frac{d\varepsilon}{dt}\right)\right) - \qquad (23)$$

медленно меняющиеся коэффициенты.

Решение уравнения (21) можно записать в виде

$$R(\mathbf{r}) = \exp(\pm i\mathbf{kr}), \qquad (24)$$

где введен волновой вектор **k** = k**m**, **m** – единичный вектор. Уравнение (22), описывающее осциллятор с переменными параметрами, подстановкой

$$T(t) = y(t)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t p(t')dt'\right] \qquad (25)$$

приводится к виду

$$\ddot{y}(t) + \Omega^2(t)y(t) = 0, \qquad (26)$$

где

$$\Omega^2(t) = q(t) - \frac{1}{2}\frac{dp(t)}{dt} - \frac{1}{4}p^2(t). \qquad (27)$$

Условие медленности изменения параметров осциллятора можно выразить соотношением $1/\Omega_0\tau = \mu$, $\mu << 1$, или записать следующим образом:

$$\dot{\Omega}(t) \sim \mu\Omega^2(t), \ \mu << 1. \qquad (28)$$

Если уравнение (22) описывает линейный осциллятор с малыми потерями, то с учетом физических допущений $p^2(t) \sim \mu q(t)$. При таких условиях с математической точки зрения уравнение (26) с медленно меняющимся коэффициентом эквивалентно уравнению с малым параметром μ при старшей производной. Такие уравнения решают с помощью асимптотических методов разложения по малому параметру [2, 20 – 22]. Такая процедура приводит к асимптотическому ряду, который расходится при увеличении количества его членов: при фиксированном μ, начиная с некоторого номера n, следующие слагаемые оказываются больше предыдущих [2, 23]. Поэтому ограничиваются конечным отрезком ряда, например, при использовании приближения ВКБ [21] двумя его членами. При заданных начальных условиях можно представить решение в тригонометрической форме:

$$y(t)=\frac{A_0}{\sqrt{\Omega(t)}}\cos\left[\int^t \Omega(t')dt'+\varphi_0\right]=\frac{A_0}{\sqrt{\Omega(t)}}\cos[\theta(t)],\quad \theta(t)=\int^t \Omega(t')dt'+\varphi_0 .$$

Здесь A_0 и φ_0 – константы, определяемые из начальных условий. Возвращаясь к функции $T(t)$, получим

$$T(t)=\frac{A_0}{\sqrt{\Omega(t)}}\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t p(t')dt'\right]\cos\left[\int_0^t \Omega(t')dt'+\varphi_0\right]=a(t)\cos[\theta(t)], \qquad (29)$$

где

$$a(t)=\frac{A_0}{\sqrt{\Omega(t)}}\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t p(t')dt'\right],\quad \theta(t)=\int_0^t \Omega(t')dt'+\varphi_0 . \qquad (30)$$

Видно, что введенная ранее как производная полной фазы $\theta(t)$ частота $\omega(t)$ [2] совпадает с $\Omega(t)$. Соотношения (23) и (27) определяют при этом закон дисперсии МММЧ волны. Записывая условие медленного изменения параметров среды и малых потерь в ней в виде

$$|d\varepsilon/dt|<<\omega(t)\varepsilon,\quad |d\mu/dt|<<\omega(t)\mu,\quad |d\sigma/dt|<<\omega(t)\sigma,\quad \sigma<<\omega(t)\varepsilon , \qquad (31)$$

получим $\omega(t) = ck/n(t)$, где $n(t)=\sqrt{\varepsilon(t)\mu(t)}$ – переменный коэффициент преломления. С учетом соотношений (24), (29) и (30) волновой процесс можно записать в форме (1), где

$$\theta(\mathbf{r},t)=k\left(c\int_0^t\frac{dt'}{n(t')}-\mathbf{mr}\right)+\varphi_0 . \qquad (32)$$

