

УДК 519.676 + 621.391

## НОВЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ВОЗДЕЙСТВИЯ ПУАССОНОВСКИХ ДЕЛЬТА-ИМПУЛЬСОВ В ЗАДАЧАХ РАДИОТЕХНИКИ \*

Т. А. Аверина <sup>1</sup>, К. А. Рыбаков <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

<sup>2</sup> Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Получена 22 января 2013 г.

**Аннотация.** В статье рассматриваются стохастические системы при импульсных воздействиях, образующих пуассоновские потоки событий и приводящих к разрывам траекторий системы. Решается задача нахождения плотности вероятности вектора состояния. В основе предлагаемых методов лежит использование метода статистических испытаний и спектральной формы математического описания систем управления.

**Ключевые слова:** задача анализа, импульсные воздействия, метод статистических испытаний, пуассоновский поток событий, пуассоновский процесс, спектральный метод, стохастическая система, уравнение Колмогорова–Феллера.

**Abstract:** The article deals with the stochastic systems with impulses generated by Poisson flow of events and lead to discontinuities of the system trajectories. We solve the problem of finding the probability density function for the system state. The solution is based on using the statistical simulation method and spectral form of mathematical description for control systems.

**Keywords:** analysis, impulse signals, Kolmogorov–Feller equation, Poisson flow of events, Poisson process, spectral method, statistical simulation method, stochastic system.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (проекты № 11-01-00282, 12-01-00490 и 12-08-00892).

## Введение

При проектировании сложных радиотехнических систем (радиолокационных комплексов, бортовых радиоэлектронных систем летательных аппаратов, навигационных систем и др.) необходимо учитывать случайные факторы или воздействия, которые могут быть как проявлениями внешней среды, так и отклонениями номинальных параметров самой системы.

Случайные воздействия могут иметь различную природу, действовать постоянно (непрерывно) или время от времени (в виде импульсов). Удобной математической моделью для описания процессов, подверженных непрерывным и импульсным возмущениям, являются стохастические дифференциальные уравнения с диффузионной и скачкообразной компонентами [1–4].

Далее рассматриваются задачи нахождения вероятностных характеристик процессов, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями с диффузионной и скачкообразной компонентами, или задачи анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей.

Аналитические решения в таких задачах если и можно найти, то только лишь для специально подобранных случаев, поэтому необходимым этапом проектирования может стать применение различных приближенных методов.

В статье даны разные формы математического описания стохастических систем с пуассоновской составляющей, приводятся разработанные методы и алгоритмы приближенного анализа – нахождения вероятностных характеристик вектора состояния системы с помощью метода статистического моделирования [5–12] и спектральной формы математического описания систем управления [13–20].

Метод статистического моделирования основан на моделировании решений стохастических дифференциальных уравнения и вычислении статистических оценок искомых вероятностных характеристик решения. Спектральный метод анализа состоит в приближенном решении интегро-дифференциального уравнения в частных производных [1, 3, 4], описывающего эволюцию плотности вероятности вектора состояния (уравнение Колмогорова–Феллера), с по-

мощью представления искомой плотности вероятности в виде функционального ряда по подходящему базису.

Преимущества предлагаемых подходов к анализу состоят в простоте реализации и универсальности, а именно возможности решения задачи анализа для линейных и нелинейных, одномерных и многомерных моделей стохастических систем, для различных законов распределения величин приращений вектора состояния и их интенсивностей. Апробация предлагаемых методов проводится на модельных примерах анализа воздействия импульсов на электрические цепи.

### 1. Математические модели систем с пуассоновской составляющей

Приведем различные варианты описания стохастических систем с импульсными воздействиями, образующими пуассоновский поток событий. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито с пуассоновской составляющей [2]:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где  $X \in R^n$  – вектор состояния;  $t \in [t_0, T]$ ,  $[t_0, T]$  – отрезок времени функционирования системы;  $f(t, x): [t_0, T] \times R^n \rightarrow R^n$  – вектор-функция размеров  $n \times 1$ ,  $\sigma(t, x): [t_0, T] \times R^n \rightarrow R^{n \times s}$  – матричная функция размеров  $n \times s$ ;  $W(t)$  –  $s$ -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния  $X_0$ ;  $Q(t)$  – общий пуассоновский процесс, заданный в форме

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k.$$

В правой части последнего равенства  $P(t)$  – пуассоновский процесс,  $\Delta_k$  – независимые случайные величины из  $R^n$ , распределение которых задано плотностью вероятности  $\psi(\tau_k, \Delta)$ , т.е. вектор состояния  $X$  получает случайные приращения в моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots$ :

$$X(\tau_k) = X(\tau_k - 0) + \Delta_k.$$

Если величина приращения зависит от вектора состояния, то используется условная плотность вероятности  $\psi(\tau_k, x | z)$ , характеризующая распределение  $X(\tau_k)$  при условии  $X(\tau_k - 0) = z$ . В частном случае  $\psi(\tau_k, x | z) = \psi(\tau_k, x - z)$ .

Пуассоновский поток событий и пуассоновский процесс  $P(t)$  определяются интенсивностью  $\lambda(t)$ .

Для описания математической модели стохастической системы с пуассоновской составляющей может применяться уравнение Колмогорова–Феллера – интегро-дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее эволюцию плотности вероятности  $\varphi(t, x)$  вектора состояния (в случае, если такая плотность существует):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x) \varphi(t, x)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x) \varphi(t, x)] - \\ & - \lambda(t) \varphi(t, x) + \lambda(t) \int_{R^n} \psi(t, x | z) \varphi(t, z) dz, \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $g_{ij}(t, x)$  – элементы матрицы диффузии  $g(t, x) = \sigma(t, x) \sigma^T(t, x)$ ,  $\varphi_0(x)$  – плотность вероятности начального состояния  $X_0$ .

