DOI: https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.10.3

УДК: 621.396

Компьютерное моделирование реконструкции сплошных лакун на изображениях без информационных потерь

А.В. Кокошкин

ФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН,
Россия, Фрязино

Статья поступила в редакцию 20 октября 2026 г.

Аннотация. С помощью компьютерного моделирования в работе обозначены условия, при которых принципиально возможна реконструкция данных в сплошных лакунах на изображениях. Для изображений, искаженных аппаратной функцией необходимо точное знание информации о функции размытия точки и полосе пропускания регистрирующей сигнал системы. Показано, что при сознательном ограничении спектра и при соблюдении определенных условий, теоретически возможно восстановить содержимое сплошных лакун без информационных потерь.

Ключевые слова: обработка изображений, ограничения спектра, восстановление утерянных данных без потерь.

Финансирование: Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

Автор для переписки: Кокошкин Александр Владимирович, shvarts65@mail.ru

Введение

Задача восстановления сигналов с лакунами (пропусками данных) является классической и чрезвычайно актуальной как для одномерных сигналов, так и для двумерных [1-7]. Она возникает везде, где физические ограничения, сбои оборудования или особенности каналов связи приводят к потере фрагментов информации. Методологии реконструкции лакун для одномерных и двумерных сигналов имеют много общего, но в двумерном случае добавляется фактор пространственной связности. В этой работе показано что, при соблюдении определенных условий, можно восстановить содержимое сплошных лакун без информационных потерь. Рисунки в предлагаемой работе приводятся в «градациях серого» (Grayscale). Это шкала цветов от черного до белого, где каждый оттенок показывает уровень яркости. В стандартном 8-и битном цифровом режиме для каждого пикселя есть 256 разных вариантов серого цвета.

1. Реконструкция сплошных лакун на изображениях искаженных дефокусировкой или смазом

Если использовать информацию о параметрах аппаратной функции (АФ) – технических характеристиках измерительного устройства, с помощью которого получены данные, то можно улучшить результаты по восстановлению содержимого лакун. В [8] предполагалось, что получение данных дистанционного зондирования моделируется с помощью АФ (S = 10 пикселей). Задача состояла в восстановлении разрешения искаженного дефокусировкой или смазом изображений по неполным данным (лакуна на искаженном изображении). Это было принципиально возможно, поскольку аппаратная функция (функция размытия точки), размывает в пределах ширины искажения информацию о каждом пикселе изображения. Лакуна ретушировалась с помощью разных видов интерполяции – линейной, сплайн и метода интерполяции последовательно вычисляемого спектра Фурье (МИПВС) [5]. Для реконструкции применялся известный метод деконволюции – Фильтр Винера (ФВ). Анализ качества восстановления позволяет утверждать,

что использование МИПВС для заполнения отсутствующих фрагментов является либо предпочтительным, либо не менее конкурентоспособным, чем альтернативные методы [8]. Если лакуна не больше ширины функции размытия точки (АФ), то такой подход не интерполирует, а реконструирует утерянные данные. Рис. 1в из [8] демонстрирует фрагмент дефокусированного тестового аэрокосмического изображения 90 на 90 пикселов с лакуной 30 на 30 пикселов внутри. Восстановленного с помощью Фильтра Винера рисунка 2в с лакуной, заполненной с помощью МИПВС показано на рис. 1е. Сравнительный анализ показывает явное преимущество метода интерполяции последовательно вычисляемого спектра Фурье над линейной (рис. 1г) и сплайн (рис. 1д) интерполяциями.

