DOI: https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.9.3
УДК: 621.391.01

Статистическая линеаризация и метод кумулянтов при анализе нелинейных стохастических систем

В.М. Артюшенко [1], В.И. Воловач [2,3]

[1] Московский государственный университет геодезии и картографии, Россия, Москва
[2] Поволжский государственный университет сервиса, Россия, Тольятти
[3] МИРЭА – Российский технологический университет, Россия, Москва

Статья поступила в редакцию 27 июля 2026 г.

Аннотация. В статье исследованы методы анализа нелинейных стохастических систем, основанные на статистической линеаризации и аппарате кумулянтов. Рассмотрены два подхода к определению коэффициентов статистической линеаризации, основанные на критериях совпадения статистических характеристик и минимизации среднеквадратической ошибки аппроксимации. Получены аналитические выражения для параметров статистически линеаризованных моделей, а также исследованы особенности их применения при анализе негауссовских случайных процессов. Выполнено сравнение различных способов статистической аппроксимации на примере нелинейной динамической системы, находящейся под воздействием белого гауссовского шума. Проведен анализ метода кумулянтов, рассмотрены особенности использования разложения Эджварта для построения замкнутой системы дифференциальных уравнений относительно первых кумулянтов случайного процесса. Показано, что метод статистической линеаризации представляет собой частный случай метода кумулянтов при гауссовском приближении

распределения вероятностей. Проведена сравнительная оценка точности рассмотренных методов, позволяющая определить области их эффективного применения при исследовании нелинейных стохастических систем.

Ключевые слова: статистическая линеаризация, нелинейная стохастическая система, метод кумулянтов, семиинвариант, негауссовский случайный процесс, ряд Эджворта, стохастическое дифференциальное уравнение, корреляционные характеристики.

Финансирование: Работа выполнена за счет средств Государственного задания №FSFZ-2024-0006.

Автор для переписки: Воловач Владимир Иванович, volovach.vi@mail.ru

Введение

Одним из важнейших направлений современных статистической радиотехники, радиолокации, теории связи и теории автоматического управления является исследование и обработка случайных процессов, описывающих полезные сигналы и воздействующие на них помехи. При решении большинства прикладных задач широкое распространение получили математические модели, в которых принимаемый сигнал рассматривается как аддитивная сумма полезной составляющей и случайного шума, обладающего гауссовским законом распределения [1-3 и др.]. Подобное представление существенно упрощает математический анализ и позволяет использовать хорошо разработанный аппарат статистической теории обработки сигналов.

Вместе с тем многочисленные экспериментальные исследования и результаты практических наблюдений показывают, что реальные случайные процессы далеко не всегда удовлетворяют предположению о нормальном распределении. В большинстве случаев статистические характеристики сигналов и помех существенно отличаются от гауссовской модели вследствие воздействия различных физических факторов, наличия импульсных возмущений, нелинейных преобразований и особенностей среды

распространения сигналов. Поэтому в практических приложениях случайные процессы чаще имеют выраженный негауссовский характер [1, 4, 5, 6].

Негауссовские плотности распределения вероятности (ПРВ) сигналов и помех оказывают существенное влияние на точность оценки параметров информационных процессов, эффективность фильтрации и качество принимаемых решений [7, 8, 9, 10]. Кроме того, наличие нелинейностей в измерительных трактах и ограничения, обусловленные особенностями аппаратной реализации алгоритмов обработки, существенно усложняют применение традиционных методов статистического анализа, ориентированных на гауссовские модели.

В связи с этим возникает необходимость разработки и применения специальных методов анализа и синтеза радиотехнических и информационно-измерительных систем, позволяющих учитывать особенности негауссовских случайных процессов. Одним из наиболее эффективных подходов к решению данной задачи является статистическая линеаризация, обеспечивающая возможность замены сложных нелинейных зависимостей эквивалентными линейными моделями с сохранением основных статистических свойств исследуемых процессов.

В настоящей работе рассматривается метод статистической линеаризации негауссовских случайных процессов, анализируются особенности его применения при обработке информационных сигналов и оцениваются возможности использования данного подхода при синтезе современных радиотехнических и информационно-измерительных систем.

Цель работы: исследовать метод статистической линеаризации негауссовских случайных процессов, предназначенный для построения вероятностной аппроксимации нелинейных безынерционных преобразований линейными зависимостями, а также произвести анализ нелинейных систем с использованием аппарата кумулянтов.

1. Метод статистической линеаризации

Метод статистической линеаризации основан на замене нелинейного преобразования случайного процесса эквивалентной линейной моделью, обеспечивающей максимально близкое воспроизведение его статистических характеристик [11]. Основная идея метода заключается в построении линейной аппроксимации безынерционного нелинейного преобразования, которая с заданной точностью описывает поведение исходной нелинейной системы в вероятностном смысле. При этом параметры линейной модели выбираются таким образом, чтобы статистические характеристики выходного сигнала, полученного после линеаризации, были максимально близки к соответствующим характеристикам исходного нелинейного преобразования [12, 13].

Иными словами, задача статистической линеаризации сводится к определению такой линейной зависимости, которая наиболее адекватно аппроксимирует нелинейную функцию по выбранному вероятностному критерию. В качестве основных характеристик, подлежащих сохранению, обычно рассматриваются математическое ожидание, дисперсия и корреляционные свойства случайного процесса.

Пусть безынерционное нелинейное преобразование описывается зависимостью

$$Y(t) = \Psi\left(X(t)\right),$$

где $\Psi(.)$ – произвольная однозначная нелинейная функция n входных переменных $X\left(x_1,\ldots,x_n\right)^T$; T – знак транспонирования.

В соответствии с методом статистической линеаризации указанное нелинейное преобразование заменяется линейной зависимостью вида

$$Y_{\text{л}} = \psi_0 + \sum_{i=1}^{n} k_i x_i^0,$$

где ψ_0 – величина, определяемая нелинейной функцией вероятностных моментов входных переменных; k_i – коэффициенты статистической линеаризации (статистические коэффициенты усиления); x_i^0 – центрированные случайные составляющие соответствующих входных переменных.