Задача анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей заключается в нахождении вероятностных характеристик вектора состояния (плотности вероятности, моментных характеристик) в соответствии с заданной математической моделью.

## 2. Статистический алгоритм численного решения стохастических систем с пуассоновской составляющей

Статистический алгоритм численного решения стохастических систем с разрывами траекторий вида (1) должен в себя включать: моделирование моментов разрыва траекторий, моделирование величины скачка, а также вычисление между скачками численного решения стохастического дифференциального уравнения с непрерывными траекториями. В рассматриваемом случае распределение моментов разрыва траекторий определяется интенсивностью  $\lambda(t)$

пуассоновского процесса  $P(t)$ . Так как интенсивность зависит от времени, то моделирование моментов смены структуры будет осуществляться по методу максимального сечения [5–7]. Применение этого метода требует выполнения условия  $\lambda(t) \leq \bar{\lambda} = \text{const}$  на всем интервале интегрирования  $[t_0, T]$ .

*Статистический алгоритм моделирования траекторий процесса  $X(t)$*

*для стохастических систем с пуассоновской составляющей*

0)  $k := 0$ ;  $stop := 0$ ;  $\tau_k := 0$ ; моделируем  $X_k$  согласно заданному  $X_0$ ;

1) моделируем возможный момент разрыва траекторий  $\tau_{k+1} = \tau_k + \zeta$ , где  $\zeta$  – случайная величина с плотностью  $p(\theta) = \bar{\lambda} e^{-\bar{\lambda}\theta}$  (по формуле  $\zeta = -\ln \alpha / \bar{\lambda}$ , в которой  $\alpha$  – равномерно распределенная на интервале (0,1) случайная величина); если  $\tau_{k+1} > T$ , то  $\tau_{k+1} := T$  и  $stop := 1$ ;

2) решаем стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Ито

$$X(t) = X(\tau_k) + \int_{\tau_k}^t f(\tau, X(\tau))d\tau + \int_{\tau_k}^t \sigma(\tau, X(\tau))dW(\tau)$$

или эквивалентное ему стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Стратоновича

$$X(t) = X(\tau_k) + \int_{\tau_k}^t a(\tau, X(\tau))d\tau + \int_{\tau_k}^t \sigma(\tau, X(\tau)) \circ dW(\tau)$$

на интервале  $[\tau_k, \tau_{k+1}]$  численным методом [8] с шагом  $h$  и находим  $X_{k+1}$  – решение в момент  $\tau_{k+1}$ , при этом шаг должен быть согласован с интенсивностью, например,  $h \leq 0.1 / \bar{\lambda}$ ; если  $stop = 1$ , то процесс моделирования завершается;

3) проверяем условие разрыва: если  $\alpha_1 \leq \lambda(\tau_{k+1}) / \bar{\lambda}$ , где  $\alpha_1$  – равномерно распределенная на интервале (0,1) случайная величина, то переходим к п. 4; иначе переходим к п. 5;

4) моделируем случайную величину  $X$  согласно плотности  $\psi(t, x | X_{k+1})$  и полагаем  $X_{k+1} := X$ ; или моделируем величину скачка  $\Delta_{k+1}$  согласно плотности  $\psi(t, \Delta)$  и полагаем  $X_{k+1} := X_{k+1} + \Delta_{k+1}$ ;

5) если  $\tau_{k+1} \neq T$ , то  $k := k + 1$  и переходим к п. 1, иначе процесс моделирования завершается.

**Замечания.**

1. Функции  $a(t, x)$  и  $f(t, x)$  связаны соотношением

$$a(t, x) = f(t, x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^s \frac{\partial \sigma_r(t, x)}{\partial x_i} \sigma_{ir}(t, x).$$

в котором  $\sigma_r(t, x)$  –  $r$ -й столбец матрицы  $\sigma(t, x)$ . Если  $\sigma(t, y)$  не зависит от  $y$ , то функции  $a(t, x)$  и  $f(t, x)$  совпадают.

2. Пункт 3 в алгоритме будет отсутствовать, если интенсивность  $\lambda$  постоянна, так как проверяемое условие будет всегда истинно.

3. Выбор численного метода решения конкретного стохастического дифференциального уравнения и шага интегрирования  $h$  определяются видом системы (1) и требуемой точностью вычисления вероятностных характеристик выходных процессов.

4. Сетка по времени  $\{t_i\}$  является суперпозицией равномерной сетки с шагом  $h$  и моментов разрыва траекторий.

5. Метод максимального сечения предполагает моделирование времени  $\bar{\tau}$ , через которое произойдет разрыв траектории, по следующему правилу:

$$\bar{\tau} = \zeta_N, \quad N = \min \left\{ n : \alpha_n \leq \frac{\lambda(t^* + \zeta_n)}{\bar{\lambda}} \right\}, \quad \zeta_n = \sum_{k=1}^n \xi_k,$$

где  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с плотность  $p(\theta)$  (см. п. 1 алгоритма);  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$  – последовательность независимых равномерно распределенных на интервале  $(0,1)$  случайных величин;  $t^*$  – начальный момент времени или предыдущий момент разрыва. Вместо описанного подхода можно использовать более экономичный модифицированный метод максимального сечения, согласно которому

$$N = \min \left\{ n : 1 - \alpha > \prod_{i=1}^n \left( 1 - \frac{\lambda(t^* + \zeta_i)}{\bar{\lambda}} \right) \right\},$$

где  $\alpha$  – равномерно распределенная на интервале (0,1) случайная величина [9].