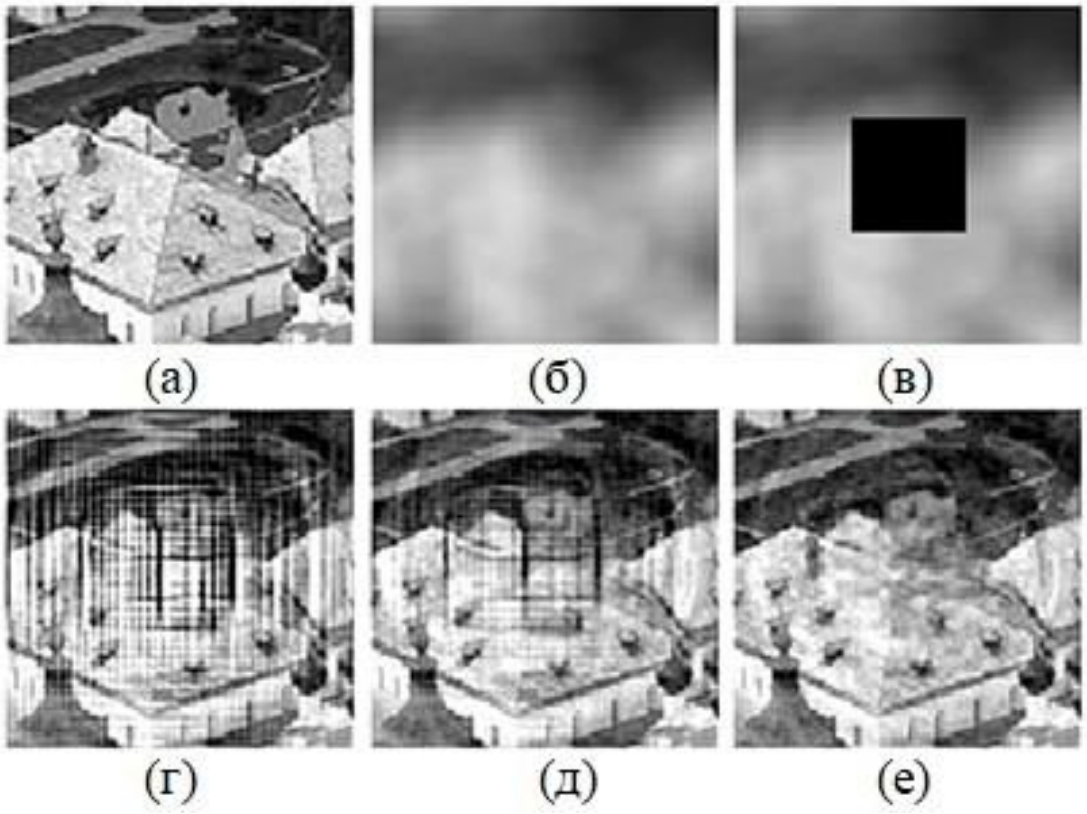


Рис. 1. [8] Фрагменты размером 90 на 90 пикселов: (а) – исходного тестового аэрокосмического изображения; (б) – дефокусированного изображения рис. 2а (S = 10 пикселей); (в) – изображения 2б с отсутствующим фрагментом 30 на 30 пикселов (черный цвет); (г) – восстановленного с помощью Фильтра Винера рисунка 2в с лакуной заполненной с помощью линейной интерполяции; (д) – восстановленного с помощью Фильтра Винера рисунка 2в с лакуной заполненной с помощью сплайн интерполяции; (е) – восстановленного с помощью Фильтра Винера рисунка 2в с лакуной заполненной с помощью МИПВС.

2. Реконструкция сплошных лакун на изображениях с сознательно ограниченным спектром

Если попытаться восстановить не размытое, а четкое изображение (с автокорреляционной функцией шириной в единицы пикселей), то реконструировать с помощью МИПВС получится только узкую кайму внутри лакуны. Естественным образом возникает вопрос об условиях, при которых принципиально возможна, реконструкция сплошных лакун на изображениях. В этом контексте используется реализация алгоритма основанного на преднамеренном ограничении спектра. Это создает некую «информационную избыточность», которая, при определенных условиях, позволяет реконструировать данные в сплошной лакуне. В спектрально ограниченном сигнале «каждая его часть содержит информацию обо всем сигнале» [9, 10].