Источником волн МММЧ может быть осциллятор с медленно меняющимися параметрами. К примеру, в ЯМР известны уравнения Блоха для поперечных проекций магнитного момента [24]:

$$\dot{M}_x=\gamma M_y B-M_x/T_2,\quad \dot{M}_y=-\gamma M_x B-M_y/T_2,\qquad B_x=0,\ B_y=0,\ B_z=B(t),$$

из которых легко получается уравнение вида (22) для свободной прецессии поперечной намагниченности в медленно меняющемся продольном магнитном поле $B(t)$, где $T(t) = M_x$ или M_y, $p(t) = 2/T_2 - \dot{B}/B$, $q(t) = \gamma^2 B^2 - \dot{B}/(BT_2) + 1/T_2^2$.

В волновой зоне магнитно-дипольное излучение описывается векторным потенциалом [9] $\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = [\dot{\mathbf{M}}(t - r/c) \times \mathbf{r}]/cr^2$. В дальней зоне волну можно считать плоской, распространяющейся вдоль оси z. С учетом формулы (32) волновой процесс можно записать в форме (1):

$$A_x(z,t) = \frac{A_0(t - z/c)\sqrt{\omega(t - r/c)}}{cz} \cos\left[\int_0^{t - z/c} \omega(\tau)d\tau + \varphi(t)\right], \qquad (33)$$

где

$$A_0(t) = C\left(1 + \frac{1}{\omega^2(t)T_2^2} - \frac{\dot{B}(t)}{B(t)\omega^2(t)T_2}\right), \quad \omega(t) = \sqrt{\gamma^2 B^2(t) - \frac{3(\dot{B})^2}{4B^2}},$$

$$\varphi(t) = -arctg\left(\frac{2\omega(t)}{2/T_2 - \dot{B}/B}\right).$$

Из формулы (33) видно, что если магнитное поле медленно меняется во время свободной прецессии, то есть $|dB/dt| << \omega(t)B(t)$, то магнитно-дипольное излучение будет волной ММЧ. Если возможно по измеренному, например спиновым детектором [24], сигналу (33) динамику мгновенной частоты и амплитуды, можно проследить за динамикой изменения продольного магнитного поля $B(t)$ и времени поперечной релаксации $T_2(t)$, что важно в задачах спектроскопии, томографии, исследовании геомагнитного поля и т. д. Аналогичный результат можно получить для электрического дипольного перехода с помощью оптических уравнений Блоха [24], а так же для любого мультипольного излучения [9].

Зафиксируем в пространстве точку $\mathbf{r}_0$, например, координату приемника, в котором квазигармоническая волна (1) создаст колебание

$$y(t) = x(\mathbf{r}_0, t) = a(t)\cos[\varphi(t)], \qquad (34)$$

где обозначено $a(t) = A(\mathbf{r}_0, t)$, $\varphi(t) = \theta(\mathbf{r}_0, t)$. Рассмотрим колебание вида (34) медленно меняющимися амплитудой и мгновенной частотой (ММАМЧ), условие медленного изменения по аналогии с условием МММЧ (19) можно сформулировать в виде

$$\left|a^{(n)}(t)\right| \le \mu^n \omega^n(t) a(t), \quad \left|\omega^{(n)}(t)\right| \le \mu^n \omega^{n+1}(t), \quad 0 \le \mu << 1. \tag{35}$$

При выполнении условий ММАМЧ вида (35) любая производная ММАМЧ процесса тоже будет ММАМЧ процессом. Найдем первообразную колебания (34). Интегрируя по частям и полагая, что $a(t \to -\infty) \to 0$, получаем