Использование модифицированного метода максимального сечения сокращает время моделирования неоднородного пуассоновского процесса (последовательности моментов разрывов траекторий) примерно на 10% и снижает конструктивную размерность алгоритма, связанную с многомерной равномерностью используемых псевдослучайных чисел [9, 10].

В работе [11] для численного решения стохастического дифференциального уравнения в смысле Стратоновича

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t)) \circ dW(t), \quad X(t_0) = X_0,$$

построено семейство численных методов. При численных расчетах использовался устойчивый метод из этого семейства [12]:

$$\begin{aligned} X_{i+1} = X_i + \left( I - \frac{h}{2} \frac{\partial a(t_i, X_i)}{\partial x} \right)^{-1} \frac{h}{2} \left( a(t_i, X_i) + a(t_i, X_{i+1}^p) \right) + \\ + \frac{\sqrt{h}}{2} \left( \sigma(t_i, X_{i+1}^p) + \sigma(t_i, X_i) \right) \zeta_i, \quad X_{i+1}^p = X_i + \sqrt{h} \sigma(t_i, X_i) \zeta_i, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $X_i$  – значение приближенного решения в узле сетки по времени  $t_i$ ;  $I$  – единичная матрица размера  $n \times n$ ;  $h_i = t_{i+1} - t_i$  – шаг интегрирования в узле  $t_i$ ,  $\zeta_i$  – вектор независимых между собой случайных величин, имеющих нормальное распределение с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Сетка  $t_0 < t_1 < \dots < t_{n_T} = T$  на отрезке  $[t_0, T]$  строится для каждой траектории численного решения и включает все моменты скачков.

Нормальные случайные величины  $\zeta_{ri}$  (координаты  $\zeta_i$ ) с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями моделировались по формуле

$$\zeta_{ri} = \sqrt{-2 \ln \beta_1} \cos(2\pi\beta_2), \quad r = 1, \dots, s,$$

где для моделирования  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  – равномерных на интервале (0,1) случайных величин (различных для всех  $r$ ) – использовался датчик псевдослучайных чисел RAND [5].

### 3. Спектральный метод анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей

Спектральный метод анализа базируется на применении спектральной формы математического описания систем управления [13]. В основе этого подхода лежит представление функций их спектральными характеристиками – упорядоченными совокупностями коэффициентов разложения в ряды по подходящей системе ортонормированных функций. Применение спектральной формы математического описания позволяет перейти от операторных уравнений (в данном случае интегро-дифференциального уравнения (2)) к алгебраическим (для коэффициентов разложения), которые представляются в матричной форме. Специфика задач и методика формирования систем ортонормированных функций приводят к необходимости использовать математический аппарат теории многомерных матриц, который в достаточном объеме изложен в [14, 15]. Там же содержатся определения спектральных характеристик и спектральных преобразований, их свойства.

Для применения спектральной формы математического описания удобнее использовать операторную форму записи уравнения (2):

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A} \varphi(t, x) - \mathcal{L} \varphi(t, x) + \mathcal{H} \varphi(t, x), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x), \quad (4)$$

где линейные операторы  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{H}$  определяются выражениями

$$\mathcal{A} \varphi(t, x) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x) \varphi(t, x)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x) \varphi(t, x)],$$

$$\mathcal{L} \varphi(t, x) = \lambda(t) \varphi(t, x), \quad \mathcal{H} \varphi(t, x) = \lambda(t) \int_{R^n} \psi(t, x | z) \varphi(t, z) dz.$$

Оператор  $\mathcal{A}$  называют оператором Фоккера–Планка–Колмогорова,  $\mathcal{L}$  – оператор умножения,  $\mathcal{H}$  – оператор Фредгольма.

Пусть  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$  – ортонормированный базис пространства  $L_2([t_0, T] \times R^n)$ , причем функции  $e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)$  порождаются всевозможными произведениями функций, образующих ортонормированные базисы



$\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  и  $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$  пространств  $L_2([t_0, T])$  и  $L_2(R^n)$  соответственно, т.е.  $e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) = q(i_0, t)p(i_1, \dots, i_n, x)$ ,  $i_0, i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots$

Напомним [14], что спектральной характеристикой некоторой функции  $z(t, x)$ , определенной относительно базиса  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ , называется  $(n+1)$ -мерная бесконечная матрица  $Z(n+1, 0)$  с элементами

$$\begin{aligned} z_{i_0 i_1 \dots i_n} &= (e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), z(t, x))_{L_2([t_0, T] \times R^n)} = \\ &= \int_{[t_0, T] \times R^n} e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) z(t, x) dt dx, \quad i_0, i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

т.е.  $z_{i_0 i_1 \dots i_n}$  – коэффициенты разложения функции  $z(t, x)$  в ряд по функциям базисной системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ , обозначение:  $\mathbb{S}[z(t, x)] = Z(n+1, 0)$ .

Спектральная характеристика плотности вероятности называется обобщенной характеристической функцией.