Матрица дискретного преобразования Фурье (ДПФ) в тригонометрическом виде состоит из вещественных коэффициентов синусов и косинусов, которые разделяют исходный сигнал на ортогональные гармонические составляющие.

Для вещественного сигнала длины N матрица тригонометрического ДПФ F преобразует вектор отсчетов X в вектор коэффициентов косинусов и синусов Y. Она имеет размер $N \times N$. Каждая строка матрицы соответствует определенной частоте k (где $k = 0, 1, \ldots, N/2$), а столбцы – моментам времени n ($n = 0, 1, \ldots, N\text{-}1$).

Элементы матрицы задаются следующими формулами (без учета нормировочных коэффициентов):

Четные строки (косинусные компоненты):

$$F_{2k,n} = \cos\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}\right)$$

Нечетные строки (синусные компоненты):

$$F_{2k+1,n} = \sin\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}\right)$$

Для сигнала из N точек (предположим, N четное), базис состоит из:

- Постоянной составляющей ($k = 0$): строка косинуса из одних единиц, строка синуса из нулей).
- Пар косинусов и синусов для частот $k = 1, 2, \ldots, N/2\text{-}1$.
- Частоты Найквиста ($k = N/2$: только косинусная компонента, так как $\sin(\pi n) = 0$).

Система уравнений в матричном виде выглядит так:

$$Y = F \cdot X \tag{1}$$

где: X – вектор-столбец исходного сигнала размера $N \times 1$; Y – вектор-столбец тригонометрических коэффициентов Фурье (амплитуды косинусов и синусов) размера $N \times 1$; F – **тригонометрическая матрица базиса** размера $N \times N$.

При работе с пропусками (пропущенными отсчетами) классическое умножение на матрицу Фурье становится некорректным. Поэтому, в случае набора данных с лакуной, вместо прямого проецирования сигнала на жесткую матрицу, мы формулируем задачу как аппроксимацию имеющихся данных.

Если прямое преобразование раскладывает сигнал длины N на косинусные коэффициенты и синусные коэффициенты, то обратное преобразование собирает сигнал X обратно:

$$X = F^{-1} \cdot Y, \tag{2}$$

где F^{-1} – **обратная тригонометрическая матрица базиса** размера $N \times N$.

Если известны только M отсчетов сигнала из N (где $M < N$), мы можем составить систему уравнений только для известных точек.

Так как строк меньше, чем столбцов $M < N$, система недоопределена. Чтобы решить ее, вводится ограничение на спектр (фильтр обнуляет высокие частоты после заданного порога N_S).

В связи с этим надо удалить часть строк в матрице F^{-1} (соответствующих лакуне). Если удалить также и часть столбцов, соответствующих введенному в спектр ограничению (частоты с амплитудой равной нулю), то (2) будет эквивалентна системе линейных уравнений количеством $N - M$.

Если количество уравнений не меньше количества неизвестных, то можно вычислить спектр низкочастотного сигнала и восстановить сигнал в лакуне с помощью (2). Таким образом, демонстрируется принципиальная возможность восстановления изображения с лакунами, при условии $N - N_L \geq 2N_S$, где N – размер сигнала, N_L – величина лакуны и N_S – общее известное количество компонент спектра, у которых амплитуда не равна нулю.

Как классический подход при решении подобной задачи используют метод наименьших квадратов. В предложенной работе для такой системы уравнений использовано сингулярное разложение (*SVD* – Singular Value Decomposition [11]).

Для работы используем фрагмент общедоступного изображения актрисы Николь Кидман (источник https://vk.ru/wall-59245439_1217550). Образец отформатирован и обрезан до размера $N \times N$ (256 на 256 пикселей). На рис. 2 представлено тестовое изображение до – рис. 2а и после – рис. 2б спектрального ограничения. Рис. 2в, в логарифмическом масштабе, демонстрирует центрированный амплитудный пространственный спектр рис. 2а. Рис. 2г – аналогичный спектр для рис. 2б (ограниченный спектр). Ограничение спектра составило $N_S = 64$ гармоники ($N/4$).