$$\int_{-\infty}^{t} a(\tau) e^{i\varphi(\tau)} d\tau = -\frac{ia(t)}{\omega(t)} e^{i\varphi(t)} + i \int_{-\infty}^{t} \frac{d}{d\tau}\left[\frac{a(\tau)}{\omega(\tau)}\right] e^{i\varphi(\tau)} d\tau = \left[-\frac{ia(t)}{\omega(t)} + \frac{\dot{a}(t)\omega(t) - a(t)\dot{\omega}(t)}{\omega^3(t)} + \cdots\right] e^{i\varphi(t)}.$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий ММАЧ (35) все слагаемые в квадратный скобках являются медленно меняющимися функциями, удовлетворяющими условию (35), а каждое последующее слагаемое имеет порядок малости μ по отношению к предыдущему. Поэтому ряд в квадратных скобках быстро сходится к медленно меняющейся функции (амплитуде). Следовательно, первообразная ММАЧ процесса – тоже ММАЧ процесс. Поскольку напряженности полей в волновой зоне пропорциональны первой или второй производной дипольного (или мультипольного) момента [9], для того, чтобы квазигармоническая волна в дальней зоне была волной ММАЧ, необходимо и достаточно, чтобы дипольный момент излучателя был ММАЧ колебанием.

С другой стороны, подстановкой функции (34) в уравнение (22) можно показать, что любое колебание ММАМЧ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами вида

$$p(t) = -2\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}, \quad q(t) = \omega^2(t) - \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 2\frac{(\dot{a}(t))^2}{a^2(t)} + \frac{\dot{a}(t)\dot{\omega}(t)}{a(t)\omega(t)}. \tag{36}$$

Таким образом, между медленно меняющимися мгновенной частотой и амплитудой колебания (34) и медленно меняющимися коэффициентами уравнения (22) существует взаимно однозначная связь вида (30) и (36), и можно сформулировать необходимое и достаточное условие того, что квазигармоническая волна была волной ММАЧ – источником волны является осциллятор с медленно меняющимися параметрами, а параметры среды, в которой распространяется волна, медленно меняются во времени.

Аппаратная реализация цифровых параметрических алгоритмов оценивания огибающей и мгновенной частоты квазигармонического сигнала по короткой выборке и эксперименты с реальными электромеханическими системами [25 – 28] подтверждают высокие метрологические характеристики метода медленно меняющейся мгновенной частоты при исследовании нестационарных систем. Отличительной особенностью этого метода является малое количество операций при вычислении огибающей и мгновенной частоты, не зависящее от длительности скользящего окна, в рамках которого производится оценка [28]. Это позволяет реализовать измерительную систему на базе сигнальных процессоров и добиться высокой скорости оценивания огибающей и мгновенной частоты. Дальнейшим совершенствованием этого метода является разработка быстрых алгоритмов для оценивания волнового вектора.

Заключение

Основные мировые производители промышленного оборудования, такие как Siemens, Mitsubishi, Allen-Bradley, Emerson и другие в своих последних разработках и решениях широко используют беспроводные средства измерения и передачи данных. Если для передачи данных, в основном, используют наборы стандартов IEEE 802.11 и 802.15, то для измерений таких стандартов не существует, а датчики и вторичные измерительные приборы постоянно модифицируются в сторону увеличения класса точности и скорости измерений. Важнейшим условием для этого является минимизация методических и динамических погрешностей. Весьма перспективным в задачах дистанционного контроля является частотный метод радиоволновых измерений [6]. Доказанные условия существования и единственности квазигармонического представления волнового процесса позволяют установить взаимно однозначную связь огибающей и мгновенной частоты сигнала приемника с медленно меняющимися физическими параметрами породившей волну системы или среды, в которой она распространяется, без предположений об узкополосности волнового процесса.