Применяя спектральное преобразование  $\mathbb{S}$  (отображение, ставящее в соответствие функции ее спектральную характеристику) к левой и правой частям уравнения (4), получаем

$$\mathbb{S} \left[ \left. \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} \right|_{\varphi(t_0, x) = \varphi_0(x)} \right] = \mathbb{S}[\mathcal{A}\varphi(t, x)] - \mathbb{S}[\mathcal{L}\varphi(t, x)] + \mathbb{S}[\mathcal{H}\varphi(t, x)],$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \mathbb{S} \left[ \left. \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} \right|_{\varphi(t_0, x) = \varphi_0(x)} \right] &= - \sum_{i=1}^n \mathbb{S} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x)\varphi(t, x)] \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{S} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x)\varphi(t, x)] \right] - \mathbb{S}[\lambda(t)\varphi(t, x)] + \mathbb{S} \left[ \lambda(t) \int_{R^n} \psi(t, x | z)\varphi(t, z) dz \right]. \end{aligned}$$

Согласно свойствам спектрального преобразования функций и линейных операторов имеем

$$\mathbb{S} \left[ \left. \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} \right|_{\varphi(t_0, x) = \varphi_0(x)} \right] = P(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) - q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0),$$

где

$$P(n+1, n+1) = \mathcal{P}(n+1, n+1) + \left( q(1, 0; t_0) \cdot q^T(1, 0; t_0) \right) \otimes E(n, n).$$

В этих соотношениях  $\mathcal{P}(n+1, n+1)$  – спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени [14], определенная относительно системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ ;  $\Phi(n+1, 0)$  – спектральная характеристика плотности вероятности  $\varphi(t, x)$  вектора состояния  $X$  (обобщенная характеристическая функция), определенная относительно той же базисной системы;  $E(n, n)$  –  $2n$ -мерная единичная матрица;  $q(1, 0; t_0)$  – матрица-столбец значений функций базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  при  $t = t_0$ :

$$q(1, 0; t_0) = \left[ q(0, t_0) \quad q(1, t_0) \quad q(2, t_0) \quad \dots \right]^T.$$

Через  $\Phi_0(n, 0)$  обозначена спектральная характеристика плотности вероятности  $\varphi_0(x)$  начального состояния  $X_0$ , определенная относительно базисной системы  $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ . Это означает, что  $\Phi_0(n, 0)$  –  $n$ -мерная бесконечная матрица с элементами

$$\varphi_{0i_1 \dots i_n} = \left( p(i_1, \dots, i_n, x), \varphi_0(x) \right)_{L_2(R^n)} = \int_{R^n} p(i_1, \dots, i_n, x) \varphi_0(x) dx, \quad (6)$$

$$i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[\mathcal{A}\varphi(t, x)] &= A(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0), \\ \mathbb{S}[\mathcal{L}\varphi(t, x)] &= \Lambda(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0), \\ \mathbb{S}[\mathcal{H}\varphi(t, x)] &= H(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0), \end{aligned}$$

где  $A(n+1, n+1)$ ,  $\Lambda(n+1, n+1)$  и  $H(n+1, n+1)$  – спектральные характеристики линейных операторов  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{H}$  соответственно.

Спектральная характеристика линейного оператора  $\mathcal{A}$  – это  $2(n+1)$ -мерная бесконечная матрица  $A(n+1, n+1)$ , элементы которой определяются соотношением

$$\begin{aligned}
 a_{i_0 i_1 \dots i_n j_0 j_1 \dots j_n} &= (e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), Ae(j_0, j_1, \dots, j_n, t, x))_{L_2([t_0, T] \times R^n)} = \\
 &= \int_{[t_0, T] \times R^n} e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) Ae(j_0, j_1, \dots, j_n, t, x) dt dx, \quad (7) \\
 & i_0, i_1, \dots, i_n, j_0, j_1, \dots, j_n = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Спектральные характеристики  $\Lambda(n+1, n+1)$  и  $H(n+1, n+1)$  линейных операторов  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{H}$  определяются аналогично.

Одно из преимуществ спектральной формы математического описания систем управления состоит в развитом алгоритмическом обеспечении: явным и рекуррентным формулам для расчета спектральных характеристик линейных операторов, соответствующих элементарным звеньям систем управления, для различных базисных систем [13–18]. Это операторы умножения, дифференцирования и интегрирования. Поэтому спектральную характеристику  $A(n+1, n+1)$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  целесообразно представлять следующим образом [14]:

$$\begin{aligned}
 A(n+1, n+1) &= -\sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i(n+1, n+1) \cdot F_i(n+1, n+1) + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1) \cdot G_{ij}(n+1, n+1), \quad (8)
 \end{aligned}$$

где  $\mathcal{P}_i(n+1, n+1)$  и  $\mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1)$  – спектральные характеристики операторов дифференцирования первого и второго порядков по координатам  $x_i$  и  $x_j$ , а через  $F_i(n+1, n+1)$  и  $G_{ij}(n+1, n+1)$  обозначены спектральные характеристики операторов умножения на функции  $f_i(t, x)$  и  $g_{ij}(t, x)$  соответственно;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Все перечисленные спектральные характеристики определены относительно базисной системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 P(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) - q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0) &= A(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) - \\
 -L(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) + H(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0),
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & (P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + L(n+1, n+1) - H(n+1, n+1)) \cdot \\ & \cdot \Phi(n+1, 0) = q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0). \end{aligned} \quad (9)$$

Эти уравнения, как и в случае отсутствия пуассоновской составляющей, будем называть уравнениями обобщенной характеристической функции [14].

Они представляют собой матричную запись системы линейных неоднородных алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются элементы  $\varphi_{i_0 i_1 \dots i_n}$  матрицы  $\Phi(n+1, 0)$  – коэффициенты разложения плотности вероятности  $\varphi(t, x)$  в функциональный ряд по функциям базисной системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ . Их решение записывается в форме

$$\begin{aligned} & \Phi(n+1, 0) = \\ & = (P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + L(n+1, n+1) - H(n+1, n+1))^{-1} \cdot \\ & \cdot (q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0)). \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом (8) это решение можно представить так:

$$\begin{aligned} & \Phi(n+1, 0) = (P(n+1, n+1) + \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i(n+1, n+1) \cdot F_i(n+1, n+1) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1) \cdot G_{ij}(n+1, n+1) + L(n+1, n+1) - H(n+1, n+1))^{-1} \cdot \\ & \cdot (q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0)). \end{aligned}$$

Отметим, что более детальное представление для некоторых спектральных характеристик, входящих в уравнения обобщенной характеристической функции, изложено в [14].