При сравнении рис. 1а. и рис. 1б. можно обнаружить некоторое ухудшение качества изображения после операции ограничения спектра. Внешне это проявляется в общем снижении резкости (дефокусировки из-за удаления высоких частот) и появлении артефактов похожих на дифракционные эффекты (хорошо видны на плече и колене (рис. 1б)). Очевидно, что именно эти «дифракционные» артефакты несут в себе информацию, которая позволит реконструировать сплошную лакуну. Это изображение, в некотором смысле, стало подобно голограмме, которая позволяет восстанавливать изображение даже при частичной потере данных [11].

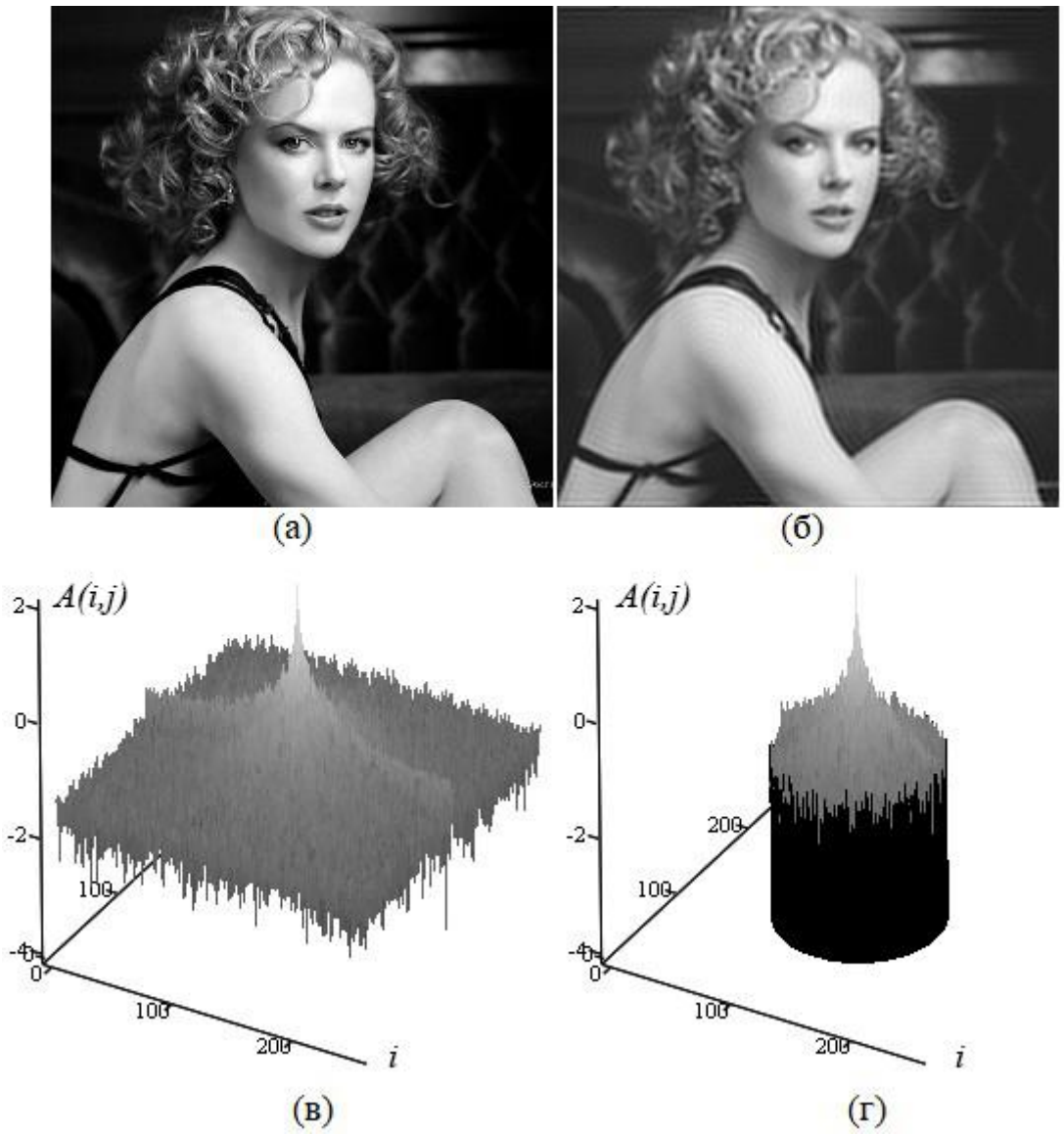


Рис. 2. Тестовое изображение 256x256 пикселей до – (а) и после – (б) спектрального ограничения. Центрированный амплитудный пространственный спектр рис. 2а. – (в). Центрированный амплитудный пространственный спектр рис. 2б. – (в).

На рис. 3а представлено изображение рис. 2б с лакуной размерами 95×35 пикселей.

Поскольку вычислительная сложность значительна, но при выполнении обозначенных выше условий достоверность реконструкции данных обеспечена, то для сокращения объема вычислений, применительно к реконструкции лакун на изображениях, процедура восстановления проводилась в одномерном варианте – по последовательностям пикселей в столбцах данных матриц изображений. Т.е. в одномерном варианте длина лакуны составляет $N_L = 35$ пикселей. Общая длина сигнала $N = 256$. Условие корректной реконструкции

выполняется ($N–N_L = 221$ больше, чем $2 \cdot N_S = 128$). На рис. 3б представлено изображение, восстановленное без потерь информации. При увеличении размера лакуны (по мере приближения к условию корректной реконструкции) восстановленное изображение все больше и больше разрушается из-за увеличения размеров артефактов.



Рис. 3. Спектрально ограниченное тестовое изображение с лакуной 95×35 пикселей (черный цвет) – (а). Восстановленное изображение рис. 2а – (б).

Если спектр ограничения сделать как показано на рис. 4б, то само тестовое изображение рис. 4а выглядит несколько лучше, чем рис. 2б. Но «дифракционные» артефакты все равно просматриваются.