Таким образом, результирующая линейная модель описывает не саму нелинейную функцию, а ее статистически эквивалентное представление. Благодаря этому существенно упрощается дальнейший анализ случайных процессов и появляется возможность применения хорошо разработанного аппарата линейной статистической теории.

Определение параметров статистически линеаризованной зависимости может осуществляться различными способами. Наиболее распространенными являются два подхода, основанные на использовании различных критериев оптимальности.

Первый подход базируется на критерии совпадения основных вероятностных характеристик исходного и аппроксимирующего преобразований. В этом случае коэффициенты статистической линеаризации выбираются таким образом, чтобы математические ожидания $m(.)$ и дисперсии $D_2 = \sigma^2$ нелинейной и линейной моделей совпадали или отличались минимально.

Второй подход основан на критерии минимума среднего квадрата ошибки (СКО) аппроксимации. Согласно данному критерию, параметры линейной модели определяются из условия минимизации среднеквадратического отклонения между выходными сигналами исходного нелинейного преобразования и его статистически линеаризованного аналога. Такой подход обеспечивает наилучшее приближение нелинейной в среднеквадратическом смысле характеристики и широко применяется при анализе и синтезе нелинейных радиотехнических и информационно-измерительных систем.

2. Статистическая аппроксимация на основе первого критерия

Метод определения параметров статистической линеаризации, основанный на использовании первого критерия, в общем случае формулируется посредством выполнения двух основных условий

$$\psi_0 = M\left\{\psi\left[\mathbf{X},t\right]\right\};\quad \sum_{i,j}^{n} k_i k_j = M\left\{\left[\psi - \psi\left(\Delta\right)\right]^2\right\},$$

где математическое ожидание нелинейной характеристики определяется выражением

$$M\left\{\psi\left[\mathbf{X},t\right]\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots\ldots \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left[\mathbf{X},t\right] W\left[\mathbf{X},t\right] d\mathbf{X},$$

$$B_{ij}\left(t\right) = M\left[\mathbf{X}_i^0\left(t\right)\mathbf{X}_j\left(t\right)\right]$$

представляет собой корреляционный момент, характеризующий взаимосвязь случайных величин X_i и X_j.

В интегральной форме корреляционный момент записывается следующим образом:

$$B_{ij}\left(t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left[x_i\left(t\right) - m_{xi}\left(t\right)\right]\left[x_j\left(t\right) - m_{xj}\left(t\right)\right] W\left(x_1,\ldots,x_n,t\right) dx_1,\ldots,dx_n.$$

Здесь $\left[\mathbf{X},t\right]$ является ПРВ совокупности случайных переменных $x_1,\ldots,x_n$.

Статистические коэффициенты усиления определяются соотношением

$$k_i = \left\{\frac{D_\varphi}{B_{ij}}\left[\sum_{r,l}^{n} \frac{B_{rl}}{\sqrt{B_{rr}B_{ll}}} \operatorname{sgn}\frac{\partial\psi_0}{\partial m_{xr}} \operatorname{sng}\frac{\partial\psi_0}{\partial m_{xl}}\right]^{-1}\right\}^{0,5} \operatorname{sgn}\frac{\partial\psi_0}{\partial m_{xi}},$$

где функция sgn определяет знак действительного аргумента.

Дисперсия нелинейного преобразования вычисляется по формуле

$$D_\varphi = M\left[\left(\psi - \psi_0\right)^2\right] = M\left\{\psi\left[\mathbf{X},t\right]\right\} - \psi_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2\left(\mathbf{X},t\right) W\left(\mathbf{X},t\right) d\mathbf{X} - \psi_0^2.$$

Следует отметить, что применение многомерных ПРВ, включая двумерный случай, обеспечивает возможность исследования векторных случайных процессов. Данное обстоятельство имеет существенное значение при анализе инерционных безынерционных нелинейных преобразователей (БНП).

Рассмотрим частный случай одномерного распределения вероятностей. Предположим, что для характеристики БНП выполняются условия

$$m\left[Y_{\text{л}}(t)\right]=m\left[Y(t)\right];\quad D_2\left[Y_{\text{л}}(t)\right]=\left[Y(t)\right],$$

где

$$Y_{\text{л}}(t)=k_{01}m_x+k_{11}\left[x(t)-m_x\right].$$

При этом коэффициенты статистической линеаризации определяются выражениями

$$k_{01}=\frac{m_y}{m_x}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)W_x(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty}xW_x(x)dx},$$

$$k_{11}^2=\frac{D_{yy}}{D_{xx}}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2(x)W_x(x)dx-\left[\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)W_x(x)dx\right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty}x^2W_x(x)dx-\left[\int_{-\infty}^{\infty}xW_x(x)dx\right]^2}.$$

Отсюда следует

$$k_1=\sqrt{\frac{D_{yy}}{D_{xx}}}\operatorname{sgn}k_{01}.$$

Рассмотрим пример, в котором характеристика БНП связана с ПРВ входного негауссовского процесса следующим соотношением:

$$\psi(x)=\frac{\partial}{\partial x}\ln W_x(x)dx=\frac{W_x'(x)}{W_x(x)},$$

где штрих обозначает производную по аргументу.

В этом случае

$$k_{01}=\frac{1}{m_x}\int_{-\infty}^{\infty}W_x'(x)dx=\frac{\overline{W_x'(x)}}{m_x},$$

$$k_{11}^2=\sigma_x^2\left[I_{\Phi x}-m_y^2\right].$$

Среднее значение выходной величины определяется выражением

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \ln W_x(x) W_x(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} W_x'(x) dx = m_{x'}.$$

Здесь

$$I_{\Phi x} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x} \ln W_x(x) \right]^2 W_x(x) dx$$

представляет собой количество информации Фишера относительно плотности распределения $W_x(x)$ [14].

Следует отметить, что используемая далее черта над символом обозначает операцию усреднения по соответствующему множеству.