После нахождения обобщенной характеристической функции  $\Phi(n+1, 0)$  плотность вероятности  $\varphi(t, x)$  вектора состояния может быть представлена в виде ряда

$$\varphi(t, x) = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} \varphi_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), \quad (t, x) \in [t_0, T] \times R^n. \quad (11)$$

Представление решения задачи анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей рядом (11) носит скорее теоретический характер. На

практике получить всю совокупность коэффициентов разложения функции  $\varphi(t, x)$  в общем случае вряд ли возможно. Для этого требуется, чтобы многомерная матрица  $P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + L(n+1, n+1) - H(n+1, n+1)$  или ее сечения и структура имели специальный вид [14], например, треугольный или ленточный. Поэтому далее будем говорить о приближенном решении задачи анализа, т.е. о представлении решения в виде частичной суммы

$$\varphi(t, x) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \dots \sum_{i_n=0}^{L_n-1} \varphi_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), \quad (12)$$

где числа  $L_0, L_1, \dots, L_n$  – порядки усечения спектральных характеристик. Индексы в формулах (5)–(7) в этом случае принимают лишь конечное число значений:  $i_0, j_0 = 0, 1, \dots, L_0 - 1$ ,  $i_1, j_1 = 0, 1, \dots, L_1 - 1$ , ...,  $i_n, j_n = 0, 1, \dots, L_n - 1$ ; все перечисленные спектральные характеристики будут конечными матрицами, а уравнение (9) – матричная запись системы конечного числа линейных алгебраических уравнений (число уравнений и число неизвестных:  $L = L_0 \cdot L_1 \dots L_n$ ).

По найденной спектральной характеристике  $\Phi(n+1, 0)$  могут быть определены маргинальные плотности вероятности (при  $n > 1$ ) и моментные характеристики вектора состояния с использованием свойств спектральных характеристик линейных функционалов [19]. Для определения маргинальных плотностей вероятности спектральным методом достаточно, чтобы функции базисной системы  $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$  порождались всевозможными произведениями функций базисных систем  $\{p_1(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}, \dots, \{p_n(i_n, x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$  пространства  $L_2(R)$ , т.е.  $p(i_1, \dots, i_n, x) = p_1(i_1, x_1) \dots p_n(i_n, x_n)$ ,  $i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots$

*Алгоритм приближенного решения задачи анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей спектральным методом*

1. Выбрать базисные системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  и  $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$  (или  $\{p_1(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}, \dots, \{p_n(i_n, x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$ ), сформировать базисную систему

$\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ . Выбрать порядки усечения спектральных характеристик  $L_0, L_1, \dots, L_n$ .

2. Вычислить спектральные характеристики операторов дифференцирования  $\mathcal{P}(n+1, n+1)$ ,  $\mathcal{P}_i(n+1, n+1)$ ,  $\mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1)$  и операторов умножения  $F_i(n+1, n+1)$ ,  $G_{ij}(n+1, n+1)$ ,  $\Lambda(n+1, n+1)$ , спектральную характеристику  $H(n+1, n+1)$  оператора  $\mathcal{H}$ , спектральную характеристику  $\Phi_0(n, 0)$  плотности вероятности начального состояния  $X_0$ ; сформировать матрицу-столбец  $q(1, 0; t_0)$ , матрицу  $P(n+1, n+1)$ .

3. Найти решение (10) уравнения обобщенной характеристической функции.

4. Представить плотность вероятности  $\varphi(t, x)$  в виде (12).

В качестве базисных систем  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ ,  $\{p_1(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ , ...,  $\{p_n(i_n, x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$  могут применяться подходящие для конкретных задач системы ортонормированных функций: полиномиальные, тригонометрические, кусочно-постоянные и др. [13–18, 20].

#### 4. Примеры анализа воздействия импульсов на электрические цепи

Рассмотрим задачу определения вероятностных характеристик напряжения на конденсаторе в RC-цепи (интегрирующей цепи; см. рис. 1, а).

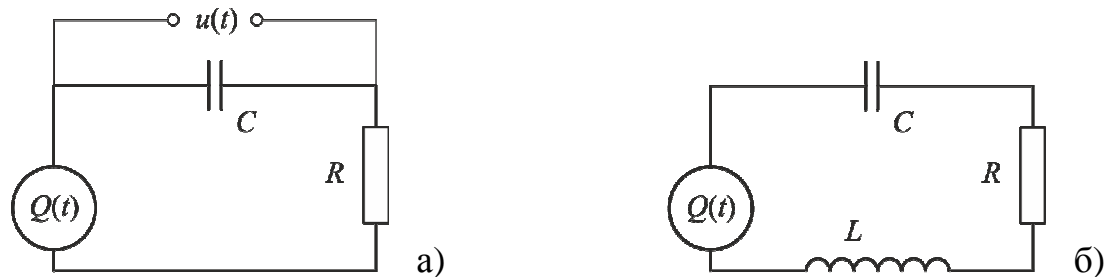


Рис. 1. RC-цепь и RCL-цепь с генераторами импульсов

Уравнение, описывающее динамику изменения напряжения на конденсаторе, задается в виде [4]

$$du(t) = -\frac{1}{RC}u(t)dt + \sigma dW(t) + dQ(t), \quad u(0) = u_0, \quad Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k,$$

где  $R$  – сопротивление,  $C$  – емкость конденсатора,  $\sigma$  – параметр, характеризующий интенсивность помехи,  $u_0$  – начальное напряжение,  $\Delta_k$  – амплитуды скачков напряжения;  $t \in [0, T]$ ,  $T = RC$  – время окончания процесса. Интенсивность импульсов постоянна и равна  $\lambda$ .