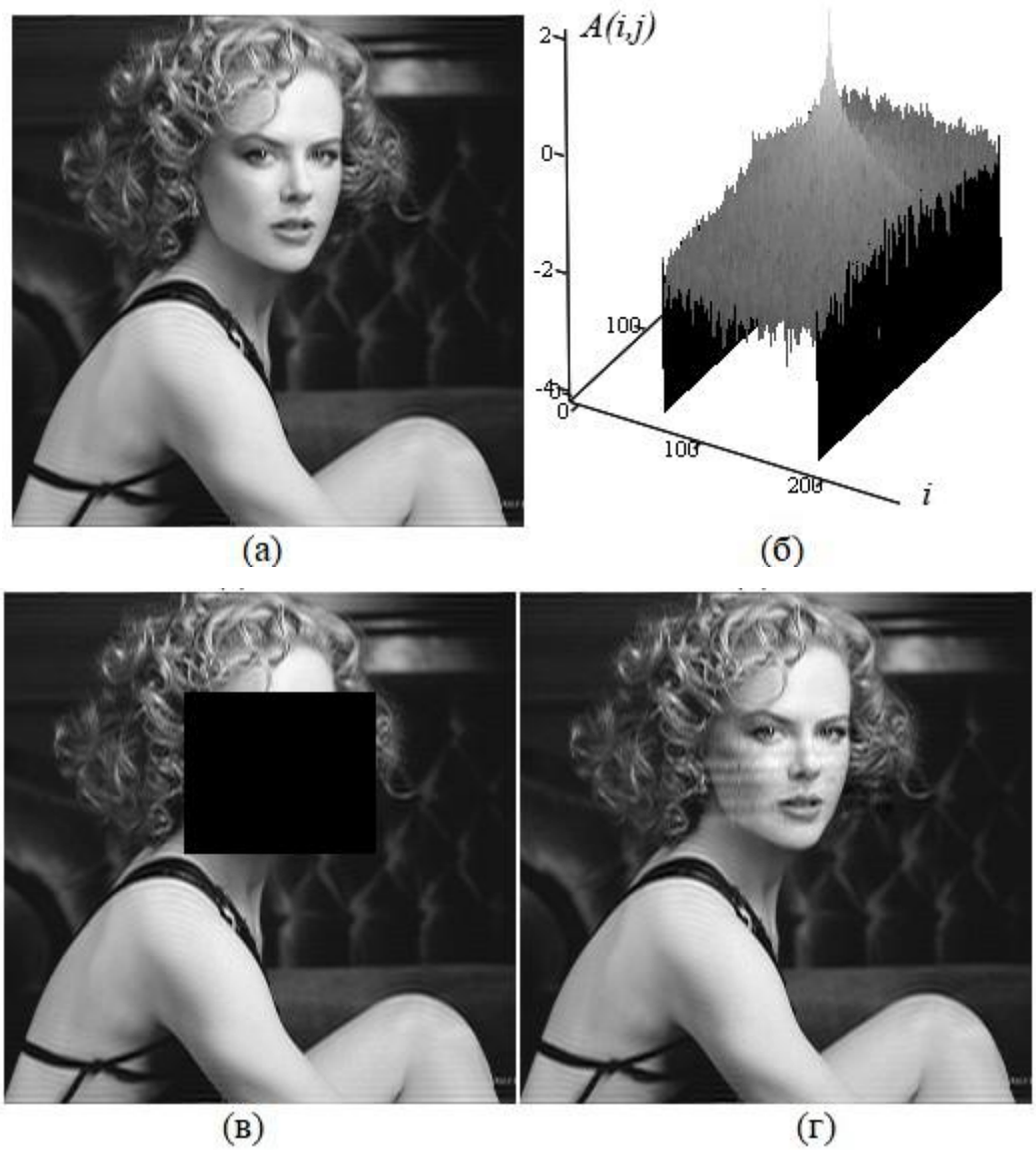


Рис. 4. Спектрально ограниченное тестовое изображение – а). Центрированный амплитудный пространственный спектр для рис. 4а. – (в). Спектрально ограниченное тестовое изображение с лакуной 95×80 пикселей (черный цвет) – (в). Восстановленное изображение рис. 4в – г).

Вычисления дают лучшие результаты чем в предыдущем случае. На рис. 4г показан момент возникновения мешающих артефактов на восстановленном изображении при лакуне 95×80 пикселей.

При использовании подобной методики полное восстановление сплошных лакун сталкивается с серьезной проблемой – **неустойчивостью задачи.** Даже ничтожно малый шум в уцелевших фрагментах или минимальная погрешность округления при квантовании приводят к экспоненциальному росту ошибки внутри лакуны при попытке точного восстановления. Кроме того, в реальности ни один сигнал не может быть строго ограничен и по времени, и по частоте.

Сигнал конечной длительности всегда имеет бесконечный (хоть и быстро затухающий) спектр. Поэтому на практике для восстановления лакун используют методы регуляризации (например, регуляризацию Тихонова), которые ищут компромисс между гладкостью (ограниченностью спектра) и близостью к исходным зашумленным отсчетам [13-15]. Однако, даже при незначительном увеличении шумов, регуляризация размывает содержимое лакуны, что в конечном итоге может нивелировать преимущества рассматриваемого подхода перед другими методами.

Заключение

Для изображений с лакунами, предварительно искаженных аппаратной функцией необходимо точное знание информации о функции размытия точки. Показано, что в таком случае, при реконструкции лакуны с помощью метода интерполяции последовательно вычисляемого спектра Фурье, последующая деконволюция искажений Фильтром Винера приводит к восстановлению содержимого лакуны.