Таким образом, статистически линеаризованная характеристика принимает вид

$$Y_{\text{л}}(t) = \overline{W_x'(x)} + \sigma_x^{-1} \sqrt{I_{\Phi x} - \left(\overline{W_x'(x)}\right)^2} \left\{ x(t) - m_x \right\} .$$

При симметричной плотности распределения, когда $m_x = 0$, получаем более простое выражение

$$Y_{\text{л}}(t) = \sigma_x^{-1} \sqrt{I_{\Phi x}}\, x(t). \qquad (1)$$

Используя результаты работ [1, 15], введем коэффициент асимптотической относительной эффективности (КАОЭ) μ_{0A}^2, характеризующий отношение дисперсий выходного и входного процессов БНП. Тогда из выражения (1) непосредственно следует выражение для названного коэффициента $\mu_{0A}^2 = \sigma_x^2 I_{\Phi x}$, характеризующего изменение дисперсии случайного процесса на выходе БНП по отношению к его входу. Тогда из (1) найдем

$$Y_{\text{л}}(t) = \mu_{0A} x(t) \sigma_x^{-1} = \frac{\sqrt{\mu_{0A}^2}}{\sigma_x^2} x(t).$$

Далее рассмотрим особенности статистической аппроксимации, основанной на использовании второго критерия. В качестве второго критерия статистической аппроксимации используется условие минимума СКО между нелинейной характеристикой и ее линеаризованным представлением.

3. Статистическая аппроксимация на основе второго критерия

Запишем критерий минимума СКО аппроксимации в виде

$$\eta = M\left\{\left[\psi\left[\mathbf{X},t\right]-\psi_0-\sum_{i=1}^{K}k_i x_i^0\right]^2\right\}.$$

Следует отметить, что выражение, определяющее значение постоянной составляющей ψ_0, полностью совпадает с аналогичным соотношением, полученным при использовании первого критерия статистической линеаризации.

Определение коэффициентов усиления k_i сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}k_i B_{ij} = B_{\varphi j},\quad j=\overline{1,n}, \tag{2}$$

где $B_{\varphi j} = M\left[\psi X_j^v\right]$ представляют собой ковариационные моменты, характеризующие статистическую связь между выходной величиной и соответствующей компонентой входного вектора.

В интегральной форме данные величины определяются выражением

$$B_{\varphi j}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left[\mathbf{X},t\right]\left[X_j - m_{xj}(t)\right]W_1(\mathbf{X},t)\,d\mathbf{X}(t).$$

После решения системы (2) коэффициенты статистической линеаризации вычисляются по формуле

$$k_i = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\frac{\Delta_j^i}{\Delta}B_{\varphi j},\quad j=\overline{1,n},$$

Δ – определитель системы (2); Δ_j^i – алгебраическое дополнение элемента *i*-го столбца *j*-ой строки определителя Δ.

Для оценки эффективности рассматриваемого критерия рассмотрим процесс на выходе БНП, статистически линеаризованная характеристика которого задается выражением

$$Y_{\text{л}}(t) = k_{02} m_x + k_{12}\left[X(t) - m_x \right].$$

Параметры k_{02} и k_{12} определяются из условия минимизации среднеквадратического отклонения между выходным сигналом нелинейного элемента и выходом его статистически линеаризованного аналога. Данное условие эквивалентно выполнению системы

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial k_{i2}} = \frac{\partial}{\partial k_{02}} m\left[Y(t) - Y_{\text{л}}(t) \right] = 0, \quad i = 0,1.$$

Отсюда найдем

$$k_{02} = k_{01}; \quad k_{12} = \frac{D_{xy}}{D_{xx}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)(x-m) W_x(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 W_x(x) dx} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\psi(x) W_x(x) dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) W_x(x) dx \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} x W_x(x) dx \right]}{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 W_x(x) dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x W_x(x) dx \right]^2}.$$

В случае симметричного относительно начала координат распределения вероятностей, при котором математическое ожидание входного процесса равно нулю $m_x = 0$, предыдущие выражения существенно упрощаются:

$$k_{01} = k_{02} = 0; \quad k_{12} = \sigma_x^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} x\psi(x) W_x(x) dx.$$

Рассмотрим частный пример, полагая

$$\psi(x) = \frac{\partial}{\partial x} \ln W_x = \frac{W_x'(x)}{W_x(x)}.$$

В этом случае коэффициенты постоянной составляющей обращаются в нуль

$$k_{01} = k_{02} = 0,$$

а коэффициент усиления принимает вид

$$k_{12} = \sigma_x^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} x W_x'(x) dx.$$

Полученные результаты могут быть использованы при статистической линеаризации формирующего фильтра.

Пусть процесс формирования негауссовского случайного сигнала $\lambda(t)$, обладающего ПРВ $W(\lambda)$, описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ)

$$\dot{\lambda}_t = \frac{N_\lambda^2 \Omega_\lambda^2}{4} \frac{d}{d\lambda} \ln W(\lambda) + \Omega_\lambda n_\lambda .$$

Используя аппарат статистической линеаризации, данное уравнение можно представить в эквивалентной форме

$$\dot{\lambda}_t = \frac{N_\lambda^2 \Omega_\lambda^2}{4} \left\{ \overline{W'(\lambda)} + \sigma_\lambda^{-2} \left[\mu_{0A}^2 - \sigma_\lambda^2 \left(\overline{W'(\lambda)} \right)^2 \right]^{0,5} \left(\lambda(t) - m_\lambda \right) \right\} \Omega_\lambda n_\lambda(t),$$

где $$\sigma_\lambda^2 = 0,25 N_\lambda^2 \Omega_\lambda .$$

Если ПРВ является симметричной, статистически линеаризованное СДУ принимает более простой вид

$$\dot{\lambda}_t = \frac{N_\lambda^2 \Omega_\lambda^2}{4} \left\{ \frac{\mu_{0A}}{\sigma_\lambda^2} \right\} \lambda(t) + \Omega_\lambda n_\lambda(t),$$

или после преобразования

$$\dot{\lambda}_t = \Omega_\lambda \lambda(t) \mu_{0A} + \Omega_\lambda n_\lambda(t). \qquad (3)$$

Нетрудно заметить, что при значении коэффициента асимптотической относительной эффективности $\mu_{0A} = 1$ выражение (3) полностью совпадает со СДУ, описывающим гауссовский случайный процесс [4].

Полученные результаты позволяют перейти к рассмотрению взаимосвязи метода статистической линеаризации с аппаратом кумулянтов и проанализировать общие закономерности их применения при исследовании нелинейных стохастических систем (НСС).