Приложение. Единственность квазигармонического представления МММЧ волны

Предположим, что квазигармоническое представление (1) для волны МMЧ не единственно, то есть помимо функций $A(\mathbf{r}, t)$ и $\theta(\mathbf{r}, t)$ существуют еще функции $B(\mathbf{r}, t)$ и $\vartheta(\mathbf{r}, t)$ такие, что $x(\mathbf{r}, t) = B(\mathbf{r}, t)\cos[\vartheta(\mathbf{r}, t)]$, причем и функция $\theta(\mathbf{r}, t)$, и функция $\vartheta(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяют условиям (18) и (19) во всех точках пространства, но при этом $\vartheta(\mathbf{r}, t)$ не равна тождественно $\theta(\mathbf{r}, t)$. Это значит, что существует, по крайней мере одна, точка $\mathbf{r}_0$, такая, что в какой-то момент времени $t = t'$ имеет место неравенство $\vartheta(\mathbf{r}_0, t') \neq \theta(\mathbf{r}_0, t')$. Из непрерывности функций $\theta(\mathbf{r}, t)$ и $\vartheta(\mathbf{r}, t)$ следует, что это неравенство выполняется и в некоторой окрестности момента времени t'.

Зафиксируем в пространстве точку $\mathbf{r}_0$ и рассмотрим колебание вида (34)

$$y(t) = x(\mathbf{r}_0, t) = a(t)\cos[\varphi(t)] = b(t)\cos[\psi(t)], \qquad (37)$$

где обозначено $a(t) = A(\mathbf{r}_0, t)$, $\varphi(t) = \theta(\mathbf{r}_0, t)$, $b(t) = B(\mathbf{r}_0, t)$, $\psi(t) = \vartheta(\mathbf{r}_0, t)$. По предположению о не единственности квазигармонического МMЧ представления $\varphi(t) \neq \psi(t)$, но обе мгновенные частоты $\omega(t) = d\varphi(t)/dt$ и $\omega_1(t) = d\psi(t)/dt$ удовлетворяют условиям (18) и (19).

Пусть функция $y(t)$ вида (37) имеет нули в моменты времени t_k, образующие монотонную последовательность без конечных предельных точек. Из непрерывности и положительности функций $a(t)$ и $b(t)$ следует, что

$$\varphi(t_k) = \psi(t_k) = \theta_k = \pi k - \pi/2. \qquad (38)$$

Здесь принято, что в момент времени $t = t_0 = 0$ функция $y(t)$ проходит через ноль с положительной производной. Таким образом, нахождение полной фазы $\varphi(t)$ сводится к решению интерполяционной задачи для неэквидистантной последовательности точек (узлов интерполяции) t_k.

Задача интерполяции (35) всегда имеет решение, не обязательно в виде ряда Лагранжа, в классе целых аналитических функций, какими бы ни были действительные числа t_k и θ_k [29]. Это решение не является единственным. Пусть целые функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, где $z = t + iu$, являются решением интерполяционной задачи (38). Из условия (18) положительности мгновенной частоты следует, что в точках $z = t_k$ функция $\cos[\varphi(z)]$ имеет простые нули. Тогда функция

$$\chi(z) = [\psi\,(z) - \varphi(z)]/\cos[\varphi(z)]$$

тоже является целой аналитической, так как нули ее знаменателя совпадают с нулями числителя. Поэтому общее решение интерполяционной задачи (38) в классе целых функций имеет вид

$$\psi(z) = \varphi(z) + \chi(z)\cos[\varphi(z)], \tag{39}$$

где $\chi(z)$ – произвольная целая функция.

Покажем, что решение интерполяционной задачи (38) единственно в классе целых функций с финитным спектром. Пусть существует конечный предел

$$\omega_C = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\omega(t)dt\right] = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{2\pi k}{t_k - t_{-k}}\right]. \tag{40}$$

Естественно, что $\omega_m \leq \omega_C \leq \omega_M$. Из ограниченности мгновенной частоты следует, что полная фаза $\theta(t)$ растет при $|t| \to\infty$ не быстрее чем t. Если носителем спектра функции $\theta(t)$ является отрезок $[-\omega_B, \omega_B]$, причем $\omega_B < \omega_C$, то в силу теоремы Винера – Палея – Шварца [30, 31] ее аналитическое продолжение $\varphi(z)$ является целой функцией конечной степени (типа), меньшей чем ω_C.