Для численных расчетов положим  $R = 8 \cdot 10^3$  Ом (8 кОм),  $C = 2.5 \cdot 10^{-4}$  ф (250 мкф),  $\sigma = 0.14$ ,  $\lambda = 0.1$ , начальное напряжение  $u_0$  имеет нормальное распределение с параметрами  $m_{u_0} = 1.5$  В,  $\sigma_{u_0} = 0.2$  В (дисперсия  $D_{u_0} = 0.04$ ), случайные величины  $\Delta_k$  имеют логарифмически нормальное распределение с параметрами  $m_{\Delta} = 0.2$  и  $\sigma_{\Delta} = 0.15$  – математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение для  $\ln \Delta_k$ .

При решении задачи методом статистических испытаний нормальная случайная величина  $u_0$  моделировалась по формуле  $X_0 = \sigma_{u_0} \xi + m_{u_0}$ , где  $\xi$  – стандартная нормальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией; моделирование времени между скачками осуществлялось по формуле  $\tau_k = -\ln \alpha_k / \lambda$ , где  $\alpha_k$  – независимые равномерные случайные величины на  $(0, 1)$ ; моделирование величин скачков осуществлялось по формуле  $\Delta_k = e^{\sigma_{\Delta} \alpha + m_{\Delta}}$ , где  $\alpha$  – стандартная нормальная случайная величина; на интервалах между скачками решение моделировалось по методу (3). Моделировалось  $10^6$  траекторий. Сетка по времени является суперпозицией равномерной сетки с шагом  $h = 0.1$  и моментов скачков. Для оценивания плотности вероятности строилась гистограмма.

При решении задачи спектральным методом в качестве базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  были выбраны полиномы Лежандра [14], а в качестве базисной системы  $\{p(i_1, x)\}_{i_1=0}^{\infty}$  – функции Эрмита [17] с параметрами  $m = 5$  и  $D = 1$ , поряд-

ки усечения  $L_0 = 16$  и  $L_1 = 16$ ; для удобства вычислений предварительно была сделана линейная замена переменной:  $5u \rightarrow X$ .

Результаты вычислений для плотности вероятности и первых двух моментов напряжения приведены на рис. 2–4. Пунктиром изображены соответствующие характеристики без учета скачков напряжения ( $\lambda = 0$ ) для сравнения. Рисунки слева соответствуют результатам, которые получены методом статистических испытаний, а справа – спектральным методом.