4. Анализ нелинейных систем с использованием метода кумулянтов

Для упрощения дальнейших рассуждений ограничимся рассмотрением одномерной (скалярной) постановки задачи.

Предположим, что динамическая система, возбуждаемая белым гауссовским шумом $n_\delta(t)$, описывается СДУ

$$\dot{\lambda}_t = f(t,\lambda_t) + q(t)n_\delta(t), \tag{4}$$

где функции $f(t,\lambda_t)$ и $q(t)$ являются детерминированными и полностью определяются своими аргументами.

Предполагается, что ПРВ начального состояния $W_0(t_0,\lambda)$ известна. Требуется определить первые k центральных моментов исследуемого случайного процесса:

$$m_1(t) = M\lambda_t; \quad m_k(t) = M\left[\lambda_t - m_1(t)\right]^k, \quad k = \overline{2,l}.$$

При исследовании замкнутых нелинейных систем, описываемых уравнением (4), удобно применять аппарат кумулянтов (семиинвариантов) [16]. Соответствующая система дифференциальных уравнений выводится из уравнения для логарифма характеристической функции случайного процесса.

Основным достоинством данного подхода является возможность существенного сокращения числа учитываемых параметров в случае, когда ПРВ $W(t,\lambda)$ близка к гауссовской. В подобных условиях старшие кумулянты имеют малые значения и их влиянием можно пренебречь. Для нормального распределения все кумулянты, начиная с третьего порядка, тождественно равны нулю.

Известно, что k-ый кумулянт случайной величины, обладающей характеристической функцией $f(z)$, определяется выражением

$$\dot{u}_k = (-i)^k \left.\frac{\partial^k \psi(z)}{\partial z^k}\right|_{x=0},$$

где $$\psi(z)=\ln W(z)=\ln\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{iz\lambda\}W(\lambda)d\lambda.$$

Соответственно для случайного процесса λ_t в произвольный момент времени получаем

$$\dot{u}_k(t)=(-i)^k\left.\frac{\partial^k\psi(t,z)}{\partial z^k}\right|_{x=0}, \quad (5)$$

где $$\psi(t,z)=\ln W(t,z)=\ln\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{iz\lambda\}W(t,\lambda)d\lambda.$$

Согласно результатам работы [17] характеристическая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial W(t,z)}{\partial t}=iz\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{iz\lambda\}f(t,\lambda)W(t,\lambda)d\lambda-\frac{1}{2}g^2(t)z^2W(t,\lambda).$$

Поскольку

$$\frac{\partial\psi(t,z)}{\partial t}=\frac{1}{W(t,z)}\frac{\partial W(t,z)}{\partial t},$$

получаем

$$\frac{\partial\psi(t,z)}{\partial t}=\exp\{-\psi(t,z)\}iz\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{iz\lambda\}f(t,\lambda)W(t,\lambda)d\lambda-\frac{1}{2}g^2(t)z^2. \quad (6)$$

Последовательное дифференцирование выражения (6) по переменной (z) с использованием определения (5) приводит к системе дифференциальных уравнений для первых четырех кумулянтов:

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t,\lambda) W(t,\lambda) d\lambda; \\
\dot{u}_2 &= 2\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \dot{u}_1) f(t,\lambda) W(t,\lambda) d\lambda + g^2(t); \\
\dot{u}_3 &= 2\int_{-\infty}^{\infty} \left[(\lambda - \dot{u}_1)^2 - \dot{u}_2 \right] f(t,\lambda) W(t,\lambda) d\lambda; \\
\dot{u}_4 &= 2\int_{-\infty}^{\infty} \left[(\lambda - \dot{u}_1)^3 - 3\dot{u}_2 (\lambda - \dot{u}_1) - \dot{u}_3 \right] f(t,\lambda) W(t,\lambda) d\lambda.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Следует подчеркнуть, что для негауссовских ПРВ $W(t,\lambda)$ система уравнений для кумулянтов, вообще говоря, является бесконечной. Каждое уравнение содержит величины более высоких порядков, вследствие чего возникает необходимость использования приближенных методов замыкания. Наиболее распространенным является предположение $\lambda_{m+1} = \ldots \lambda_{m+2} = 0$, что соответствует гипотезе о несущественном влиянии высших кумулянтов на динамику первых моментов распределения.

В случае, когда нелинейная функция допускает представление

$$f(t,\lambda) = k(t)\varphi(\lambda, t),$$

процедура вычисления существенно упрощается. Как показано в работе [17], после аппроксимации функции $\varphi(\lambda)$ с требуемой точностью интегралы, входящие в выражения (7), могут быть вычислены аналитически либо значительно упрощены.

Другим эффективным способом получения замкнутой системы является разложение ПРВ по ряду Эджворта [1, 5, 18, 19], коэффициенты которого непосредственно выражаются через кумулянты процесса:

$$W(t,\lambda) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(\lambda - \dot{u}_1)^2}{2\sigma^2} \right\} \left[1 + \frac{1}{6}\frac{\dot{u}_3}{\sigma^3} H_3\left(\frac{\lambda - \dot{u}_1}{\sigma} \right) + \frac{1}{24}\frac{\dot{u}_4}{\sigma^4} H_4\left(\frac{\lambda - \dot{u}_1}{\sigma} \right) \right], \tag{8}$$

где $\dot{u}_k$ – k-й семиинвариант случайной величины λ_t;

$H_k(z)=(-1)^k \exp\left(\frac{z^2}{2}\right)\frac{d^k}{dz^k}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$ – одномерные полиномы Эрмита [20].