Кроме того, в работе показано, что при сознательном ограничении спектра (обнулении амплитуд на высоких пространственных частотах) меняется структура сигнала. Появившиеся при этом на изображении «дифракционные» артефакты несут в себе информацию, которая позволит реконструировать сплошную лакуну. Изображение, в некотором смысле, становится подобным голограмме, которая позволяет восстанавливать изображение даже при частичной потере данных. Восстановление данных лакуны требует проведения соответствующих вычислительных операций с учетом априорных сведений о параметрах частотного фильтра. Принципиально возможно восстановление изображения с лакунами без информационных потерь, при условии $N - N_L \geq 2N_S$, где N – размер сигнала, N_L – величина лакуны и N_S – общее известное количество компонент спектра, у которых амплитуда не равна нулю. Однако, полное восстановление сплошных лакун сталкивается с серьезной проблемой – **неустойчивостью задачи.** Поэтому на практике для

восстановления лакун используют методы регуляризации. Но, даже при незначительном увеличении шумов, регуляризация размывает содержимое лакуны, что в конечном итоге может нивелировать преимущества рассматриваемого подхода перед другими методами.

Финансирование: Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН.

Литература

1. Зверев В.А. Радиооптика.М. «Советское радио» – 1975. – С. 304
2. Аксенов А.П. Математический анализ. Ряды Фурье. Интеграл Фурье. Суммирование расходящихся рядов. Учебное пособие. – 1999. – С. 86
3. Страхов В.Н., Страхов А.В. Аппроксимационный подход к решению задач гравиметрии и магнитометрии // Российский журнал наук о Земле. – 1999. – Т. 1. – №. 4.
4. Щерба Е.В. Анализ применимости методов интерполяции и экстраполяции для решения задачи восстановления изображения. // Компьютерная оптика, – 2009 – том 33. – №3 – С. 336-339.
5. Кокошкин А.В. и др. Ретуширование и восстановление отсутствующих частей изображений с помощью итерационного вычисления их спектров // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43. – №. 6. – С. 1030-1040. https://doi.org/10.18287/2412-6179-2019-43-6-1030-1040
6. Кокошкин А.В., Коротков В.А., Новичихин Е.П. Реконструкция акустических сигналов по неполным данным // Радиотехника и электроника. – 2020. – Т. 65. – №. 12. – С. 1181-1189. https://doi.org/10.31857/S0033849420120104
7. Кокошкин А.В. Методы интерполяции разреженных изображений, работающие в частотной области // Журнал радиоэлектроники. – 2023. – №. 3. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.3.10

8. Кокошкин А.В., Новичихин Е.П. Восстановление отсутствующих фрагментов изображения, искаженного вследствие дефокусировки или смаза при известной аппаратной функции. // РЕНСИТ. – 2020. – Т. 12. – №. 4. – С. 495-506. https://doi.org/10.17725/rensit.2020.12.495
9. Коротков В.А. Восстановление спектрально-ограниченного сигнала по его известной части. // Журнал радиоэлектроники. – 2013. – № 9.
10. Кокошкин А.В., Коротков В.А., Коротков К.В., Новичихин Е.П. Особенности интерполяции спектрально-ограниченных сигналов. // Журнал радиоэлектроники. – 2017. – № 6.
11. Черепенин В.А. и др. Восстановление подповерхностных радиоголограмм как полностью, так и частично измеренных, разными методами // Радиотехника и электроника. – 2017. – Т. 62. – №. 7. – С. 672-680. https://doi.org/10.7868/S0033849417070038
12. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – 1980. – С.279
13. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – Наука, 1974.
14. Sanz J.L., Huang T.S. Status and perspectives of band-limited signal extrapolation // Advances in Computer Vision and Image Processing. – 1983. – No. 1. – P. 121–185.
15. Fornasier M. (ed.). Theoretical foundations and numerical methods for sparse recovery. – Walter de Gruyter. – 2010. – Т. 9.

Для цитирования:

Кокошкин А.В. Компьютерное моделирование реконструкции сплошных лакун на изображениях без информационных потерь // Журнал радиоэлектроники. – 2026. – № 10. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.10.3