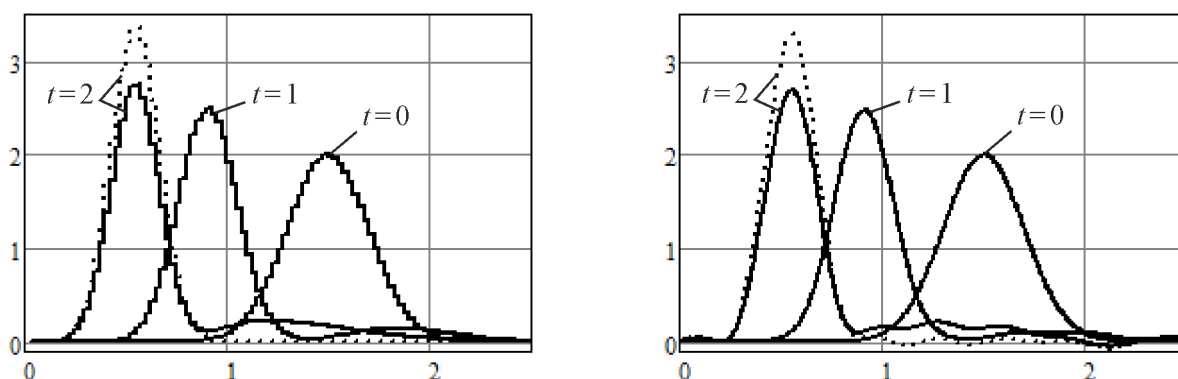


Рис. 2. Оценка плотности вероятности напряжения для RC-цепи

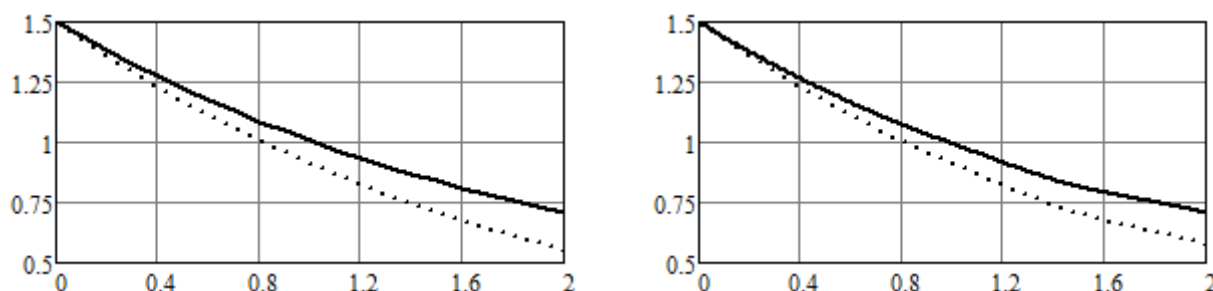


Рис. 3. Оценка математического ожидания напряжения для RC-цепи

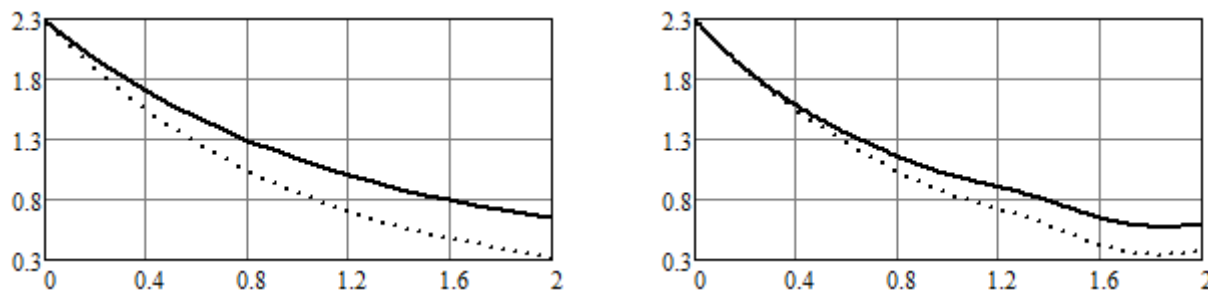


Рис. 4. Оценка второго начального момента напряжения для RC-цепи

Далее рассмотрим задачу определения вероятностных характеристик силы тока в RCL-цепи (колебательном контуре; см. рис. 1, б). Следуя [4], будем использовать математическую модель



$$LC \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + RC \frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}, \quad i(0) = i_0, \quad \frac{di(0)}{dt} = i'_0, \quad Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k,$$

где  $R$  – сопротивление,  $C$  – емкость конденсатора,  $L$  – индуктивность,  $i_0$  и  $i'_0$  – начальные данные,  $\Delta_k$  – амплитуды скачков;  $t \in [0, T]$ ,  $T = 0.0001$  с – время окончания процесса. Интенсивность импульсов постоянна и равна  $\lambda$ .

Зададим числовые значения для параметров контура, начальных данных и параметров источника импульсов:  $R = 80$  Ом,  $C = 1.2 \cdot 10^{-6}$  ф (1.2 мкф),  $L = 1.5 \cdot 10^{-2}$  Гн (15 мГн),  $\lambda = 15000$ . Начальная сила тока  $i_0$  случайна и имеет нормальное распределение с параметрами  $m_{i_0} = 0$  А и  $\sigma_{i_0} = 0.1$  А;  $i'_0$  имеет нормальное распределение с параметрами  $m_{i'_0} = 2.5 \cdot 10^3$  А/с,  $\sigma_{i'_0} = 10^3$  А/с. Случайные величины  $\Delta_k$  имеют нормальное распределение с параметрами  $m_{\Delta} = 9 \cdot 10^{-6}$  А·с,  $\sigma_{\Delta} = 1.8 \cdot 10^{-6}$  А·с (дисперсия  $D_{\Delta} = 3.24 \cdot 10^{-12}$ ).

Предварительно уравнение было преобразовано к эквивалентной системе двух уравнений:  $i \rightarrow X_1$ ,  $di/dt \rightarrow X_2$ ; кроме того, для увеличения точности расчетов был выбран другой масштаб времени, чтобы коэффициенты в уравнении, описывающем динамику изменения силы тока, были одного порядка:  $t \in [0, 1]$ ,  $\lambda = 1.5$ ).

При решении задачи методом статистических испытаний были использованы те же правила для моделирования случайных величин, что и в предыдущем примере. Моделировалось  $10^6$  траекторий. Сетка по времени является суперпозицией равномерной сетки с шагом  $h = 0.1$  и моментов скачков. Для оценивания плотности вероятности строилась гистограмма.

При решении задачи спектральным методом в качестве базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  были выбраны полиномы Лежандра [14], а в качестве базисных систем  $\{p_1(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$  и  $\{p_2(i_2, x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$  – функции Эрмита [17] с параметрами  $m = 0$  и  $D = 0.01$ , порядки усечения  $L_0 = 8$  и  $L_1 = L_2 = 20$ .

Результаты вычислений для плотности вероятности и первых двух моментов силы тока приведены на рис. 5–7. Пунктиром изображены соответствующие характеристики без учета скачков ( $\lambda = 0$ ) для сравнения. Рисунки слева соответствуют результатам, которые получены методом статистических испытаний, а справа – спектральным методом.