После подстановки выражения (8) в систему (7) введем обозначение

$$L_k = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\sigma z + \grave{u}_1\right) z^k W^*(z)\, dz, \tag{9}$$

где

$$W^*(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\};\quad \sigma^2=\grave{u}_2;\quad z=\frac{\lambda-\grave{u}_1}{\sigma}.$$

В результате получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений:

$$\grave{u}_{1t}=\sigma\left\{L_0+\frac{1}{6}\frac{\grave{u}_3}{\sigma^3}\left(L_3-3L_1\right)+\frac{1}{24}\frac{\grave{u}_4}{\sigma^4}\left(L_4-6L_2+3L_3-3L_0\right)\right\};$$

$$\grave{u}_{2t}=2\sigma^2\left\{L_1+\frac{1}{6}\frac{\grave{u}_3}{\sigma^3}\left(L_4-3L_2\right)+\frac{1}{24}\frac{\grave{u}_4}{\sigma^4}\left(L_5-6L_3+3L_1\right)\right\}+g^2(t);$$

$$\grave{u}_{3t}=3\sigma^2\left\{L_2-L_0+\frac{1}{6}\frac{\grave{u}_3}{\sigma^3}\left(L_5-4L_3+3L_1\right)+\frac{1}{24}\frac{\grave{u}_4}{\sigma^4}\left(L_6-7L_4+9L_2-3L_0\right)\right\};$$

$$\grave{u}_{4t}=4\sigma^2\left\{L_3-3L_1+\frac{1}{6}\frac{\grave{u}_3}{\sigma^3}\left[-6L_0+L_0-6L_4+9L_2+\grave{u}_3\left(3L_1-L_3\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{24}\frac{\grave{u}_4}{\sigma^4}\left[L_7-9L_5+21L_{23}-9L_1-\frac{\grave{u}_3}{\sigma^3}\times\times\left(3L_0+6L_2-L_4\right)\right]\right\}.$$

Полученная система уже не содержит неизвестных кумулянтов более высокого порядка и поэтому является замкнутой. Ее решение при начальных условиях $\grave{u}_k(0)=\grave{u}_k(t)\big|_{t=0}$ позволяет определить приближенные значения первых четырех кумулянтов исследуемого случайного процесса, что обеспечивает эффективный анализ НСС при умеренных отклонениях распределения вероятностей от нормального закона.

В качестве иллюстрации применения выражения (9) рассмотрим вычисление интегралов L_k для нелинейных характеристик, представленных на рис. 1.

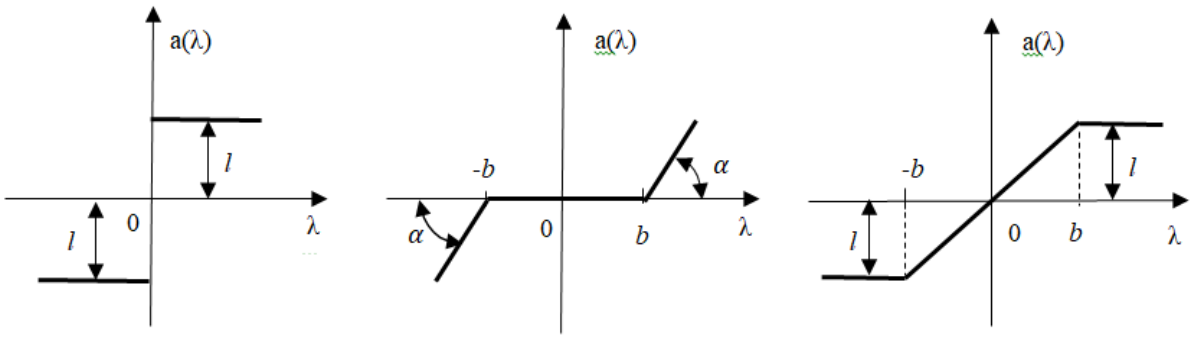


Рис. 1. Внешний вид характеристики $a(\lambda)=f(\lambda)$, где: а – $a(\lambda)=f_1(\lambda)$;

б – $a(\lambda)=f_2(\lambda)$; в – $a(\lambda)=f_3(\lambda)$.

Вначале проанализируем следующую характеристику

$$a(\lambda)=f_1(\lambda)=\operatorname{sgn}\lambda=\begin{cases} l, & \lambda>0;\\ 0, & \lambda=0;\\ -l, & \lambda<0, \end{cases}$$

графическое представление которой приведено на рис. 1, *а*.

Данная нелинейная зависимость соответствует релейной характеристике симметричного типа, принимающей два фиксированных уровня, противоположных по знаку относительно начала координат. Благодаря своей простоте она широко применяется при исследовании НСС и служит удобным примером для анализа кумулянтных методов. Используя определение интегралов L_k, приведенное в выражении (9), можно получить аналитические зависимости, характеризующие влияние данной нелинейности на статистические свойства исследуемого случайного процесса.

Для дальнейших преобразований введем следующие обозначения:

$$\rho=\frac{\dot{u}_1}{\sigma};\quad \varphi_0=\sigma^{-1}\Phi(\rho)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-0{,}5z^2\right\}dz.$$

Тогда значения интегралов L_k, определяемых выражением (9), для рассматриваемой характеристики принимают вид

$$L_0 = l\varphi_0;$$

$$L_1 = \frac{2l}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-0,5\rho^2\right\};$$

$$L_2 = l\left(\varphi_0 - \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-0,5\rho^2\right\}\right);$$

$$L_3 = \frac{2l}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(2+\rho^2\right)\exp\left\{-0,5\rho^2\right\};$$

$$L_4 = l\left[3\varphi_0 - \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(3+\rho^3\right)\exp\left\{-0,5\rho^2\right\}\right].$$

Далее рассмотрим вторую нелинейную характеристику

$$a(\lambda) = f_2(\lambda) = \begin{cases} \beta\lambda + b, & \lambda \geq b; \\ 0, & -b < \lambda < b; \\ \beta\lambda - b, & \lambda \leq -b, \end{cases}$$

график которой приведен на рис. 1, *б*, где $\beta = \mathrm{tg}\alpha$.

Для упрощения последующих преобразований введем обозначения

$$a_1 = \left(b + \dot{U}_1\right)/\sigma; \quad a_2 = \left(b - \dot{U}_1\right)/\sigma;$$
$$\varphi_0 = 0,5\left[a_1 - a_2 - a_1\Phi(a_1) + a_2\Phi(a_2)\right];$$
$$\varphi_1 = 0,5\left[2 - \Phi(a_1) - \Phi(a_2)\right],$$

а также функции

$$f_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-a_1^k\exp\left\{-\dfrac{1}{2}a_1^2\right\} + a_2^k\exp\left\{-\dfrac{1}{2}a_2^2\right\}\right], & k = 2n, \quad n = 0,1,\ldots 5; \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[a_1^k\exp\left\{-\dfrac{1}{2}a_1^2\right\} + a_2^k\exp\left\{-\dfrac{1}{2}a_2^2\right\}\right], & k = 2n+1, \quad n = 0,1. \end{cases}$$

При использовании указанных обозначений интегралы принимают следующий вид:

$$L_0 = \beta\left(\varphi_0 + f_0\right); \quad L_1 = \beta\varphi_1; \quad L_2 = \beta\left(\varphi_0 + 2f_0\right); \quad L_3 = \beta\left(3\varphi_1 - f_1\right);$$
$$L_4 = \beta\left(3\varphi_0 - 8f_0 + f_2\right).$$

Рассмотрим также третью нелинейную характеристику

$$a(\lambda) = f_3(\lambda) = \begin{cases} l, & \lambda > b; \\ \lambda, & -b \le \lambda \le b; \\ -l, & \lambda < -b, \end{cases}$$

изображенную на рис. 1, *в*.