Целая функция конечной степени имеет первый порядок. Из теоремы о порядке произведения целых функций [32] следует, что для того чтобы функция $\psi(z)$, не равная тождественно $\varphi(z)$, также имела конечную степень, меньшую ω_C, необходимо, чтобы и функция $\cos[\varphi(z)]$ имела порядок не выше первого. Целая функция $\cos(z)$ имеет первый порядок, поэтому сложная функция $\cos[\varphi(z)]$ может иметь первый порядок только в случае, если $\varphi(z)$ – многочлен [33]. Но многочлен степени выше первой растет на действительной оси быстрее, чем $|t|$, что противоречит условию (15) ограниченности мгновенной частоты.

Таким образом, различные решения интерполяционной задачи (38) возможны лишь при $\varphi(t) = \omega_0 t - \pi/2$. Но спектр функции вида (39)

$$\psi(t) = \omega_0 t - \pi/2 + \chi(t)\cos(\omega_0 t - \pi/2) \qquad (40)$$

ограничен сверху частотой $\omega_0 + \omega_\chi \geq \omega_C > \omega_B$, где ω_χ – верхняя граничная частота спектра функции $\chi(t)$, так как для колебания (37) с полной фазой (9) из условия (40) следует $\omega_C = \omega_0$. Таким образом, при $\chi(t)$ не равной тождественно нулю спектр функции $\psi(t)$ не является финитным, что и доказывает единственность решения интерполяционной задачи (35) в классе целых функций с финитным спектром. При этом финитности спектра амплитуды $a(t)$ и самого колебания $y(t)$ не требуется.

Если предел (40) не существует, класс единственности решения интерполяционной задачи (38) определяется условием $\omega_B < \omega_m$. Условие положительности амплитуды $a(t)$ также можно ослабить. Достаточно того, чтобы функция $a(t)$ имела нули в счетном множестве точек t_m, которые полагаются известными. Тогда из множества узлов интерполяции t_k следует исключить простые нули сигнала $x(t)$, совпадающие с числами t_m.

Поскольку производная целой функции имеет тот же порядок и степень, что и сама функция [32], мгновенная частота в силу теоремы Винера – Палея – Шварца [30, 31] также должна быть целой функцией с финитным спектром, удовлетворяющей условию (19).

С другой стороны, при выполнении условия (19) коэффициенты разложения c_n аналитической функции $\omega(t)/\omega_C$ в ряд Тейлора в произвольной точке удовлетворяют условию $|c_n| \leq \omega_B^n P/(n!\omega_C)$. Тогда для степени α этой функции получаем [32] $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n!c_n}\right) \leq \omega_{\hat{A}}$ и по теореме Винера – Палея – Шварца [30, 31] мгновенная частота $\omega(t)$ имеет финитный спектр, ограниченный частотой $\omega_B < \omega_C$. Таким образом, если для колебания существует представление (37) с медленно меняющейся частотой, удовлетворяющей условиям (18) и (19), то оно единственно. В общем случае это представление может не являться аналитическим сигналом. Но из единственности квазигармонического представления ММЧ колебания (37) следует, что $\psi(t) \equiv \varphi(t)$, что, в свою очередь, противоречит предположению о не единственности представления (1) квазигармонической волны с медленно меняющейся частотой.

Вопрос об условиях, которым должен удовлетворять волна, чтобы для нее существовало квазигармоническое представление (1) с медленно меняющейся частотой, сводится к задаче об условиях, которым должна удовлетворять последовательность t_k нулей функции $x(t)$, чтобы числа $\theta_k = \pi k - \pi/2$ могли быть значениями функции с финитным спектром, взятыми в моменты t_k [34]. Поскольку последовательность θ_k бесконечно большая, эти условия могут быть излишне ограничительными или не иметь ясного физического смысла [35]. Например, может быть усилено условие (40) [34]:

$$t_k = \pi \frac{|k| + \delta_k}{\omega_C}, \quad \delta_k \le \frac{1}{2|k| + 1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Работа поддержана грантом РФФИ 10-07-9713р_а.