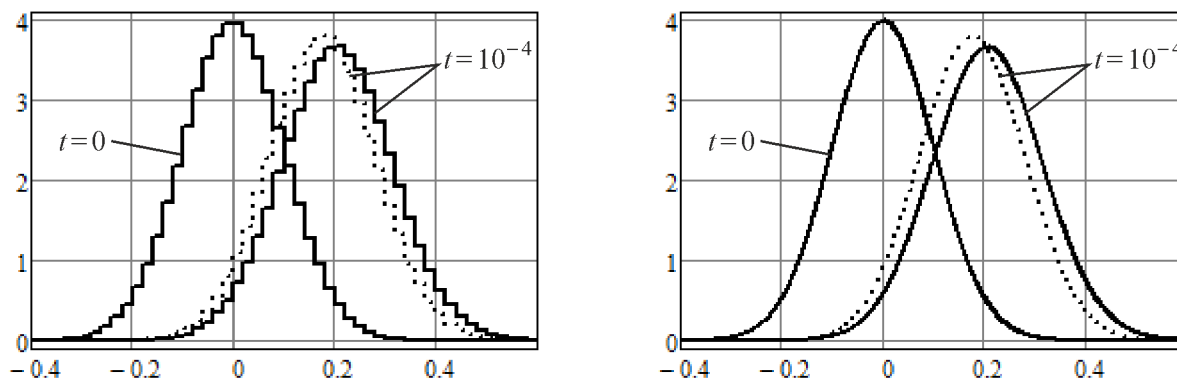


Рис. 5. Оценка плотности вероятности силы тока для RCL-цепи

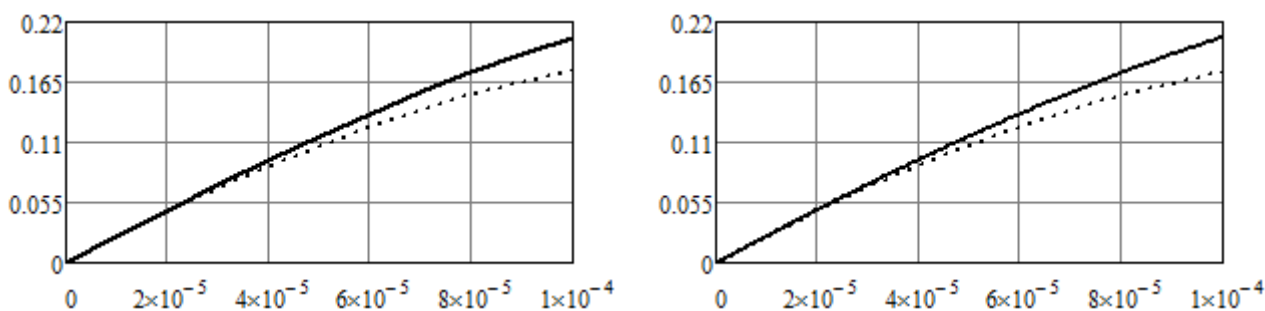


Рис. 6. Оценка математического ожидания силы тока для RCL-цепи

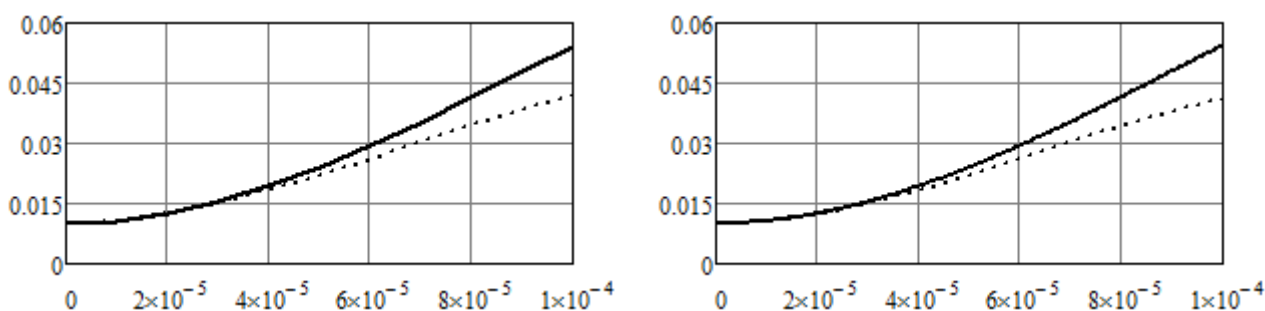


Рис. 7. Оценка второго начального момента силы тока для RCL-цепи

Как показали численные эксперименты, в примерах получены достаточно точные оценки вероятностных характеристик параметров электрических цепей.

## Литература

1. Артемьев В.М., Ивановский А.В. Дискретные системы управления со случайным периодом квантования. – М.: Энергоатомиздат, 1986.
2. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990.
3. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М.: Радио и связь, 1991.
4. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977.
5. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. – М.: Наука, 1982.
6. Михайлов Г.А., Аверина Т.А. Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // Докл. АН. – 2009. Т. 428. № 2. – С. 163–165.
7. Аверина Т.А. Методы статистического моделирования неоднородного пуассоновского ансамбля // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2009. Т. 12. № 4. – С. 361–374.
8. Artemiev S.S., Averina T.A. Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. – VSP, 1997.
9. Аверина Т.А., Михайлов Г.А. Алгоритмы точного и приближенного статистического моделирования пуассоновских ансамблей // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2010. Т. 50. № 6. – С. 1005–1016.
- 10.Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973.
- 11.Аверина Т.А., Артемьев С.С. Новое семейство численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1986. Т. 288. № 4. – С. 777–780.
- 12.Аверина Т.А. Устойчивые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений в смысле Стратоновича // Вестник Бурятского Гос. Унив. – 2012. № 9. – С. 91–94.
- 13.Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974.

- 14.Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010.
- 15.Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. – М.: Изд-во МАИ, 2012.
- 16.Рыбин В.В. Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. – М.: Изд-во МАИ, 2011.
- 17.Романов В.А., Рыбаков К.А. Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Труды МАИ. – 2010. № 39. (<http://www.mai.ru/science/trudy/>).
- 18.Рыбаков К.А. Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Лагерра // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2012. № 1. – С. 114–141. (<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>).
- 19.Рыбаков К.А. Спектральные характеристики линейных функционалов и их приложения к анализу и синтезу стохастических систем управления // Труды МАИ. – 2005. № 18. (<http://www.mai.ru/science/trudy/>).
- 20.Рыбаков К.А. Многопараметрические ортонормированные системы функций для решения задач в спектральной форме математического описания // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Межд. конф., Воронеж, 26–28 ноября 2012 г.: Сб. тр. конф. Ч. 1. – Воронеж: Изд.-полиграф. центр ВГУ, 2012. – С. 327–331.