Для данной характеристики введем параметры

$$\beta = 1/b; \quad a_1 = (b + \lambda_1)/\sigma; \quad a_2 = (b - \lambda_1)/\sigma;$$
$$\varphi_0 = 0{,}5\left[a_1 \Phi(a_1) - a_2 \Phi(a_2)\right]; \quad \varphi_1 = 0{,}5\left[\Phi(a_1) + \Phi(a_2)\right],$$

а также функции

$$f_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[a_1^k \exp\left\{-\dfrac{1}{2}a_1^2\right\} - a_2^k \exp\left\{-\dfrac{1}{2}a_2^2\right\}\right], & k = 2n, \quad n = 0{,}1{,}\ldots 5; \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[a_1^k \exp\left\{-\dfrac{1}{2}a_1^2\right\} + a_2^k \exp\left\{-\dfrac{1}{2}a_2^2\right\}\right], & k = 2n+1, \quad n = 0{,}1. \end{cases}$$

Вычисление интегралов L_k для данной нелинейной характеристики осуществляется аналогично предыдущему случаю посредством использования выражения (9). Такой подход обеспечивает единый алгоритм определения коэффициентов, входящих в систему дифференциальных уравнений метода кумулянтов.

Полученные результаты позволяют перейти к исследованию взаимосвязи метода кумулянтов с методом статистической линеаризации и установить общие закономерности их применения при анализе НСС.

5. Связь метода кумулянтов со статистической линеаризацией

Покажем взаимосвязь между методом статистической линеаризации и методом кумулянтов, применив процедуру статистической линеаризации к СДУ (4). После выполнения линеаризации исходная модель может быть представлена в виде

$$\dot{\lambda}_t = k_0(t) + k_1(t)\hat{\lambda}_t + b(t)n_\delta(t),$$

где коэффициенты $k_0(t)$ и $k_1(t)$ выберем из условия максимума математического ожидания

$$M\left\{\left[a\left(t,\hat{\lambda}_t\right)-k_0(t)+k_1(t)\hat{\lambda}_t\right]^2\right\}=M\left\{\varepsilon^2\right\}. \quad (10)$$

Здесь $\hat{\lambda}$ – оценка случайного процесса; $a\left(t,\hat{\lambda}_t\right)$ и $b(t)$ – соответственно, коэффициенты сноса и диффузии; ε – заданная погрешность.

Очевидно, что вычисление математического ожидания в выражении (10) требует задания ПРВ процесса $\lambda(t)$. В дальнейшем ограничимся гауссовской аппроксимацией, сохранив в разложении (8) только первый член, что соответствует нормальному закону распределения.

Необходимые условия экстремума функционала (10) имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial k_0}M\left\{\varepsilon^2\right\}=0;\quad \frac{\partial}{\partial k_1}M\left\{\varepsilon^2\right\}=0.$$

После выполнения соответствующих преобразований получаем

$$k_0^*(t)+k_1^*(t)\hat{u}_1=Ma\left(t,\hat{\lambda}_t\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{u}_2}}\int_{-\infty}^{\infty}a(t,\lambda)\exp\left\{-\frac{\left(\lambda-\hat{u}_1\right)^2}{2u}\right\}d\lambda;$$

$$k_1^*(t)=\frac{1}{\hat{u}_2}M\left\{(\lambda-u_1)a(t,\lambda)\right\}==\frac{1}{\hat{u}_2}\int_{-\infty}^{\infty}a(t,\lambda)\frac{\lambda-\hat{u}_1}{\sqrt{2\pi\hat{u}_2}}\exp\left\{-\frac{\left(\lambda-\hat{u}_1\right)^2}{2\hat{u}_2}\right\}d\lambda.$$

Следовательно, величины $k_0^*(t)$ и $k_1^*(t)$ являются оптимальными коэффициентами статистической линеаризации, обеспечивающими минимум функционала (10).

Используя найденные коэффициенты, можно записать систему дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию математического ожидания и дисперсии процесса:

$$\frac{\partial\hat{u}_1}{\partial t}=k_0^*(t)+\hat{u}_1k_1^*(t);\quad \frac{\partial\hat{u}_2}{\partial t}=2k_1^*(t)\hat{u}_2+b^2(t).$$

Подставляя в эти уравнения найденные значения коэффициентов статистической линеаризации, получаем

$$\hat{\dot{u}}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} a(t,\lambda) N\left(\hat{\dot{u}}_1, \dot{u}_2\right) d\lambda = -\hat{\sigma} L_0;$$

$$\hat{\dot{u}}_2 = 2\int_{-\infty}^{\infty} \left(\lambda - \hat{\dot{u}}_1\right) a(t,\lambda) N\left(\dot{u}_1, \hat{\dot{u}}_2,\right) d\lambda + b^2(t) = -2\hat{\sigma}^2 L_1;$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\dot{u}}_2}.$$

Нетрудно установить, что полученная система представляет собой частный случай общей системы дифференциальных уравнений для кумулянтов (7), если принять $\hat{\dot{u}}_3 = \hat{\dot{u}}_4 = 0$.

Данное предположение эквивалентно гауссовской аппроксимации случайного процесса, при которой кумулянты третьего и более высоких порядков отсутствуют.

Таким образом, проведенный анализ показывает, что метод статистической линеаризации можно рассматривать как частный случай метода кумулянтов. Фактически статистическая линеаризация соответствует усечению общей системы уравнений по кумулянтам до первых двух порядков, что обеспечивает существенное упрощение вычислительных процедур при сохранении приемлемой точности анализа процессов, распределение которых близко к нормальному.