Литература

1. *Риле Ф.* Стандарты частоты. Принципы и приложения / Пер. с англ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 512 с.
2. *Трубецков Д. И., Рожнев А. Г.* Линейные колебания и волны: Учеб. пособие. – М.: Физматлит, 2001. – 416 с.
3. *Яковлев О. И., Якубов В. П., Урядов В. П., Павельев А. Г.* Распространение радиоволн. – М.: ЛЕНАНД, 2009 – 496 с.
4. *Ashby N.* Relativity in the Global Positioing System. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2003-1

5. *Перунов Ю. М., Фомичев К. И., Юдин Л. М.* Радиоэлектронное подавление информационных каналов систем управления оружием. – М.: Радиотехника, 2003. – 416 с.
6. *Викторов В. А., Лункин Б. В., Совлуков А. С.* Радиоволновые измерения. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 208 с.
7. *Томпсон Р., Моран Дж., Свенсон Дж.* Интерферометрия и синтез в радиоастрономии. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 624 с.
8. *Блохинцев Д. И.* Акустика неоднородной движущейся среды. – М.: Наука, 1981. – 208 с.
9. *Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.* Классическая электродинамика. – М.: Физматлит, 1985. – 400 с.
10. *Бутиков Е. И.* Оптика. – М.: Высшая школа, 1986. С. 395.
11. Measurement of the neutrino velocity with OPERA detector in the CNGS beam. *Adam T. at all.* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1109/1109.4897.pdf.
12. *Одуан К. Гино. Б.* Измерение времени. Основы GPS. – М.: Техносфера, 2002 – 400 с.
13. *Петров Б. М.* Прикладная электродинамика вращающихся тел. – М.: Горячая линия – Телеком, 2009. – 288 с.
14. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. – М.: Наука, 1973. – с. 328.
15. *Gabor D.* // JIEE. – 1946. – V. 93. – P. 429 – 457.
16. *Вакман Д. Е.* // Радиотехника и электроника. – 1972. – Т. 17. – № 5. – С. 972 – 978.
17. *Титчмарш Э. Ч.* Введение в теорию интегралов Фурье. – М.: ОГИЗ, 1948. – С. 159 – 161.
18. *Cohen L.* // Proc. IEEE. 1989. – V. 46. – № 7. – P. 941 – 981.
19. *Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е.* Разделение частот в теории колебаний и волн. – М.: Наука, 1983. – 288 с.
20. *Островский Л. А., Потапов А. И.* Введение в теорию модулированных волн. – М.: Физматлит, 2003. – 400 с.

21. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
22. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
23. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – М.: Физматлит, 2004. – 800 с.
24. Квантовая радиофизика / *под ред. В. И. Чижика*. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. – 689 с.
25. *Игнатьев В. К., Никитин А. В., Юшанов С. В.* // Изв. вузов. Электромеханика. – 2009. – № 2. – С. 28.
26. *Игнатьев В. К., Никитин А. В., Юшанов С. В.* // Известия вузов. Радиофизика. – 2010. – Т. LIII – № 2. – С. 145 – 159.
27. *Игнатьев В. К., Никитин А. В., Хоружий Д. Н., Юшанов С. В.* // Измерительная техника. – 2011. – № 1. – С. 32 – 36.
28. *Игнатьев В. К., Никитин А. В., Юшанов С. В.* // Журнал Радиоэлектроники [Электронный ресурс]. – 2011. – № 8. – 14 с. – Режим доступа: http://jre.cplire.ru/jre/aug11/7/text.pdf, свободный. – Загл. с экрана.
29. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. – М.: Физматгиз, 1959. – 212 с.
30. *Хургин Я. И, Яковлев В. П.* Финитные функции в физике и технике. – М.: Наука, 1971. – 408 с.
31. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматгиз, 1958. – 276 с.
32. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.
33. *Polya G.* // Journal London Math. Soc. – 1926. – V. 1. – P. 12 – 15.
34. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
35. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехтеориздат, 1956. – 632 с.