6. Сравнительная оценка методов анализа

Для сопоставления эффективности рассмотренных методов выполним их сравнительный анализ на примере НСС, динамика которой описывается уравнением

$$\dot{y} = -l \operatorname{sgn} y + n(t); \quad y(0) = y_0; \quad m_0 = 0, \tag{11}$$

где $n(t)$ представляет собой белый стационарный шум с нулевым математическим ожиданием $m_n = 0$ и спектральной плотностью N_n^2.

Требуется определить стационарную ПРВ $W(y)$. Для решения поставленной задачи воспользуемся несколькими приближенными методами анализа и сравним полученные результаты.

Вначале применим метод статистической линеаризации, ограничившись гауссовским приближением ПРВ.

Поскольку начальное математическое ожидание и среднее значение входного шума равны нулю ($m_0 = 0$, $m_n = 0$), нелинейную характеристику $l\,\mathrm{sgn}\,y$ можно заменить статистически эквивалентной линейной зависимостью

$$\varphi(y) = k_1 + \psi(y),$$

где $k_1 = k_1^{(2)} = \dfrac{2l\,\mathrm{sgn}\,y\left(-\dfrac{m_y^2}{2\sigma_y^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} = \dfrac{2l}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}}$ – коэффициент линеаризации при использовании второго критерия оптимизации, или

$k_1^{(2)} = 1/\sqrt{\sigma_y^2}\left[1 - 4\Phi^2\left(m_y/\sqrt{\sigma_y^2}\right)\right]^{0,5} = \dfrac{l}{\sigma_y}$ – при использовании первого критерия.

Здесь $\Phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z \exp\left\{-0,5t^2\right\}dt$; m_y – математическое ожидание; σ_y^2 – дисперсия случайного процесса $y(t)$;

$$\psi(y) = l\,\mathrm{sgn}\,l - k_1 y = 2l\Phi\left(\frac{m_y}{\sigma_y}\right).$$

После статистической линеаризации уравнение (11) примет вид

$$\dot{y}_t = -\psi\left(m_y, \sigma_y\right) - k_1\left(m_y, \sigma_y\right)(y - m) + n_t; \quad y(0) = y_0.$$

В общем случае параметры процесса определяются системой

$$\dot{m}_y = \varphi_0\left(m, \sigma^2\right); \qquad m(0) = m_0;$$
$$\dot{\sigma}_y^2 = -2k_1\left(m, \sigma^2\right)\sigma^2 + N_n^2; \quad \sigma^2(0) = \sigma_0^2.$$

Поскольку рассматриваемая система симметрична и $m=0$, то и математическое ожидание сохраняет нулевое значение на всем интервале времени $m(t)=0.$

Вследствие этого уравнение для дисперсии принимает более простой вид

$$\dot{\sigma}_y^2 = -2k_1\sigma_y^2 + N_n^2; \quad \sigma^2(0)=\sigma_0^2.$$

В стационарном режиме

$$\sigma_y^2 = N_n^2 / 2k_1 .$$

Учитывая, что $k_1 = l/\sqrt{\sigma^2}$ получаем, что

$$\sigma_y = N_\lambda^2 / 2l; \quad k_1 = 2l^2 / N_\lambda^2 .$$

Следовательно, при использовании первого критерия статистической аппроксимации в гауссовском приближении ПРВ определяется выражением

$$W_y^I(y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right\} = \frac{2l}{\sqrt{2\pi}N_\lambda^2}\exp\left\{-\frac{2y^2l^2}{N_\lambda^4}\right\} = 0{,}8\frac{l}{N_\lambda^2}\exp\left\{-\frac{2y^2l^2}{N_\lambda^4}\right\}. \quad (12)$$

Для установившегося режима, когда $t\to\infty$, при $l=1;\ N_\lambda^2=2$, ПРВ (12) будет описываться выражением

$$W_y(y,\infty) = 0{,}4\exp\left\{-0{,}5y^2\right\}. \quad (13)$$

Соответствующая зависимость представлена на рис. 2 пунктирной кривой 1.

В соответствии с результатами работы [12] точное стационарное решение имеет вид

$$W_{y.T}(y,\infty) = \frac{l}{N_\lambda^2}\exp\left\{-\frac{2l}{N_\lambda^4}|y|\right\} = \frac{1}{2}\exp\{-|y|\}. \quad (14)$$

График данной плотности распределения приведен на рис. 2 сплошной кривой 2.

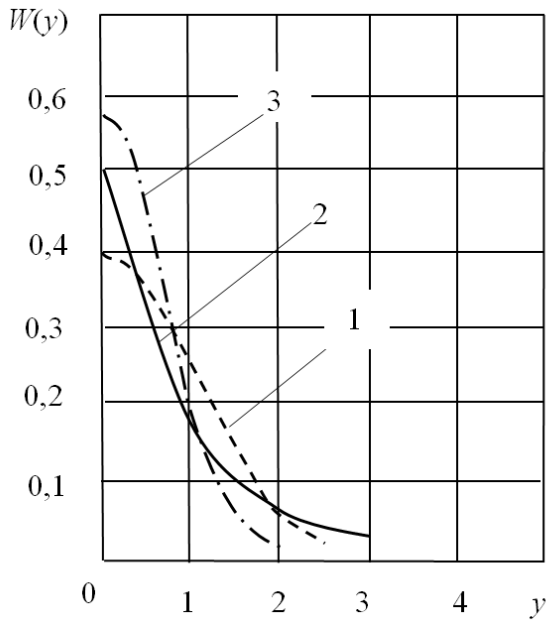


Рис. 2. ПРВ, построенные по выражениям: 1 – (13); 2 – (14); 3 – (15).

В качестве второго приближенного метода рассмотрим статистическую аппроксимацию, использующую КАОЭ μ_{0A}^2.

В этом случае коэффициент статистической линеаризации определяется выражением

$$k_1 = \frac{l}{\sigma}\mu_{0A} = \sqrt{2}\frac{l}{\sigma},$$

а соответствующая ему дисперсия

$$\sigma_y = \frac{N_\lambda^2}{2k_1} = \frac{N_\lambda^2}{2l\mu_{0A}} = \frac{N_\lambda^2}{2\sqrt{2}l}.$$

Для установившегося режима, при тех же значениях l и N_λ^2, подставляя σ_y в выражение (11), найдем ПРВ:

$$W_y^{II} = 0{,}564\exp\left\{-2y^2\right\}. \qquad (15)$$

Соответствующая кривая изображена на рис. 2 штрихпунктирной линией 3.

Сопоставление зависимостей (13)–(15), представленных на рис. 2, позволяет оценить точность различных способов статистической аппроксимации. Анализ показывает, что использование коэффициента

асимптотической относительной эффективности обеспечивает более близкое соответствие приближенного решения точной ПРВ по сравнению с классической гауссовской статистической линеаризацией, тогда как точное решение служит эталоном для оценки качества рассматриваемых методов.

Заключение

В работе исследован метод статистической линеаризации, предназначенный для построения вероятностной аппроксимации нелинейных безынерционных преобразований линейными зависимостями. Основной принцип данного подхода заключается в выборе параметров линеаризованной модели таким образом, чтобы ее статистические характеристики были максимально близки к соответствующим характеристикам исходного нелинейного преобразования. В качестве основных критериев близости рассматриваются математическое ожидание, дисперсия и корреляционные свойства исследуемых случайных процессов.

Выполнен анализ двух наиболее распространенных способов определения коэффициентов статистической линеаризации. Первый подход основан на обеспечении совпадения математических ожиданий и дисперсий исходной нелинейной функции и ее линейной аппроксимации. Второй использует критерий минимума среднеквадратической ошибки, что позволяет получить оптимальные параметры линеаризации в смысле наименьшего среднего квадрата отклонения между исходной и аппроксимирующей зависимостями.

На основе гауссовского приближения и рассмотренных критериев статистической линеаризации получены аналитические выражения для плотностей распределения вероятности негауссовских случайных процессов в установившемся режиме. Проведенное сравнение приближенных решений с эталонным распределением позволило оценить область применимости каждого из рассмотренных способов аппроксимации и установить особенности их использования при анализе нелинейных стохастических систем.

Отдельное внимание уделено исследованию взаимосвязи метода статистической линеаризации с методом кумулянтов. Выполненный анализ показал, что статистическая линеаризация может рассматриваться как частный случай метода семиинвариантов, соответствующий ограничению описания случайного процесса первыми двумя кумулянтами. Это подтверждает единство рассматриваемых подходов и позволяет использовать аппарат кумулянтов как более общий инструмент исследования НСС, включающий метод статистической линеаризации в качестве одного из частных случаев.

Финансирование: Работа выполнена за счет средств Государственного задания №FSFZ -2024-0006.

Литература

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Сов. радио, 1974. – 552 с.
2. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника; 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Сов. радио, 1982. – 624 с.
3. Акимов П.С. и др. Теория обнаружения сигналов. – 1984.
4. Тихонов В.И., Кульман Н.К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. – М.: Сов. радио, 1975.
5. Кремер И.Я., Владимиров В.И., Карпухин В.И. Модулирующие (мультипликативные) помехи и прием радиосигналов. – Сов. радио, 1972.
6. Артюшенко В.М., Воловач В.И. Анализ эффективности гауссовского обнаружителя сигнала со случайной фазой при воздействии негауссовских помех // Журнал радиоэлектроники. – 2025. – № 7. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.6.7
7. Dong X. et al. Rapid identification and spectral moment estimation of non-Gaussian weather radar signal // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – 2022. – Т. 60. – С. 1-12. https://doi.org/10.1109/TGRS.2022.3168153

8. Zhao Z., Liu P.X., Gao J. Fault detection for non-Gaussian stochastic distribution systems based on randomized algorithms // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – 2022. – Т. 71. – С. 1-9. https://doi.org/10.1109/TIM.2022.3192829
9. Акиншин Н.С., Быстров Р.П., Румянцев В.Л. Обобщенная модель радиолокационных стационарных негауссовых сигналов // Журнал радиоэлектроники. – 2011. – №. 12.
10. Болдин А.В. и др. Статистические характеристики смесей негауссовского радиолокационного сигнала и негауссовской помехи // Журнал радиоэлектроники. – 2011. – №. 11.
11. Артюшенко В.М., Воловач В.И. Применение метода статистической линеаризации для описания сигналов и помех с негауссовским характером распределения // Радиотехника. – 2019. – №. 1. – С. 34-43. https://doi.org/10.18127/j00338486-201901-04
12. Казаков И.Е., Мальчиков С.В. Анализ статистических систем в пространстве состояний. – М.: Радио и связь, 1986.
13. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, 1985.
14. Nielsen J., Nielsen C. Assessment of Receiver Signal Strength Sensing for Location Estimation Based on Fisher Information // Sensors. – 2016. – Т. 16. – №. 10. – С. 1570. https://doi.org/10.3390/s16101570
15. Коржик В.И., Щелкунов К.Н., Финк Л.М. Расчет помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений: Справочник. – Радио и связь, 1981.
16. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – 1978.
17. Дашевский М.Л. Приближенный анализ точности нестационарных нелинейных систем методом семиинвариантов // Autom. Remote Control. – 1967. – Т. 1673. – С. 1690.

18. Artyushenko V.M., Volovach V.I., Budilov V.N. Statistical Characteristics of the Signal Distribution at the output of the Linear Filter in the Presence of Fluctuating Modulating Noise // 2020 Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies (MWENT). – IEEE, 2020. – С. 1-6. https://doi.org/10.1109/MWENT47943.2020.9067454
19. Артюшенко В.М., Воловач В.И. Анализ влияния флуктуационных модулирующих помех на статистические характеристики распределения выходного сигнала линейного фильтра // Журнал радиоэлектроники. – 2020. – №. 7. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.7.12
20. Смирнов В.И. Курс высшей математики.Т. 3. Ч. 2. – М.: Наука, 1974.

Для цитирования:

Артюшенко В.М., Воловач В.И. Статистическая линеаризация и метод кумулянтов при анализе нелинейных стохастических систем // Журнал радиоэлектроники. – 2026. – №. 9. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.9.3